DIGITALES ARCHIV

ZBW – Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
ZBW – Leibniz Information Centre for Economics

Kemeny, John G. (Ed.); Schleifer, Arthur, jr. (Ed.); Snell, J. Laurie (Ed.) et al.

Book
Mathematik für die Wirtschaftspraxis

Provided in Cooperation with:
ZBW LIC

Reference: (2019). Mathematik für die Wirtschaftspraxis. Reprint 2019. Berlin : Boston : De Gruyter.
https://doi.org/10.1515/9783111665849.
https://www.degruyter.com/isbn/9783111665849.
doi:10.1515/9783111665849.

This Version is available at:
http://hdl.handle.net/11159/695705

Kontakt/Contact
ZBW – Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft/Leibniz Information Centre for Economics
Düsternbrooker Weg 120
24105 Kiel (Germany)
E-Mail: *rights[at]zbw.eu*
https://www.zbw.eu/

Standard-Nutzungsbedingungen:
Dieses Dokument darf zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen. Sofern für das Dokument eine Open-Content-Lizenz verwendet wurde, so gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der Lizenz gewährten Nutzungsrechte. Alle auf diesem Vorblatt angegebenen Informationen einschließlich der Rechteinformationen (z.B. Nennung einer Creative Commons Lizenz) wurden automatisch generiert und müssen durch Nutzer:innen vor einer Nachnutzung sorgfältig überprüft werden. Die Lizenzangaben stammen aus Publikationsmetadaten und können Fehler oder Ungenauigkeiten enthalten.

Terms of use:
This document may be saved and copied for your personal and scholarly purposes. You are not to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public. If the document is made available under a Creative Commons Licence you may exercise further usage rights as specified in the licence. All information provided on this publication cover sheet, including copyright details (e.g. indication of a Creative Commons license), was automatically generated and must be carefully reviewed by users prior to reuse. The license information is derived from publication metadata and may contain errors or inaccuracies.

https://savearchive.zbw.eu/termsofuse

ZBW Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Mathematik für die
Wirtschaftspraxis

Mathematik für die Wirtschaftspraxis

John G. Kemeny
Arthur Schleifer, jr.
J. Laurie Snell
Gerald L. Thompson



Walter de Gruyter & Co · Berlin 1966
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

Titel der amerikanischen Originalausgabe: Finite Mathematics with Business applications, Second Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. Y. 1963

Deutsche Übersetzung: Prof. Dr. Hans-Jürgen Zimmermann

©

Copyright 1966 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp., Berlin 30. — Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen, von der Verlagshandlung vorbehalten. — Archiv-Nr. 13 73 661 — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin. — Printed in Germany

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Seit einigen Jahren finden in steigendem Maße neuere, quantitative Methoden Eingang in Theorie und Praxis der Betriebswirtschaftslehre. Viele dieser Theorien, Techniken oder Methoden werden unter der Überschrift des Operations Research oder der Mathematischen Entscheidungsforschung gelehrt oder benutzt, aber auch außerhalb dieser Bereiche neigt man mehr und mehr zu einer exakten, quantitativen Betrachtungsweise und Analyse. Ich denke hierbei vor allem an die Gebiete der kurz- und langfristigen Planung, der Produktion, des Marketing und des Finanzwesens sowie der Koordinierung der verschiedenen betrieblichen Funktionen auf höchster Ebene. Die Anwendung spezieller mathematischer oder formallogischer Methoden und Theoreme als Hilfsmittel ist in wesentlichen Bereichen der Wirtschaftspraxis bereits unumgänglich geworden. Sie hat des öfteren die Befürchtung aufkommen lassen, daß diese Entwicklung dem reinen Mathematiker eine Vorrangstellung in der betriebswirtschaftlichen Praxis und Theorie einräume, die ihm in diesem Maße nicht zukommt. Sicher besteht in dieser überspitzten Form dazu kein Anlaß, wir können aber deutlich feststellen, daß vom Studenten der Wirtschaftswissenschaften eine immer bessere mathematische Vorbildung verlangt wird und daß der nicht mathematisch vorgebildete Wirtschatspraktiker heute kaum mehr in der Lage ist, neuere Methoden seines Gebietes zu verstehen, zu beurteilen und im Sinne einer bestmöglichen Bewältigung der verschiedensten Aufgaben zu verwenden.

Es gibt im deutschsprachigen Raum eine ganze Anzahl ausgezeichneter Bücher, die sich mit speziellen Gebieten der Mathematik befassen. Man wird jedoch kaum erwarten können, daß sich vor allem der Wirtschaftspraktiker einem intensiven Studium dieser Bücher hingibt. Dringend erforderlich ist deshalb ein Werk, das in umfassender, aber einführender und leicht lesbarer Form den benötigten Stoff zugänglich macht. Auch in den USA mußte man diese Erfahrung vor einiger Zeit machen, und die Autoren versuchten mit dem vorliegenden Buch die Lücke zu schließen. Der Erfolg, den die englische Ausgabe in der Praxis und an vielen der besten amerikanischen Universitäten gehabt hat und immer noch hat, beweist, daß dieser Versuch sehr gut geglückt ist. Es lag daher nahe, die Veröffentlichung auch den deutschen Lesern zugänglich zu machen.

Bei der Übersetzung des Buches wurde so weit wie irgend möglich die in Deutschland verbreitete Symbolik verwendet. In den Fällen, in denen

keine genau der englischsprachigen Terminologie entsprechende deutsche Bezeichnung zu finden war, wird der Leser auf die gebräuchlichen, alternativ verwendbaren, Begriffe aufmerksam gemacht. Um die Benutzung des Buches für den deutschsprachigen Leser weiterhin zu vereinfachen, wurden am Ende der jeweiligen Kapitel Hinweise auf vorhandene deutsche Literatur angefügt.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Diplommathematiker Theo Lutz für seine Beratung bei der Auswahl der zu verwendenden mathematischen Terminologie und den Herren des Verlages für die beim Druck und der Herausgabe des Buches bewiesene Sorgfalt und Geduld herzlich danken.

Ich hoffe, daß sich die nun vorliegende deutsche Ausgabe als eine wirkliche Hilfe sowohl für den deutschen Wirtschaftspraktiker als auch für den Studenten der Wirtschaftswissenschaften erweise und daß sie ein ebensolcher Erfolg wie die englische Originalfassung werde.

Urbana, im Dezember 1965

Dr. Hans-Jürgen Zimmermann

Ass. Prof. of Industrial Administration and Ind. Engineering, University of Illinois, USA

Vorwort

Die Anwendung mathematischer Methoden auf dem Gebiet der Betriebswirtschaftslehre hat in den letzten Jahren sowohl in der Theorie als auch in der Praxis erheblich zugenommen. Das Wachstum und die Entwicklung mathematischer Methoden wie Operations Research, Statistischer Entscheidungstheorie, Management Science und Mathematischer Programmierung sowie die Anwendungen dieser Werkzeuge bei der Lösung bestriebswirtschaftlicher Probleme läßt es wünschenswert erscheinen, daß Studenten der Betriebswirtschaftslehre im Rahmen ihres Studiums Vorlesungen in angewandter Mathematik hören. Im Rahmen der Untersuchungen von Gordon, Howell[1] und Pierson[2] und in einer Anzahl von Artikeln[3] wurde kürzlich der jetzige Stand der mathematischen Ausbildung von Betriebswirtschaftsstudenten untersucht und es werden Richtlinien vorgeschlagen, in denen die Ausbildung in Zukunft vonstatten gehen solle. Es herrscht allgemeines Einverständnis darüber, daß der Student eine gewisse Ausbildung in traditionellen mathematischen Techniken erhalten solle, wie das z. B. in Vorlesungen über Differentialrechnung u. ä. geschieht. Zusätzlich dazu verlangen alle Autoren einen Kurs, der eine gute Einführung in Gebiete moderner mathematischer Analyse oder das, was inzwischen als Finite Mathematik bekannt geworden ist, bietet.

Das Buch „Introduction into Finite Mathematics", an dem drei von uns mitarbeiteten, war als eine Antwort auf eine ähnliche Lücke in der mathematischen Ausbildung der Sozialwissenschaftler gedacht. Eine andere Ausgabe dieses Buches, „Finite Mathematical Structures", an dem ebenfalls drei von uns zusammen mit H. Wirke gearbeitet haben, war als ein Hilfsmittel für die mathematische Ausbildung des Physikstudenten gedacht. Diese beiden Bücher, genau wie das vorliegende, gehen von dem gleichen Grundgedanken aus: Alle Ausführungen bauen auf einer endlichen Be-

---

[1] R. A. Gordon und J. E. Howell, *Higher Education for Business*, New York: Columbia University Press, 1959, S. 159—163.

[2] F. C. Pierson u. a. *The Education of American Businessmen*, New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1959, S. 186—190.

[3] Siehe z. B. S. Goldberg, „Mathematics für Business Students" in *Views on Business Education*, School of Business Aministration, Chapel Hill, University of North Carolina, 1960; R. K. Gaumnitz und O. H. Brownlee, „Mathematics for Decision Makers", *Harvard Business Review*, 34, 3 (Mai-Juni 1956, S. 48; G. A. W. Boehm, „Mathematics II: The New Uses of the Abstract", Fortune, LVIII, 1 (Juli 1958), S. 124.

trachtung auf, d. h. sie berücksichtigen nicht unendliche Klassen, Kontinuitätserwägungen usw.

Wir haben die Erfahrung gemacht, daß die grundlegenden Ideen finiter Mathematik einfacher darzustellen und deren Theoreme beträchtlich einfacher zu beweisen sind, als dies für ihre infiniten Gegenstücke der Fall wäre. Wir glauben ferner, daß das Abstrahieren von der Wirklichkeit zum mathematischen Modell in den Fällen, an denen wir interessiert sind, viel leichter mit finiter Mathematik erreicht werden kann.

Alle im vorliegenden Buch behandelten Gebiete finiter Mathematik wurden mit Bezug auf betriebswirtschaftliche Probleme der Praxis und der Theorie behandelt. Wenn auch der grundlegende mathematische Kern des Buches der gleiche ist wie in vorhergehenden Büchern, so sind doch alle Übungen und Beispiele aus dem Gebiet des Geschäftslebens gewählt. Darüber hinaus wurde mehr als ein Drittel des Buches vollkommen neu hinzugefügt. Dieser neue zusätzliche Teil besteht teilweise aus neuen mathematischen Ideen und teilweise aus einer großen Anzahl von Anwendungen der Mathematik auf betriebswirtschaftliche und administrative Probleme. Unter anderem wurden als Anwendungen Schaltkreise elektronischer Rechenmaschinen, Flußdiagramme für Rechnungs- und Buchhaltungsabläufe, Monte Carlo Simulation von Entscheidungsprozessen, Verläßlichkeit, Entscheidungstheorie, Theorie der Warteschlangen, Gebiete aus der Finanzmathematik und die Simplexmethode zum Lösen von Problemen linearer Programmierung und von Matrixspielen diskutiert.

Außer den „Baumdiagrammen", die sich in dem Buch „Introduction to Finite Mathematics" als pädagogisches Hilfsmittel als sehr nützlich erwiesen haben, fanden andere graphische Hilfsmittel Verwendung. So werden z. B. im Kapitel II im Rahmen der Analyse des kritischen Weges eine graphische Darstellung der Arbeitsgänge eines Gesamtprojektes benutzt, und in Kapitel III werden Flußdiagramme diskutiert, die eine sehr einfache Beschreibung komplizierter Rechenvorgänge, wie z. B. der Rechnungen für die Monte Carlo Simulation in Kapitel IV, der Buchungsvorgänge in Kapitel VI und der Rechnungen im Rahmen der Simplexmethode in Kapitel VII erläutert. Daneben bildet die Aufstellung eines guten Flußdiagrammes vielleicht siebzig Prozent des Schreibens eines Rechnerprogrammes in einer der allgemein üblichen Programmiersprache.

Der Kern des Buches besteht aus den nicht durch einen Stern bezeichneten Abschnitten der ersten fünf Kapitel. Der Inhalt dieser Abschnitte, der einen grundlegenden Mathematikkurs darstellt, sollte in jedem einführenden Kurs behandelt werden. Die mit einem Stern gekennzeichneten Abschnitte dieser Kapitel und die Kapitel VI, VII und VIII können dazu benutzt werden, den Grundkurs je nach Interesse des Lehrers oder der Studenten in verschiedenen Richtungen auszuweiten. Diese zusätzlichen Abschnitte

können ferner als Ergänzungen zu den Grundvorlesungen, zu Arbeiten in Seminaren und zum Selbststudium verwandt werden. Das Gesamtbuch kann ferner für einen einjährigen Lehrgang verwandt werden, der sich mit Mathematik und ihre Anwendungen auf die betriebswirtschaftliche Theorie und Praxis befaßt. Die genannten Abschnitte enthalten eine ganze Anzahl von Problemen und Techniken, die normalerweise unter den Namen „Operations Research", „Quantitative Methoden" usw. gelehrt werden.

Bei der Gestaltung des Buches wurde darauf Wert gelegt, in jedem Kapitel wichtige Anwendungsmöglichkeiten der darin behandelten Methoden aufzuzeigen. Wir hoffen, daß der Leser durch das wiederholte Hinweisen und Darstellen von praktischen Anwendungen der behandelten mathematischen Theorien dazu angeregt wird, das Gelernte in der Praxis anzuwenden.

Im Inhaltsverzeichnis wurde ferner vermerkt, welche Abschnitte oder Kapitel als Voraussetzungen für das Studium des jeweiligen Abschnittes angesehen werden können. Dadurch wird es möglich, bestimmte Abschnitte ganz auszulassen oder die behandelten Gebiete in einer anderen als vom Autor vorgeschlagenen Reihenfolge zu studieren. Hierbei haben wir im allgemeinen nur die Abschnitte angeführt, die unmittelbare Voraussetzung für das Verständnis eines bestimmten Abschnittes sind. Wir hoffen, daß diese Hinweise auf Voraussetzungen auch dem Leser helfen werden, der Schwierigkeiten beim Studium eines bestimmten Abschnittes hat und der versuchen will, die auftretenden Fragen mit Hilfe früherer Abschnitte zu klären. Manchmal beziehen sich diese Zusammenhänge nur auf Einzelheiten, die nicht von grundlegender Wichtigkeit für das Verständnis der behandelten Gedankengänge sind. So wird z. B. im Abschnitt 4 des vierten Kapitels beschrieben, wie man in Tabelle III mit Hilfe einer, vom binomischen Lehrsatz (Abschnitt 8, Kapitel III) abgeleiteten, Näherungsformel interpolieren kann. Diese Ausführungen sind jedoch nicht unbedingt nötig für ein Verständnis des Hauptthemas dieses Abschnittes, wenn sie auch weitergehende Anwendungen der behandelten Theorie erlauben. Zusammenhänge dieser Art haben wir durch das Einschließen der angeführten Voraussetzungen in Klammern angedeutet.

Das Buch selbst setzt lediglich zwei bis drei Jahre Mathematik-Unterricht an einer Oberschule voraus. Es kann daher auf jeder Stufe des Studiums (vom ersten Semester an) benutzt werden. Der größte Teil des Buches ist bereits in der einen oder anderen Form in Dartmouth College, Carnegie Institue of Technology und einer Anzahl anderer Institutionen mit Erfolg verwandt worden.

Wir möchten an dieser Stelle H. Mirkel danken, der freundlicherweise der Verwendung von Teilen des Buches zustimmte, das drei der Autoren

dieses Buches mit ihm schrieben. Das Dartmough Computation Center half bei der Vorbereitung der Tabellen im Anhang und bei der Lösung einiger der im Text erwähnten Beispiele. Außerdem sind wir den folgenden Herren zu Dank verpflichtet, die Teile des Manuskriptes lasen und kritisierten und uns weitere Anregungen gaben: H. Churchill, G. Cooke, R. M. Cyert, H. J. Davidson, D. Dearborn, M. W. Herriott, R. H. Klein, M. Miller, L. E. Morrissey, jr., R. Schlaifer, R. Trueblood und P. R. Winters. Schließlich möchten wir den Herren von Prentice-Hall für die beim Druck und der Gestaltung des Buches geübte Sorgfalt danken.

J. G. K.
A. S., jr.
J. L. S.
G. L. T.

Inhalt

	Seite	Voraussetzungen
I. Satzverknüpfungen		
1. Der Zweck der Theorie	1	
2. Die gebräuchlichsten Verknüpfungszeichen	3	I.1
3. Andere Verknüpfungszeichen	8	I.2
4. Logische Möglichkeiten	13	I.3
5. Baum-Diagramme	19	I.4
6. Entscheidungsbäume	25	I.5
7. Logische Beziehungen	30	I.4
*8. Eine systematische Analyse logischer Beziehungen	33	I.7
*9. Sätze mit gegebenen Wahrheitstafeln	37	I.3 (1.7)
*10. Anwendungen auf Schaltkreise	41	I.9
*11. Dualzahlen	45	I.2
*12. Schaltkreise elektronischer Rechenmaschinen	48	I.10, I.11
Empfohlene Lektüre	53	
II. Klassen und Unterklassen		
1. Einführung	54	I.4
2. Das Arbeiten mit Unterklassen	58	II.1
3. Das Verhältnis von Klassen zu Satzverknüpfungen	63	II.2, I.7
*4. Die Operationsregeln der Klassenlogik	68	II.2
*5. Wahlkoalitionen	68	II.2
*6. Methode des kritischen Weges	73	II.1
Empfohlene Lektüre	84	

	Seite	Voraussetzungen
III. Aufspalten und Zählen		
1. Aufspalten	85	II.2
*2. Anwendungen	91	III.1
3. Die Anzahl der Elemente einer Klasse	95	III.1, II.2
4. Permutationen	99	I.5, III.3
5. Anzahl möglicher Aufspaltungen	103	III.4
6. Zweizellige Aufspaltungen zweiwertiger Klassen	107	III.5
7. Einige Eigenschaften binomialer Koeffizienten	111	III.5
8. Binomialer und polynomischer Lehrsatz	114	III.5
*9. Wahlvorgänge	118	III.4
*10. Flußdiagramme	121	
*11. Flußdiagramme für Zählprobleme	127	III.4, III.7, III.10
Empfohlene Lektüre	134	
IV. Wahrscheinlichkeitstheorie		
1. Einführung	135	I.1, II.1
2. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsmaßzahlen	138	IV.1, I.2, I.4, II.2
3. Die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit	142	IV.2
4. Wahrscheinlichkeit einer aus einer zweiwertigen Klasse entnommenen Stichprobe	146	IV.3, III.6
*5. Zwei — nicht mit dem gesunden Menschenverstand — lösbare Beispiele	149	IV.3, III.4
6. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Bayessches Theorem	153	IV.2
7. Endliche stochastische Prozesse	161	IV.6, I.5
8. Unabhängige Versuche mit zwei möglichen Ergebnissen	171	IV.7, III.5
*9. Das Gesetz der großen Zahl	179	IV.8

		Seite	Voraussetzungen
*10.	Voneinander unabhängige Versuche mit mehr als zwei möglichen Ergebnissen	185	IV.7, IV.8, III.5
11.	Der Erwartungswert	188	IV.8
12.	Markov'sche Ketten	195	IV.7
*13.	Monte Carlo Simulation	202	III.10, IV.7, IV.8, IV.12
*14.	Analyse von Entscheidungsregeln mit Hilfe der Monte Carlo Methode	210	IV.9, IV.11, IV.13
*15.	Verläßlichkeit von Bauteilen	218	IV.2
*16.	Entscheidungstheorie	224	IV.6, IV.7, IV.8, IV.11
	Empfohlene Lektüre	234	

V. Vektoren und Matrizen

1.	Spalten- und Zeilenvektoren	233	
2.	Beispiele für die Multiplikation von Vektoren	237	V.1
3.	Matrizen und ihre Verbindung mit Vektoren	243	V.2, IV.12
4.	Die Multiplikation und Addition von Matrizen	251	V.3
5.	Die Lösung linearer Gleichungen	257	V.4
6.	Die Inverse einer quadratischen Matrix	266	V.5
*7.	Das Stücklistenproblem	272	V.6
8.	Anwendung der Matrizenrechnung auf Markov'sche Ketten	278	V.4, IV.12
9.	Absorbierende Markov'sche Ketten	286	V.6, V.8
*10.	Ein Beispiel aus der Theorie der Warteschlangen	294	V.9
*11.	Kontokorrentkonten	300	V.9
*12.	Weitere Anwendungen Markov'scher Ketten	305	V.9
*13.	Die Errechnung von Maxima und Minima; Entscheidungsfällung	310	V.4, IV.11
	Empfohlene Lektüre	317	

	Seite	Voraussetzungen
VI. Finanzmathematik		
1. Endliche Reihen	318	
2. Einige wichtige Sonderfälle	324	VI.1
3. Auflösung nach dem Zinssatz und Anzahl der Zahlungen	331	VI.2
4. Nomineller und tatsächlicher Zinsfuß	337	VI.3, III.8
*5. Steuereinsparungen durch Abschreibungen	340	VI.2
*6. Formeln für die Errechnung des Barwertes von Abschreibungsbeträgen	346	VI.5
7. Buchführung mit doppelter Klassifikation	353	V.4
8. Finanzielles Berichtwesen	359	VI.7
*9. Flußdiagramme für Buchhaltungssysteme mit doppelter Klassifizierung	365	VI.8, III.10
Empfohlene Lektüre	370	
VII. Lineares Programmieren		
1. Polyedrische konvexe Punktmengen	371	I.4, II.3, V.5
2. Extremwerte; Maxima und Minima linearer Funktionen	378	VII.1, (V.2)
3. Probleme linearer Programmierung	386	VII.7
4. Die Lösung von Problemen der linearen Programmierung mit Hilfe der Simplexmethode	392	VII.3, (V.6)
5. Duale Probleme des linearen Programmierens	402	VII.4
Empfohlene Lektüre	409	
VIII. Die Theorie der Spiele		
1. Einführung: Determinierte Spiele	410	V.3, (V.13)
2. Spiele ohne Sattelpunkt	415	VIII.1, IV. 11
3. Matrixspiele	422	VIII.2

	Seite	Voraussetzungen
4. Weiteres über Matrixspiele: Das grundlegende Theorem	431	VIII.3, V.4
5. Zwei-Zeilen- und Zwei-Spalten-Matrixspiele	434	VIII.4
6. Vereinfachter Poker	441	VIII.5
*7. Das Modell einer wachsenden Volkswirtschaft	445	V.3
*8. Das Vorhandensein eines wirtschaftlichen Gleichgewichtes	452	VIII.7, VIII.4
9. Die Lösung von Matrixspielen mit Hilfe der Simplexmethode	458	VIII.4, VII.4, VII.5
*10. Zwei-Personen-Nicht-Nullsummenspiele	466	VIII.5
Empfohlene Lektüre	475	
Anhang:	477	
I. Binomiale Wahrscheinlichkeiten	478	
II. Zufallszahlen	480	
III. Zinsfaktoren	484	
IV. Rentenbarwertfaktoren	486	
Sachverzeichnis	489	

I. Satzverknüpfungen

1. Der Zweck der Theorie

In diesem ersten Kapitel wollen wir untersuchen, auf welche Weise sich Sätze so miteinander verknüpfen lassen, daß daraus andere Sätze entstehen. So können wir z. B. aus den Sätzen „Ich habe zwei Asse" und „Du hast eine lange Farbe" den verwickelteren Satz „Entweder habe ich zwei Asse, oder du hast keine lange Farbe" bilden. Dieser neue Satz wird im Unterschied zu den Sätzen, aus denen er besteht und die man als Teilsätze bezeichnet, Satzverknüpfung genannt. Jeder Satz (und zwar auch, wenn er selbst schon zusammengesetzt ist) kann als einer der Teilsätze einer anderen Satzverknüpfung verwendet werden.

Es mag natürlich erscheinen, zunächst die Sätze selbst sorgfältig zu untersuchen, ehe man die Möglichkeiten ihrer Kombination prüft. Wir wollen jedoch die innere Struktur von Sätzen deshalb nicht studieren, weil (1) eine solche Untersuchung schwierig wäre und mehr in den Rahmen der Sprachwissenschaften als in den der Mathematik gehörte und weil wir (2) nicht sehr viel über die Aussagen wissen müssen, um die verschiedenen Methoden ihrer Kombination verstehen zu können. In der Mathematik hat es sich oft als fruchtbar erwiesen, einen solchen Umweg zu wählen — zunächst anzunehmen, daß ein erstes, schwieriges Problem bereits gelöst sei und dann zu zeigen, wie die Lösung des weiteren Problems von den verschiedenen möglichen Lösungen des ersten abhängt.

Alles, was wir von einem Satz wissen wollen, ist, ob er wahr oder falsch ist, und dann wollen wir zeigen, wie die Wahrheit oder Falschheit einer Satzverknüpfung von der Wahrheit oder Falschheit ihrer Teilsätze abhängt. Wir werden weiterhin die Tatsache berücksichtigen, daß ein Satz, wie „Ich habe zwei Asse" je nachdem, welches Blatt ich in der Hand habe, manchmal wahr und manchmal falsch ist. Die möglichen Kombinationen von fünf Karten, die man beim Pokerspiel erhalten kann (und wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß es davon 2598960 gibt), sind ein Beispiel dessen, was wir in Abschnitt 4 dieses Kapitels als „logische Möglichkeiten" bezeichnen werden. Bevor wir einen Satz betrachten, bestimmen wir vorher die logischen Möglichkeiten, auf die er sich bezieht. Für jede dieser Möglichkeiten ist er entweder wahr oder falsch. Gewöhnlich wird in er bezug auf einige dieser Möglichkeiten wahr sein und dagegen falsch, wenn er auf die anderen

bezogen wird; es gibt aber auch Sätze, die in allen Fällen wahr und Sätze, die in allen Fällen falsch sind.

Wir haben nun ein zweifaches Problem: (1) Auf welche Weise können Sätze überhaupt verknüpft werden? (2) Wie bestimmen wir den Wahrheitswert (d. h. die Wahrheit oder Falschheit) einer Satzverknüpfung, wenn die Wahrheitswerte ihrer Teilsätze gegeben sind? Während wir die erste systematische Behandlung von Überlegungen, die sich auf dieses doppelte Problem beziehen, bereits in den Schriften Aristoteles' finden, wurden vor ungefähr 100 Jahren erstmals mathematische Methoden durch George Boole angewandt. Die verfeinerten Techniken, die uns heute zur Verfügung stehen, sind durch mathematische Logiker des zwanzigsten Jahrhunderts geschaffen worden.

Beispiele: Wir wollen die Teilsätze „Die Geschäftslage ist gut" und „Die Aktienkurse sind hoch" als Beispiele wählen. Dabei soll für den ersten Satz p und für den zweiten q eingesetzt werden.

Angenommen, wir wollen durch die Satzverknüpfung ausdrücken, daß beides wahr ist: „Die Geschäftslage ist gut *und* die Aktienkurse sind hoch". Symbolisch wollen wir diesen Satz durch $p \wedge q$ darstellen. Das Zeichen $\wedge$, das als „und" gelesen werden kann ist unser erstes Verknüpfungszeichen.

Anstatt der obigen, weitgehenden Behauptung mögen wir uns darauf beschränken wollen, nur die schwache (vorsichtige) Behauptung aufzustellen, daß der eine oder andere Satz wahr sei: „Die Geschäftslage ist gut *oder* die Aktienkurse sind hoch". Wir stellen diese Behauptung durch $p \vee q$ symbolisch dar. Das Symbol $\vee$, das man als „oder" lesen kann, ist das zweite Verknüpfungszeichen, das wir benutzen werden.

Angenommen, wie hielten einen der obigen Sätze für falsch, so daß z. B. gelte: „Die Aktienkurse sind *nicht* hoch". Wir könnten das symbolisch dann durch $\sim q$ ausdrücken. Unter drittes Verknüpfungszeichen ist damit $\sim$, das man als „nicht" lesen kann.

Wir können nun verwickelte Satzverknüpfungen bilden: So steht z. B. $p \wedge \sim q$ für „Die Geschäftslage ist gut *und* die Aktienkurse sind *nicht* hoch".

ÜBUNGEN

1. Die folgenden Sätze stellen Satzverknüpfungen dar, oder sie mögen als solche angesehen werden. Bestimmen Sie deren einzelne Bestandteile:
   a) Die Geschäftslage ist schlecht, und die Aktienkurse sind hoch.
   b) Die Geschäftslage ist gut, aber die Aktienkurse sind nicht hoch.
   c) Die Geschäftslage wird sich verbessern, oder die Aktienkurse werden sinken.
   d) Die Aktienkurse und die Kurse festverzinslicher Papiere sind hoch.
   e) Wir sollten Stammaktien oder Vorzugsaktien verkaufen.
   f) Wir sollten weder Stammaktien noch Vorzugsaktien verkaufen.
   g) Entweder verbessert sich die Geschäftslage, oder wir sollten jetzt unsere Lagervorräte abbauen.
2. Ordnen Sie den verschiedenen Bestandteilen in Übung 1 Buchstaben zu, und schreiben Sie die Sätze in symbolischer Form. [Lös. b): $p \wedge \sim q$]
3. Schreiben Sie die folgenden Sätze in symbolischer Form, wobei p bedeuten soll „Müllers Arbeitsleistung ist höher als die von Schmidt" und q „Müller verdient mehr Geld als Schmidt".

a) Müllers Arbeitsleistung ist höher als die von Schmidt, aber Müller verdient nicht mehr Geld als Schmidt.
b) Müllers Arbeitsleistung ist nicht höher als die von Schmidt, aber er verdient mehr Geld als Schmidt.
c) Müllers Verdienst und Arbeitsleistung sind niedriger als die von Schmidt.
d) Entweder leistet Müller mehr als Schmidt, oder Schmidt verdient mehr Geld als Müller.
e) Müller leistet weder mehr, noch verdient er mehr Geld als Schmidt.
f) Müller leistet nicht mehr als Schmidt, aber er verdient weniger Geld.
g) Es ist nicht wahr, daß Müller sowohl weniger leistet als auch weniger Geld verdient als Schmidt.

4. Angenommen, die Arbeitsleistung Müllers sei höher als die von Schmidt und er verdiene mehr Geld. Welche der sieben Satzverknüpfungen der Übung 3 sind wahr? [Lös.: c), d), g)]

5. Schreiben Sie die folgenden Sätze in symbolischer Form:
a) Die Gesellschaft A verkauft an die Gesellschaft B (Satz p).
b) Die Gesellschaft B verkauft an die Gesellschaft A (Satz q).
c) A verkauft an B und umgekehrt.
d) A verkauft nicht an B und umgekehrt.
e) B kauft von A, aber A nicht.
f) B kauft von A, aber A kauft nicht von B.
g) Weder A noch B mißlingt es, an den anderen zu verkaufen.
h) Es stimmt nicht, daß es A und B mißlingt, an den anderen zu verkaufen.

6. Angenommen A verkauft an B, aber B verkauft nicht an A. Welche der acht Sätze in Übung 5 sind wahr?

7. Geben Sie für jeden Satz in Übung 5 eine Bedingung an, unter der er falsch ist. [Lös. c): A verkauft nicht an B.]

8. p bedeute „Die Aktienkurse sind hoch", und q bedeute „Die Aktienkurse steigen". Übersetzen Sie das Folgende ins Deutsche:
a) $p \wedge q$.
b) $p \wedge \sim q$.
c) $\sim p \wedge \sim q$.
d) $p \vee \sim q$.
e) $\sim(p \wedge q)$.
f) $\sim(p \vee q)$.
g) $\sim(\sim p \vee \sim q)$.

9. Formulieren Sie einfachere symbolische Sätze gleichen Inhalts, indem Sie Ihre Lösungen der Aufgaben e, f und g aus Übung 8 verwenden.

10. p bedeute „Müller ist Schatzmeister, und q bedeute „Schmidt ist Controller". Übersetzen Sie das Folgende ins Deutsche und vereinfachen Sie es:

$$\sim[\sim p \vee \sim\sim q] \wedge \sim\sim p.$$

2. Die gebräuchlichsten Verknüpfungszeichen

Der Wahrheitswert einer Satzverknüpfung wird durch die Wahrheitswerte ihrer Bestandteile bestimmt. Bei der Diskussion eines Verknüpfungs-

zeichens interessiert es gerade zu wissen, in welcher Weise die Wahrheit einer Satzverknüpfung, die mit Hilfe dieses Verknüpfungszeichens entsteht, von der Wahrheit ihrer Bestandteile abhängt. Diese Abhängigkeit läßt sich bequem mit Hilfe einer *Wahrheitstafel* darstellen.

Betrachten wir die Verknüpfung $p \wedge q$. Sowohl der Satz p als auch der Satz q können entweder wahr oder falsch sein. Für diese Sätze gibt es also vier mögliche Paare von Wahrheitswerten, und wir wollen für jeden der Fälle wissen, ob der Satz $p \wedge q$ wahr ist oder nicht. Die Antwort hierauf ist recht einfach: Wenn sowohl p als auch q wahr sind, dann ist auch $p \wedge q$ wahr. Andernfalls ist $p \wedge q$ falsch. Dies erscheint begründet, da die Behauptung $p \wedge q$ nicht mehr und nicht weniger besagt, als daß p und q beide wahr sind.

Abb. 1 zeigt die Wahrheitstafel für $p \wedge q$, der *Konjunktion* von p und q. Die Wahrheitstafel enthält alle Informationen, die wir für das Verknüpfungszeichen $\wedge$ benötigen, d. h. sie liefert uns den Wahrheitswert der Konjunktion zweier Sätze, wenn die Wahrheitswerte jedes dieser Sätze gegeben sind.

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Abb. 1

p	q	$p \vee q$
W	W	?
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Abb. 2

Weiter wollen wir uns die Satzverknüpfung $p \vee q$, die Disjunktion von q und p ansehen. Hier lautet die Behauptung, daß der eine oder der andere dieser Sätze wahr sei. Wenn einer der Sätze wahr und der andere falsch ist, dann ist diese Disjunktion offenbar wahr. Wir können somit die letzten drei Zeilen der Wahrheitstafel für die Disjunktion ausfüllen (siehe Abb. 2).

Beachten Sie, daß eine der Möglichkeiten unentschieden bleibt, nämlich der Fall, daß beide Komponenten wahr sind. Wir stellen fest, daß der alltägliche Gebrauch von „oder" zweideutig ist: Bedeutet „oder" „das eine oder das andere oder beides" oder bedeutet es „das eine oder das andere, aber nicht beides"?

Hierauf wollen wir mit Hilfe von Beispielen eine Antwort suchen. Der Satz „Braun oder Schmidt sind Vorarbeiter" schließt die Möglichkeit ein, daß beide Männer Vorarbeiter sind. Der Satz „Ich will nach Dartmouth oder nach Princeton fahren" deutet jedoch an, daß nur einer dieser beiden Schulorte gewählt werden wird. „Ich werde mir nächstes Jahr einen Fern-

sehapparat oder einen Plattenspieler kaufen" kann in dem einen oder in dem anderen Sinne gebraucht werden; der Sprecher mag damit meinen, daß er versucht, sich darüber klar zu werden, welches von beiden Geräten er kaufen soll; er könnte jedoch ebensogut meinen, daß er *wenigstens eines* von beiden — möglicherweise jedoch beide — kaufen wolle. Wir sehen, daß der Sinn manchmal, aber nicht immer, durch den Zusammenhang klar wird.

Der Mathematiker verschwendet seine Zeit nicht mit einem Streit darüber, welche Art des Sprachgebrauchs als Disjunktion zweier Sätze bezeichnet werden „sollte". Er erkennt lieber zwei durchaus berechtigte Verwendungsweisen an und bezeichnet die eine als *einschließende Disjunktion* (p oder q, aber nicht beides). Wir werden das Symbol $\vee$ für die einschließende Disjunktion und das Symbol $\underline{\vee}$ für die ausschließende Disjunktion verwenden. Die Abb. 3 und 4 zeigen die entsprechenden Wahrheitstafeln. Wenn nichts anderes gesagt wird, soll es sich bei unseren Disjunktionen um einschließende Disjunktionen handeln.

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Abb. 3

p	q	$p \underline{\vee} q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Abb. 4

Das letzte Verknüpfungszeichen, das wir in diesem Abschnitt erörtern werden, ist die *Negation*. Ist p ein Satz, so behauptet das Symbol $\sim p$, Negation von p genannt, daß p falsch sei. $\sim p$ ist daher wahr, wenn p falsch ist und falsch, wenn p wahr ist. Abb. 5 zeigt die Wahrheitstafel der Negation.

p	$\sim p$
W	F
F	W

Abb. 5

Neben dem Gebrauch dieser grundlegenden Verknüpfungszeichen zur Konstruktion von Satzverknüpfungen können mehrere von ihnen dazu benutzt werden, eine verwickeltere Satzverknüpfung herzustellen; dies geschieht fast in derselben Weise, wie komplizierte, algebraische Ausdrücke mit Hilfe der grundlegenden arithmetischen Operationen zusammengesetzt werden. So stellen z. B. die Ausdrücke $\sim(p \wedge q)$, $p \wedge \sim p$ und $(p \vee q) \vee \sim p$ sämtlich Satzverknüpfungen dar. Sie sind in der gleichen Weise wie algebraische Ausdrücke „von innen heraus" zu lesen, d. h. Größen innerhalb der innersten Klammern werden zuerst zusammengefaßt, dann werden diese Klammernausdrücke zusammengefaßt usw. Jede dieser Satzverknüpfungen hat eine Wahrheitstafel, die routinemäßig aufgestellt werden kann. An Hand der folgenden Beispiele soll gezeigt werden, wie man Wahrheitstafeln aufstellt.

Beispiel 1. Betrachten Sie die Satzverknüpfung $p \vee \sim q$. Die Aufstellung der Wahrheitstafel beginnen wir damit, daß wir in die ersten beiden Spalten die vier möglichen Paare von Wahrheitswerten der Sätze p und q schreiben. Wir schreiben dann die fragliche Satzverknüpfung in das rechte obere Feld der Tabelle, wobei zwischen den Symbolen genügend Platz freigelassen wird, so daß die darunter befindlichen Spalten gut ausgefüllt werden können. Als Nächstes übertragen wir die Wahrheitswerte von p und q in die Spalten unterhalb ihrer Stellen in der Satzverknüpfung. Damit ist Schritt 1 des Verfahrens, wie Abb. 6 zeigt, vollendet.

p	q	$p \vee \sim q$	
W	W	W	W
W	F	W	F
F	W	F	W
F	F	F	F
Schritt Nr.		1	1

Abb. 6

Wir fahren mit der innersten Verknüpfung der Negation der Variablen q fort und beenden damit den zweiten Schritt, siehe Abb. 7.

p	q	p	$\vee$	$\sim$	q
W	W	W	F	W	
W	F	W	W	F	
F	W	F	F	W	
F	F	F	W	F	
Schritt Nr.		1	2	1	

Abb. 7

Schließlich füllen wir die Spalte unter dem Disjunktionssymbol aus, die uns die Wahrheitswerte der Satzverknüpfung für verschiedene Wahrheitswerte ihrer Variablen angibt. Um dies anzudeuten, ziehen wir zu beiden Seiten dieser Spalte Doppellinien und vollenden damit, wie Abb. 8 zeigt, den dritten Schritt.

p	q	p	$\vee$	$\sim$	q
W	W	W	W	F	W
W	F	W	W	W	F
F	W	F	F	F	W
F	F	F	W	W	F
Schritt Nr.		1	3	2	1

Abb. 8

Die nächsten beiden Beispiele zeigen Wahrheitstafeln komplizierterer Verknüpfungen, die in der gleichen Weise ausgearbeitet wurden. Bei ihrer Konstruktion muß sich der Student nur an zwei grundlegende Regeln halten: 1. Man arbeite von innen nach außen; 2. die Wahrheitswerte der Satzverknüpfungen findet man in der letzten während dieser Arbeit ausgefüllten Spalte.

Beispiel 2. Abb. 9 zeigt die Wahrheitstafel der Satzverknüpfung $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$ zusammen mit Ziffern, die auf die Reihenfolge hinweisen, in der die Spalten ausgefüllt wurden.

p	q	$(p$	$\vee$	$\sim$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	p
W	W	W	W	F	W	F	F	W
W	F	W	W	W	F	F	F	W
F	W	F	F	F	W	F	W	F
F	F	F	W	W	F	W	W	F
Schritt Nr.		1	3	2	1	4	2	1

Abb. 9

Beispiel 3. Abb. 10 zeigt die Wahrheitstafel des Satzes $\sim[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$ zusammen mit Ziffern, die die Reihenfolge angeben, in der die Spalten ausgefüllt wurden.

p	q	$\sim$	$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(\sim$	p	$\wedge$	$\sim$	$q)]$
W	W	F	W	W	W	W	F	W	F	F	W
W	F	W	W	F	F	F	F	W	F	W	F
F	W	W	F	F	W	F	W	F	F	F	W
F	F	F	F	F	F	W	W	F	W	W	F
Schritt Nr.		5	1	3	1	4	2	1	3	2	1

Abb. 10

ÜBUNGEN

1. Formulieren Sie eine Satzverknüpfung, die symbolisch „p oder q, aber nicht beides" darstellt, wobei lediglich $\sim$, $\vee$ und $\wedge$ zu verwenden sind.
2. Stellen Sie die Wahrheitstafel für Ihre Antwort zu Übung 1 auf, und vergleichen Sie diese mit Abb. 4.
3. Konstruieren Sie die Wahrheitstafeln für die symbolischen Darstellungen der Sätze der dritten Übung des Abschnitts 1. In welchem Zusammenhang steht Übung 4 aus Abschnitt 1 zu diesen Wahrheitstafeln?

4. Stellen Sie die Wahrheitstafeln der folgenden Sätze auf:
   a) $\sim(p \wedge q)$. [Lös.: FWWW.]
   b) $p \wedge \sim p$. [Lös.: FF.]
   c) $(p \vee q) \vee \sim p$. [Lös.: WWWW.]
   d) $\sim[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)]$. [Lös.: WFFW.]
5. p bedeute „Müller erreichte das Klassenziel", und q bedeute „Schmidt erreichte das Klassenziel". Übertragen Sie die Aussage „Es trifft nicht zu, daß sowohl Müller als auch Schmidt das Klassenziel nicht erreichten" in symbolischer *Formulierung*. Stellen Sie die Wahrheitstafel für diese Satzverknüpfung auf. Beschreiben Sie *verbal* die Fälle, in denen der Satz wahr ist.
6. Formulieren Sie einen einfacheren Satz über Müller und Schmidt, der die gleiche Wahrheitstafel hat wie diejenige in Übung 5.
7. $p \mid q$ bedeute „p und q sind nicht beide wahr". Drücken Sie $p \mid q$ durch $\sim$ und $\wedge$ symbolisch aus.
8. Stellen Sie die Wahrheitstafel für $p \mid q$ auf.
9. Stellen Sie eine Wahrheitstafel für $p \mid q$ auf. [Lös.: gleich der in Abb. 5.]
10. Stellen Sie eine Wahrheitstafel für $(p \mid q) \mid (p \mid q)$ auf. [Lös.: gleich der in Abb. 1.]
11. Stellen Sie die Wahrheitstafel für die folgenden Sätze auf:
    a) $\sim(p \vee q) \vee \sim(q \vee p)$. [Lös.: FFFW.]
    b) $\sim(p \vee q) \wedge p$. [Lös.: FFFF.]
    c) $\sim(p \underline{\vee} q)$. [Lös.: WFFW.]
    d) $\sim(p \mid q)$. [Lös.: WFFF.]
12. Bilden Sie zwei, in symbolischer Form geschriebene Sätze mit den Wahrheitstafeln a bzw. b, in denen nur die Symbole $\sim$, $\vee$ und $\wedge$ verwendet werden.

p	q	(a)	(b)
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	F
F	F	W	W

3. Andere Verknüpfungszeichen

Angenommen, wir wollten keine unbedingte Aussage aufstellen, vielmehr eine Aussage, die eine Bedingung enthält. Betrachten Sie zum Beispiel die folgenden Sätze: „Wenn sie die Qualität nicht verbessern, werden wir nicht mehr von ihnen kaufen"; „Wenn die folgende Aussage wahr ist, dann kann ich den Lehrsatz beweisen"; „Wenn die Lebenshaltungskosten weiterhin steigen, wird die Regierung drastische Maßnahmen ergreifen". Alle diese Sätze haben die Form „wenn p dann q". Die Implikation ist also ein neues Verknüpfungszeichen, das durch das Zeichen $\rightarrow$ symbolisiert wird.

Natürlich muß die präzise Definition dieses neuen Bindegliedes mit Hilfe einer Wahrheitstafel erfolgen. Wenn sowohl p als auch q wahr sind, dann ist $p \to q$ sicherlich wahr, und wenn p wahr und q falsch ist, dann ist $p \to q$ sicherlich falsch. So können die ersten beiden Zeilen der Wahrheitstafel, wie sie Abb. 11a zeigt, ohne Schwierigkeiten ausgefüllt werden. Nunmehr sei angenommen, p sei falsch; wie füllen wir nun die letzten beiden Zeilen der Wahrheitstafel in Abb. 11a aus? Auf den ersten Blick mag es am besten erscheinen, sie ganz frei zu lassen. Das würde jedoch unseren Grundsatz verletzen, daß ein Satz entweder wahr oder falsch ist.

p	q	$p \to q$
W	W	W
W	F	F
F	W	?
F	F	?

Abb. 11a

p	q	$p \to q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Abb. 11b

Wir wollen uns daher vollkommen willkürlich dafür entscheiden, daß, unabhängig vom Wahrheitswert von q, die Implikation $p \to q$ immer dann *wahr* ist, wenn p falsch ist. Diese Entscheidung versetzt uns in die Lage, die Wahrheitstafel für die Implikation so zu vervollständigen, wie es Abb. 11b zeigt. Ein Blick auf die Wahrheitstafel zeigt, daß die Implikation $p \to q$ nur dann als falsch betrachtet wird, wenn p wahr und q falsch ist. Die willkürliche Entscheidung, die wir oben getroffen haben, können wir, wenn wir wollen, folgendermaßen begründen: wenn p falsch ist, wenden wir auf die Implikation $p \to q$ den Grundsatz „in dubio pro reo" an und betrachten sie als wahr. (Siehe Übung 1.)

In der Umgangssprache pflegt man Teilsätze nur dann miteinander zu verbinden, wenn sie irgendwie miteinander zusammenhängen. So mögen wir zwar sagen „Es regnet heute, und ich will einen Regenschirm nehmen", jedoch wohl kaum „Ich lese ein gutes Buch, und ich will einen Regenschirm nehmen". Der ungenau definierte Begriff des Zusammenhangs läßt sich leider nur schwer präzisieren. Begriffe, die nach Meinung des einen zusammenhängen, brauchen dies nach der eines anderen durchaus nicht. Bei unserer Untersuchung von Satzverknüpfungen wird der innere Zusammenhang zweier Sätze als Voraussetzung für ihre Verknüpfung durch irgendeins der Verknüpfungszeichen nicht gefordert. Diese Freizügigkeit führt beim Gebrauch der Implikation manchmal zu merkwürdigen Ergebnissen. So ist z. B. gemäß der Wahrheitstafel in Abb. 11b der Satz „Wenn $2 \times 2 = 5$, dann ist schwarz = weiß" wahr, während der Satz „Wenn $2 \times 2 = 4$, dann sind Kühe Affen" falsch ist. Da wir die Form „wenn . . ., dann ..." gewöhnlich nur verwenden, wenn zwischen den beiden Sätzen eine kausale

Verbindung besteht, mögen wir geneigt sein, beide Sätze, von denen oben die Rede war, als sinnlos zu bezeichnen. Wir dürfen in diesem Zusammenhang jedoch nicht vergessen, daß beim Gebrauch des $\rightarrow$ kein solcher kausaler Zusammenhang unterstellt wird; die Bedeutung der Implikation geht vollständig aus Abb. 11b hervor, und mehr soll damit nicht ausgesagt werden. Wir werden in Abschnitt 6 mit Bezug auf die Implikation noch einmal auf diesen Punkt zurückkommen.

p	q	$p \leftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Abb. 12

In engem Zusammenhang mit dem Verknüpfungszeichen der Implikation steht die *Äquivalenz* (gegenseitige Implikation) $p \leftrightarrow q$, die als „p dann und nur dann, wenn q" gelesen werden mag. Die Äquivalenz sagt aus, daß, wenn p wahr ist, dann auch q wahr ist und daß, wenn p falsch ist, auch q falsch ist. Die Äquivalenz ist also in diesen Fällen wahr und in den anderen falsch, so daß ihre Wahrheitstafel wie in Abb. 12 aufgestellt wird. Die Äquivalenz ist das letzte der fünf Verknüpfungszeichen, die wir in diesem Kapitel verwenden werden. Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenfassung dieser Verknüpfungszeichen mit Angabe der Nummer der Abbildungen, die ihre Wahrheitstafeln wiedergeben. Vergessen Sie nicht, daß die jeweiligen Wahrheitstafeln die vollständigen Definitionen dieser Verknüpfungen darstellen. Die folgenden Beispiele zeigen den Gebrauch der beiden neuen Verknüpfungszeichen.

Name	Symbol	Gelesen als	Wahrheitstafel
Konjunktion	$\wedge$	„und"	Abb. 1
Disjunktion (einschließende)	$\vee$	„oder"	Abb. 3
Negation	$\sim$	„nicht"	Abb. 5
Implikation	$\rightarrow$	„wenn ... dann ..."	Abb. 11b
Äquivalenz	$\leftrightarrow$	„dann und nur[1] dann, wenn ..."	Abb. 12

Beispiele. Die Abb. 13 und 14 zeigen die Wahrheitstafeln zweier Sätze, die nach dem Verfahren des Abschnitts 2 ausgearbeitet wurden. Der Satz in Abb. 13 wird als logisch wahr bezeichnet (siehe Abschnitt 4). Der Satz in Abb. 14 hat dieselbe Wahrheitstafel wie $p \rightarrow q$; man bezeichnet deshalb beide Sätze als äquivalent (siehe Abschnitt 7).

[1] oder „genau dann, wenn ...". [Der Übersetzer]

p	q	p	$\rightarrow$	$(p$	$\vee$	$q)$
W	W	W	W	W	W	W
W	F	W	W	W	W	F
F	W	F	W	F	W	W
F	F	F	W	F	F	F
Schritt Nr.		1	3	1	2	1

Abb. 13

p	q	$\sim$	p	$\leftrightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$\sim$	$q)$
W	W	F	W	W	W	F	F	W
W	F	F	W	F	W	W	W	F
F	W	W	F	W	F	W	F	W
F	F	W	F	W	F	W	W	F
Schritt Nr.		2	1	4	1	3	2	1

Abb. 14

Es ist auch durchaus möglich, Satzverknüpfungen aus drei oder mehr Teilsätzen zu bilden. So stellt das nächste Beispiel eine Verknüpfung der drei Teilsätze p, q und r dar. Man beachte, daß es im ganzen acht mögliche Tripel von Wahrheitswerten für diese drei Sätze gibt, so daß die Wahrheitstafel für unsere Verknüpfung, wie Abb. 15 zeigt, aus acht Zeilen besteht.

p	q	r	$[p$	$\rightarrow$	$(q$	$\vee$	$r)]$	$\wedge$	$\sim$	$[p$	$\leftrightarrow$	$\sim$	$r]$
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	F	F	W
W	W	F	W	W	W	W	F	F	F	W	W	W	F
W	F	W	W	W	F	W	W	W	W	W	F	F	W
W	F	F	W	F	F	F	F	F	F	W	W	W	F
F	W	W	F	W	W	W	W	F	F	F	W	F	W
F	W	F	F	W	W	W	F	W	W	F	F	W	F
F	F	W	F	W	F	W	W	F	F	F	W	F	W
F	F	F	F	W	F	F	F	W	W	F	W	F	F
Schritt Nr.			1	3	1	2	1	5	4	1	3	2	1

Abb. 15

ÜBUNGEN

1. Abb. 11b gibt eine Möglichkeit an, die in Abb. 11a mit Fragezeichen bezeichneten Stellen auszufüllen. Es gibt noch drei andere Möglichkeiten:
   a) Stellen Sie die drei anderen Wahrheitstafeln auf.
   b) Zeigen Sie, daß jede dieser Wahrheitstafeln durch Verknüpfungszeichen dargestellt werden kann, die uns jetzt zur Verfügung stehen.

2. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für $p \vee q$, $q \wedge p$, $q \to p$ und $q \leftrightarrow p$ auf. Vergleichen Sie sie mit denjenigen in den Abb. 3, 1, 11b und 12.

3. Stellen Sie für die folgenden Sätze Wahrheitstafeln auf:
   a) $p \to (q \vee r)$. [Lös.: WWWFWWWW.]
   b) $(p \vee r) \wedge (p \to q)$. [Lös.: WWFFWFWF.]
   c) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$. [Lös.: WWWW.]
   d) $p \wedge \sim p$. [Lös.: FF.]
   e) $(p \to p) \vee (p \to \sim p)$. [Lös.: WW.]
   f) $(p \vee \sim q) \wedge r$. [Lös.: WFWFFFWF.]
   g) $[p \to (q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r)]$. [Lös.: WWWWWWWW.]

4. Schreiben Sie (i) die folgenden Sätze in symbolischer Form, und stellen Sie dazu (ii) die Wahrheitstafeln auf. Verwenden Sie dabei die folgenden Bezeichnungen: p für „Müller ist ein guter Verkäufer", q für „Adam ist ein schlechter Verkäufer" und r für „Müller wird das Geschäft machen":
   a) Wenn Müller ein guter und Adam ein schlechter Verkäufer ist, dann wird Müller das Geschäft machen. [Lös.: WFWWWWWW.]
   b) Müller wird dann und nur dann das Geschäft machen, wenn er ein guter oder wenn Adam ein schlechter Verkäufer ist. [Lös.: WFWFWFFW.]
   c) Wenn Adam ein schlechter Verkäufer ist und Müller das Geschäft nicht macht, dann ist Müller kein guter Verkäufer. [Lös.: dieselbe wie a)]

5. Stellen Sie die Wahrheitstafel für jeden der folgenden Sätze auf und deuten Sie sie mit Hilfe eines Beispiels.

6. Die Wahrheitstafel einer aus zwei Teilsätzen gebildeten Satzverknüpfung besteht aus vier Zeilen, und die Wahrheitstafel einer aus drei Teilsätzen gebildeten Verknüpfung besteht aus acht Zeilen. Wieviele Zeilen hätte die Wahrheitstafel einer aus vier Teilsätzen bestehenden Satzverknüpfung? Wieviele Zeilen bei fünf Teilsätzen? Bei n? Entwerfen Sie ein systematisches Schema für das Aufstellen der Wahrheitstafeln für n Teilsätze.

7. p bedeute „Wir stellen ein billigeres Produkt her", und q bedeute „Der Umsatz geht zurück". Übertragen Sie die folgenden Sätze in symbolische Form:
   a) Wenn wir ein billigeres Produkt herstellen, dann geht der Umsatz zurück.
   b) Wenn der Umsatz zurückgeht, stellen wir ein billigeres Produkt her.
   c) Der Umsatz geht dann und nur dann zurück, wenn wir ein billigeres Produkt herstellen.
   d) Wenn der Umsatz zurückgeht, stellen wir kein billigeres Produkt her.
   e) Es stimmt nicht, daß der Umsatz dann und nur dann zurückgeht, wenn wir kein billigeres Produkt herstellen.

8. Stellen Sie die Wahrheitstafeln der in Übung 7 genannten Sätze auf.
   [Lös.: WFWW, WWFW, WFFW, FWWW, WFFW.]

9. Stellen Sie die Wahrheitstafeln auf für
   a) $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim r \wedge \sim s)$.
   b) $(p \wedge q) \to \sim[\sim p \wedge (r \vee s)]$.

10. Stellen Sie die Wahrheitstafel für $\sim[(\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \vee r)]$ auf.
    [Lös.: WWWWWWFW.]

11. Suchen Sie einen einfacheren Satz, der die gleiche Wahrheitstafel wie in Übung 10 hat.

4. Logische Möglichkeiten

In der Umgangssprache schreiben oder sprechen wir oft den gleichen Satz viele Male und wenden ihn jedesmal auf eine andere Situation an. Um nun zu wissen, ob „Sie eine lange Farbe haben" oder nicht, müssen wir die Karten kennen, die an Sie gegeben wurden. Es ist erforderlich, daß wir versuchen, diese Eigenart der Umgangssprache in die Struktur der elementaren Logik einzubauen. Wir beziehen also jeden Satz auf bestimmte logische Möglichkeiten. Wir wollen uns diese als im voraus festgelegt vorstellen und uns darauf einigen, daß ein Satz erst dann sinnvoll, erst dann eine Aussage wird, wenn seine Möglichkeiten spezifiziert worden sind. Betrachten wir zur gleichen Zeit mehrere Sätze (und dieses wird gewöhnlich der Fall sein, da wir uns in diesem Kapitel mit der Verknüpfung von Sätzen befassen), dann müssen wir gewährleisten, daß jeder dieser Sätze sich auf genau dieselben logischen Möglichkeiten bezieht. Bei der Lösung eines wissenschaftlichen Problems entwerfen wir gewöhnlich zunächst eine Liste der logischen Möglichkeiten, bevor wir die verschiedenen Sätze in bezug auf diese Möglichkeiten betrachten.

Beispiel 1. Lassen Sie uns die logischen Möglichkeiten der folgenden Situation analysieren, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie auftritt. Angenommen, wir hätten zwei Urnen, von denen die erste zwei schwarze und eine weiße Kugel und die zweite eine schwarze und zwei weiße Kugeln enthalte. Alle Kugeln seien verschieden groß. Die Abb. 16 und 17 zeigen zwei verschiedene Methoden, die logischen Möglichkeiten zu untersuchen.

Möglichkeit	Urne	erste Kugel	zweite Kugel
1	1	schwarz	schwarz
2	1	schwarz	weiß
3	1	weiß	schwarz
4	2	schwarz	weiß
5	2	weiß	schwarz
6	2	weiß	weiß

Abb. 16

In Abb. 16 betrachten wir nur die Farben der gezogenen Kugeln. Eine solche Untersuchung mag für viele Zwecke genügen. In Abb. 17 haben wir unsere Analyse dadurch verfeinert, daß wir zwischen den Größen der Kugeln unterscheiden, wenn sie dieselbe Farbe hatten. Für verschiedene Zwecke kann diese genauere Analyse notwendig sein.

Es ist wichtig, sich klarzumachen, daß die Möglichkeiten eines gegebenen Problemes auf vielfältige Weise untersucht werden können. Die Analyse kann von einer sehr groben Gruppierung bis zu einer außerordentlich feinen führen. Immer ist jedoch an eine Analyse logischer Möglichkeiten, die

Möglichkeit	Urne	erste Kugel	zweite Kugel
1′	1	klein, schwarz	groß, schwarz
2′	1	groß, schwarz	klein, schwarz
3′	1	klein, schwarz	weiß
4′	1	groß, schwarz	weiß
5′	1	weiß	klein, schwarz
6′	1	weiß	groß, schwarz
7′	2	schwarz	klein, weiß
8′	2	schwarz	groß, weiß
9′	2	klein, weiß	schwarz
10′	2	groß, weiß	schwarz
11′	2	klein, weiß	groß, weiß
12′	2	groß, weiß	klein, weiß

Abb. 17

hauptsächliche Anforderung zu stellen, daß unter allen denkbaren Umständen eine und nur eine dieser Möglichkeiten gelten darf.

Möglichkeit	Wahrheitswert von „Zwei schwarze Kugeln werden der ersten Urne entnommen“
1	W
2	F
3	F
4	F
5	F
6	F

Abb. 18

Sobald wir die logischen Möglichkeiten erfaßt haben, können wir Sätze bilden, die sich auf sie beziehen. „Zwei schwarze Kugeln werden der ersten Urne entnommen“ ist sowohl für die gewöhnliche, oben dargestellte, als auch für die feinere Analyse sinnvoll. Die Abb. 18 und 19 zeigen die Wahrheitstafeln für die beiden Arten der Analyse. Dagegen ist „Eine kleine weiße Kugel wird nach einer großen weißen Kugel der zweiten Urne entnommen“ nur in bezug auf die feinere Analyse der Möglichkeiten sinnvoll. Diese Aussage ist für den Fall 12′ dieser Analyse wahr und für alle anderen 11 Fälle falsch.

Wenn wir also im Zusammenhang mit einem wissenschaftlichen Problem einen bestimmten Satz untersuchen wollen, müssen wir sicherstellen, daß unsere Analyse der Möglichkeiten fein genug ist, den Wahrheitswert des Satzes für jede der Möglichkeiten zu bestimmen. Es leuchtet ein, daß ein gegebener deutscher Satz, der in bezug auf eine grobe Analyse der Möglichkeiten sinnvoll ist, auch bei jeder feineren Analyse sinnvoll bleibt. Der oben

zuletzt angegebene Satz ist andererseits ein Beispiel für eine Aussage, die sich auf eine verfeinerte Analyse bezieht und die im Rahmen einer gröberen Analyse keinen Sinn besitzt.

Möglichkeit	Wahrheitswert von „Zwei schwarze Kugeln werden der ersten Urne entnommen“
1′	W
2′	W
3′	F
4′	F
5′	F
6′	F
7′	F
8′	F
9′	F
10′	F
11′	F
12′	F

Abb. 19

Obwohl ein Satz normalerweise in manchen Fällen wahr und in anderen falsch ist, gibt es auch Sätze, die für alle möglichen in Frage kommenden Fälle wahr sind. Wir nennen einen solchen Satz *logisch wahr* oder eine *Tautologie*. Seine logische Wahrheit ergibt sich im allgemeinen aus dem Sinn der Wörter und der Form des Satzes in Verbindung mit dem Zusammenhang des Problems, über das die Aussage gemacht worden ist. So ist z. B. der Satz „Meistens werden zwei schwarze Kugeln gezogen“ für beide Folgen von Möglichkeiten in Beispiel 1 logisch wahr. Und in der Tat ist ein Satz, der in bezug auf eine Möglichkeitsanalyse eines gegebenen Problemes logisch wahr ist, auch bezüglich jeder anderen Möglichkeitsanalyse dieses Problems logisch wahr. Entsprechend wird ein Satz der für jede der in Betracht kommenden Möglichkeiten eines Falles falsch ist, *logisch falsch* oder *Kontradiktion* genannt. So ist z. B. der Satz, „Die Summe der Augen ist 13“ immer falsch, wenn man ihn auf alle möglichen Würfe von zwei Würfeln bezieht.

Die (horizontalen) Zeilen einer Wahrheitstafel stellen ein besonders wichtiges Beispiel logischer Möglichkeiten dar. Angenommen, wir hätten drei Teilsätze p, q und r. Für die Wahrheitswerte dieser Sätze gibt es acht Möglichkeiten. Jede aus p, q und r bestehende Satzverknüpfung s kann als eine Aussage in bezug auf diese Möglichkeiten angesehen werden. Ist s z. B. die Satzverknüpfung $p \rightarrow (\sim q \vee r)$, so ist Abb. 20 einfach eine andere Darstellung der Wahrheitstafel für $p \rightarrow (\sim q \vee r)$.

Es besteht jedoch kein Grund anzunehmen, daß stets jede Kombination der Wahrheitswerte für p, q und r auftreten kann. So sei z. B. angenommen,

Möglichkeit	Wahrheitswert von s
WWW	W
WWF	F
WFW	W
WFF	W
FWW	W
FWF	W
FFW	W
FFF	W

Abb. 20

daß wir in der Situation des Beispieles 1 und mit der groben Analyse der Möglichkeiten der Abb. 16 die folgenden drei Sätze p, q und r vorzuliegen haben: „Urne 1 wird gewählt" bedeute p; „Die erste gezogene Kugel ist weiß" bedeute q; „Die zweite gezogene Kugel ist schwarz" bedeute r. Abb. 21 führt dann die Wahrheitswerte von p, q und r für jede der sechs groben Möglichkeiten des Beispieles 1 auf.

Möglichkeit	p	q	r
1	W	F	W
2	W	F	F
3	W	W	W
4	F	F	F
5	F	W	W
6	F	W	F

Abb. 21

Die Wahrheitswertspalten WWF und FFW kommen hier überhaupt nicht vor. Wir müssen daher für diese speziellen Sätze p, q und r die Möglichkeiten WWF und FFW aus Abb. 20 streichen, so daß nur noch die sechs Zeilen der Abb. 22 übrigbleiben. Nun ist die Satzverknüpfung s logisch wahr, da das einzige F in einer Zeile auftritt, die keiner logischen Möglichkeit mehr entspricht.

Möglichkeit	Wahrheitswert von s
WWW	W
WFW	W
WFF	W
FWW	W
FWF	W
FFF	W

Abb. 22

Stellen alle acht Zeilen der Wahrheitstafel logische Möglichkeiten für drei Sätze p, q und r dar, so bezeichnen wir diese drei Sätze als (logisch) *unabhängig*. Diese Eigenschaft von Sätzen werden wir in Abschnitt 8 genauer untersuchen. In Fällen, in denen uns eine genaue Kenntnis der gegenseitigen Abhängigkeit von p, q und r fehlt, ist es bei Durchführung der Wahrheitstafelanalyse einer aus ihnen zusammengesetzten Satzverknüpfung üblich, daß p, q und r *unabhängig* sind. Zeigt sich, daß eine Satzverknüpfung, die z. B. die Sätze p, q und r enthält, für eine bestimmte Wahl der unabhängigen Teilsätze p, q und r logisch wahr ist, dann ist sie allein kraft ihrer Form logisch wahr und bleibt auch für jede andere Wahl der Sätze p, q und r logisch wahr, seien sie unabhängig oder nicht. So ist z. B. die Satzverknüpfung „Wenn ich zwei Asse habe und du eine lange Farbe hast, dann habe ich zwei Asse" logisch wahr, ohne Rücksicht darauf, welche Beziehung zwischen den Teilsätzen „Ich habe zwei Asse" und „Du hast eine lange Farbe" bestehen mag.

Beispiel 2. Lassen Sie uns als ein verwickelteres Beispiel die Klassifikation der Verbraucher eines Produktes nach ihren Einkommen, ihrer Schuldbildung und ihrem Geschlecht betrachten, wie sie in Abb. 23 durchgeführt ist. Ob diese Aufteilung in 24 Fälle oder die Einführung dreier Variabler zweckmäßig ist, hängt von dem Problem ab

Fall	Einkommen	Schulbildung	Geschlecht
1	hoch	Universität	männlich
2	hoch	Universität	weiblich
3	hoch	Höhere Schule	männlich
4	hoch	Höhere Schule	weiblich
5	hoch	Grundschule	männlich
6	hoch	Grundschule	weiblich
7	hoch	keine	männlich
8	hoch	keine	weiblich
9	mittel	Universität	männlich
10	mittel	Universität	weiblich
11	mittel	Höhere Schule	männlich
12	mittel	Höhere Schule	weiblich
13	mittel	Grundschule	männlich
14	mittel	Grundschule	weiblich
15	mittel	keine	männlich
16	mittel	keine	weiblich
17	niedrig	Universität	männlich
18	niedrig	Universität	weiblich
19	niedrig	Höhere Schule	männlich
20	niedrig	Höhere Schule	weiblich
21	niedrig	Grundschule	männlich
22	niedrig	Grundschule	weiblich
23	niedrig	keine	männlich
24	niedrig	keine	weiblich

Abb. 23

Wollen wir z. B. auch Personen mit Universitätsgraden berücksichtigen, so müssen wir mehr Fälle berücksichtigen; glauben wir, daß der Verbrauch des fraglichen Produktes außer vom Einkommen, von der Schulbildung und dem Geschlecht einer Person auch von deren Alter abhängt, werden wir mehr Variable vorsehen müssen.
Die Aussage „Dieser Verbraucher ist ein Mann mit hohem Einkommen" ist in den Fällen 1, 3, 5 und 7 wahr und in allen anderen falsch. „Dieser Verbraucher ist eine Frau, deren Einkommen nicht niedrig ist und die Schulbildung genossen hat" wird in den Fällen 2, 4, 6, 10, 12 und 14 wahr sein. Der Satz „Das Einkommen dieses Verbrauchers ist hoch, mittelmäßig oder niedrig" liefert jedoch keinerlei Information. Er ist in jedem Fall wahr und damit logisch wahr. Entsprechend ist der Satz „Dieser Verbraucher ist ein Mann mit einem kleineren als mittelmäßigen Einkommen, der weder die Universität noch die Höhere oder Grundschule besucht hat, er ist aber kein Mann mit niedrigem Einkommen und keiner Bildung" eine Kontradiktion.
Von allen logischen Möglichkeiten stellt eine und nur eine die Tatsachen so dar, wie sie sind. Für eine gegebene Person gibt einer und nur einer der 24 Fälle eine richtige Beschreibung. Um sagen zu können, welche, benötigen wir Informationen über Tatsachen. Bezeichnen wir einen bestimmten Satz als „wahr", ohne es näher zu kennzeichnen, so meinen wir, daß er in diesem einen Fall wahr ist. Wie wir jedoch schon früher ausgeführt haben, gehört es nicht in den Bereich der Logik, wie sich der wirkliche Sachverhalt verhält. Die Logik kann uns nur sagen, welche die Umstände (logische Möglichkeiten) sind, für die ein Satz wahr ist.

ÜBUNGEN

1. Beweisen Sie, daß die Negation einer logisch wahren Aussage logisch falsch und die Negation einer logisch falschen Aussage logisch wahr ist.

2. Klassifizieren Sie die folgenden Ausdrücke als (i) logisch wahr, (ii) als Kontradiktion oder (iii) als weder das eine noch das andere.
   a) $p \leftrightarrow p$. [Lös.: logisch wahr.]
   b) $p \rightarrow \sim p$.
   c) $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$. [Lös.: keine.]
   d) $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$.
   e) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim (p \rightarrow r)$. [Lös.: Kontradiktion.]
   f) $(p \rightarrow q) \rightarrow p$.
   g) $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$.

3. Abb. 23 zeigt die möglichen Klassifikationen eines Verbrauchers nach Einkommen, Schulbildung und Geschlecht. Wie viele Fälle erhalten wir, wenn wir zwei Verbraucher zusammen klassifizieren? [Lös.: 576]

4. Geben Sie für jeden der 24 Fälle in Abb. 23 an, ob der folgende Satz wahr ist: „Die Person hat keine Schulbildung, und wenn die Person eine Frau ist, dann ist ihr Einkommen niedrig."

5. Geben Sie für Beispiel 1 mit den logischen Möglichkeiten der Abb. 16 die Fälle an, in denen die folgenden Sätze wahr sind:
   a) Urne eins wird ausgewählt.
   b) Es wird mindestens eine weiße Kugel gezogen.
   c) Es wird höchstens eine weiße Kugel gezogen.
   d) Wenn die erste gezogene Kugel weiß ist, dann ist die zweite schwarz.
   e) Zwei Kugeln verschiedener Farbe werden dann und nur dann gezogen, wenn Urne eins gewählt wird.

6. Führen Sie aus Beispiel 2 zwei logisch wahre und zwei logisch falsche Sätze an (nicht die im Text erwähnten).

7. Eine Schule vergibt die Noten a, b, c, d und f. Wie viele logisch mögliche Zeugnisse gibt es für einen Schüler, der in vier Fächern unterrichtet wird? [Lös.: 625.]

8. Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Welche der folgenden Analysen befriedigt das Haupterfordernis logischer Möglichkeiten? Was stimmt bei den anderen nicht? Die Summe der geworfenen Augen ist:
   a) (1) 6, (2) nicht 6.
   b) (1) eine gerade Zahl, (2) weniger als 6, (3) größer als 6.
   c) (1) 2, (2) 3, (3) 4, (4) mehr als 4.
   d) (1) 7 oder 11, (2) 2, 3 oder 12, (3) 4, 5, 6, 8, 9 oder 10.
   e) (1) 2, 4 oder 6, (2) eine ungerade Zahl, (3) 10 oder 12.
   f) (1) weniger als 5 oder mehr als 8, (2) 5 oder 6, (3) 7, (4) 8.
   g) (1) mehr als 5 und weniger als 10, (2) höchstens 4, (3) 7, (4) 11 oder 12.
   [Lös.: a), c), d), f) befriedigen die Bedingungen.]

9. Angenommen, p und q stünden derart in Beziehung, daß sie stets den gleichen Wahrheitswert haben müssen. Überprüfen Sie unter dieser Voraussetzung die Satzverknüpfungen in Übung 2 (c) und 2 (f).

10. p bedeute „Johann verkaufte gestern mehr als 11 Einheiten", q bedeute „Johann verkaufte gestern weniger als 23 Einheiten" und r bedeute, „Johann verkaufte gestern genau 17 Einheiten". Stellen Sie die acht Fälle der Wahrheitstafel zusammen und eliminieren Sie diejenigen Fälle, die nicht möglich sind. Wie viele bleiben übrig?

11. Geben Sie eine verbale Interpretation des Satzes s, dessen Wahrheitstafel in Abb. 22 gezeigt wird. Verifizieren Sie mit Hilfe der Interpretation, daß s logisch wahr ist.

5. Baum-Diagramme

Ein sehr nützliches Werkzeug für die Analyse der logischen Möglichkeiten ist das Zeichnen eines „Baumes". Dieses Hilfsmittel soll an mehreren Beispielen illustriert werden:

Beispiel 1. Betrachten Sie noch einmal das in Abb. 23 gegebene Beispiel. Angenommen, wir gruppierten auf folgende Weise: Wir betrachten alle Verbraucher zunächst als zu einer Klasse gehörig; als nächstes spalten wir diese Klasse in drei Unterklassen, indem wir die Verbraucher mit niedrigem Einkommen in die eine Klasse, die mit mittelmäßigem Einkommen in eine andere Klasse und die mit hohem Einkommen in eine dritte Klasse nehmen. Jede dieser Unterklassen teilen wir nun weiterhin in vier weitere Unterklassen auf (so daß wir insgesamt 12 Unterklassen erhalten), wobei das Kriterium die Schulbindung der Verbraucher sein soll. Jede dieser Unterklassen spalten wir nun noch einmal in zwei Teile, indem wir jeweils die männlichen und die weiblichen Verbraucher zusammenfassen. Wir teilen somit die Gesamtklasse aller Verbraucher in 24 Unterklassen. Abb. 24 zeigt eine graphische Darstellung des soeben beschriebenen Prozesses.

Aus naheliegenden Gründen wollen wir eine Figur, die an einem Punkt beginnt und sich dann verzweigt, als „*Baum*" bezeichnen.

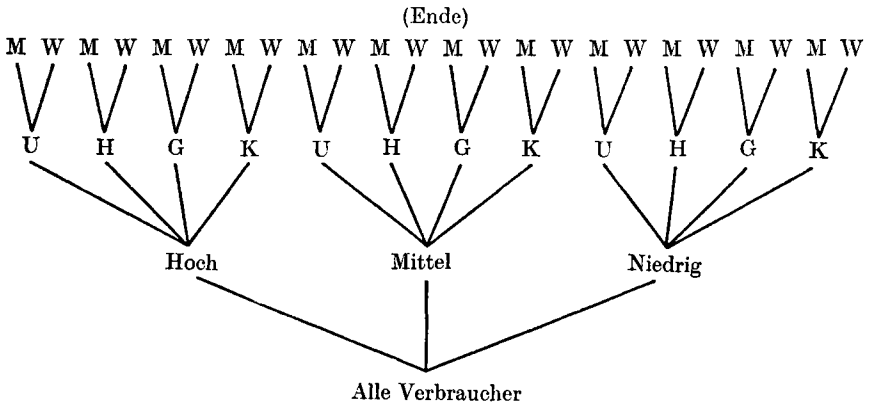


Abb. 24

Beachten Sie, daß der Baum alle Informationen enthält, die für das Problem der Klassifikation erheblich sind. Jeder Weg durch den Baum vom Anfangs- bis zum Endpunkt (vom Boden zum Gipfel) stellt eine logische Möglichkeit dar. Insgesamt gibt es davon 24, und zwar für jeden Endpunkt des Baumes einen, und dementsprechend existieren 24 Fälle in Abb. 23. Die Reihenfolge, in der wir die Klassifikation vornahmen, ist willkürlich, d. h. wir hätten die Verbraucher ebensogut zunächst nach ihrer Schulbildung, dann nach ihrem Geschlecht und schließlich nach ihrem Einkommen gruppieren können. Auch dann bekämen wir 24 logische Möglichkeiten, nur würde sich dann der Baum, den wir erhielten, von dem in Abb. 24 gezeigten unterscheiden (siehe Übung 1).

Beispiel 2. Wir wollen nun das Beispiel aus Abb. 16 betrachten. Es handelt sich hierbei um einen dreistufigen Prozeß: Zunächst wählen wir eine Urne aus, dann entnehmen wir ihr eine Kugel und ziehen dann eine zweite Kugel. Den Baum der logischen Möglichkeiten zeigt Abb. 25. Wir sehen, daß 6 die richtige Anzahl logischer Möglichkeiten ist. Das hat folgenden Grund: Wenn wir die erste Urne wählen (die zwei schwarze Kugeln und eine weiße Kugel enthält) und aus ihr eine schwarze Kugel ziehen, so kann die zweite Kugel sowohl schwarz als auch weiß sein. Ziehen wir jedoch zuerst eine weiße Kugel, dann muß die zweite Kugel notwendigerweise schwarz sein. Wählen wir die zweite Urne, so verhält es sich ähnlich.

Man beachte, daß jeder Punkt gleicher Ebene im Baum der Abb. 24 gleich viele Verzweigungen hat, die von ihm fortführen (z. B. auf der zweiten Ebene vier Verzweigungen pro Punkt), während dies bei dem Baum in Abb. 25 nicht der Fall ist.

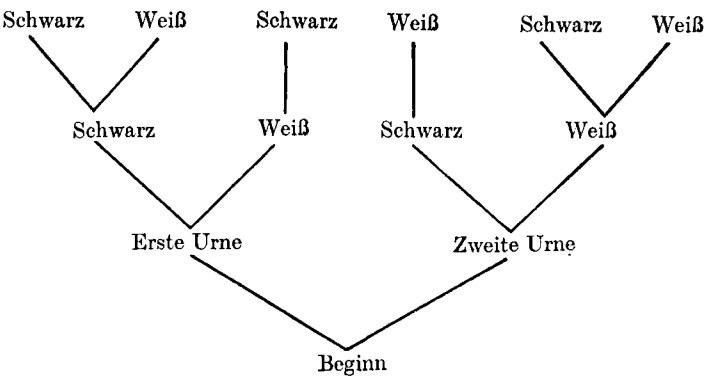


Abb. 25

Beispiel 3. Abschließend wollen wir den Baum logischer Möglichkeiten für die Ergebnisse von Weltmeisterschaftsspielen entwerfen, die zwischen den Mannschaften „D" und „Y" ausgetragen werden. Abb. 26 zeigt diejenige Hälfte des Baumes, die einem Sieg der Mannschaft „D" im ersten Spiel entspricht (die untere gestrichelte Linie führt zur anderen Hälfte des Baumes).

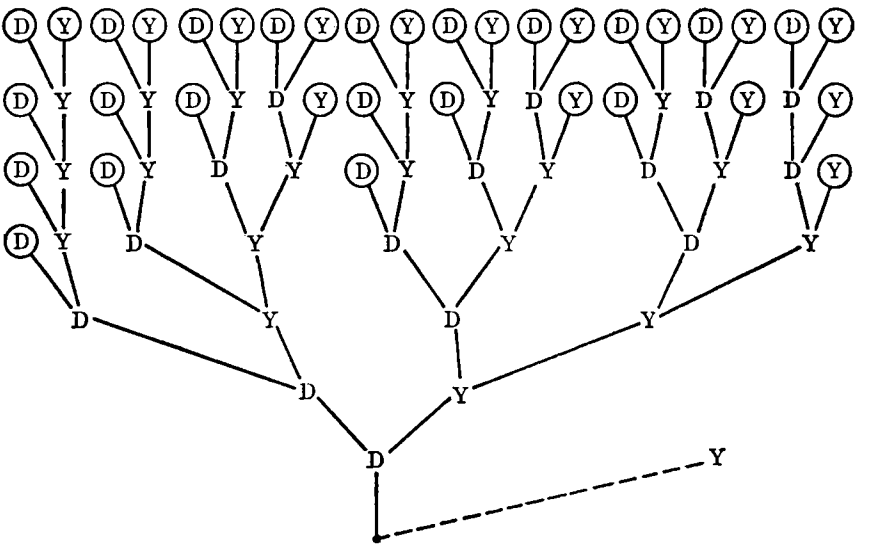


Abb. 26

In der Zeichnung bedeutet ein „D" einen Sieg der Mannschaft D und ein „Y" einen der Mannschaft Y. In der Hälfte des Baumes, die hier gezeigt wird, gibt es 35 mögliche Ergebnisse (entsprechend den Buchstaben, die von Kreisen eingeschlossen sind), d. h. für den Verlauf der Weltmeisterschaftsspiele existieren 70 verschiedene Möglichkeiten.

Das Beispiel unterscheidet sich von den beiden vorher gezeigten darin, daß die Wege des Baumes auf verschiedenen Ebenen enden, da die Weltmeisterschaft dann entschieden ist, wenn eine der Mannschaften vier Spiele gewonnen hat.

Nicht immer brauchen wir eine so detaillierte Analyse, wie sie in obigen Beispielen geboten wurde. Interessierte uns in Beispiel 2 nur die Farbe und die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, aber nicht die Urne, aus der sie stammen, so gäbe es statt der sechs nur vier logische Möglichkeiten. In Abb. 25 hätten dann der zweite und vierte Weg (von links gesehen) dasselbe Ergebnis, nämlich eine schwarze Kugel, gefolgt von einer weißen. In ähnlicher Weise repräsentieren der dritte und der fünfte Weg dasselbe Ergebnis. Interessierte uns schließlich nur die Farbe der gezogenen Kugeln und nicht ihre Reihenfolge, so blieben nur drei logische Möglichkeiten: Zwei schwarze Kugeln, zwei weiße Kugeln oder eine schwarze und eine weiße Kugel.

Eine weniger weitgehende Analyse der Möglichkeiten der Weltmeisterschaftsspiele ist ebensogut möglich. Wir könnten z. B. die Möglichkeiten wie folgt analysieren: Mannschaft D siegt in 4, 5, 6 oder 7 Spielen, bzw. Mannschaft Y siegt in 4, 5, 6 oder 7 Spielen. Die neue Klassifizierung würde die Anzahl der Möglichkeiten von 70 auf 80 reduzieren. Die anderen Möglichkeiten werden nicht eliminiert, sondern lediglich zusammengefaßt. Der Satz „Mannschaft D siegt in vier Spielen" gilt dann nur in einem Fall, während der Satz „Mannschaft D siegt in sieben Spielen" in 20 Fällen zutreffen kann (siehe Abb. 26). Eine noch weniger detaillierte Analyse wäre eine Gruppierung nach der Anzahl der Spiele im Rahmen der Meisterschaften. Hier gäbe es nur vier logische Möglichkeiten.

Der Leser wird bemerken, daß es oft mehrerer Versuche bedarf, um für ein gegebenes Problem die „beste" Art der Darstellung der logischen Möglichkeiten herauszufinden.

ÜBUNGEN

1. Zeichnen Sie den Baum für Beispiel 1, wenn eine Gruppierung in der Reihenfolge Schulbildung, Geschlecht und Einkommen erfolgen soll. Das gleiche soll in der Reihenfolge Geschlecht, Einkommen und Schulbildung geschehen. Gibt es noch andere Möglichkeiten, die Klassifizierung durchzuführen?
2. 1955 verlor die Mannschaft D die ersten beiden Spiele der Weltmeisterschaft, gewann die Meisterschaften aber schließlich doch noch. Wie viele Möglichkeiten für den Verlauf der Weltmeisterschaftsspiele gibt es, so daß die verlierende Mannschaft die ersten zwei Spiele gewinnt? [Lös.: 10.]
3. Wie viele Möglichkeiten für den Verlauf der Weltmeisterschaftsspiele (siehe Abb. 26) gibt es, so daß die Mannschaft D das erste Spiel gewinnt und
   a) keine Mannschaft zweimal hintereinander gewinnt. [Lös.: 1.]
   b) die Mannschaft D mindestens die ungeraden Spiele gewinnt. [Lös.: 5.]
   c) die gewinnende Mannschaft vier Spiele hintereinander gewinnt. [Lös.: 4.]
   d) die verlierende Mannschaft vier Spiele gewinnt. [Lös.: 0.]

4. Jemand erwägt den Kauf dreier verschiedener Aktiengattungen. Der Kurs jeder Aktie kann nach dem Verkauf steigen, fallen oder gleichbleiben. Zeichnen Sie den Baum der logischen Möglichkeiten.

5. Formulieren Sie in bezug auf den in Übung 4 gezeigten Baum einen Satz, der
   a) in zwei Dritteln der Fälle wahr ist.
   b) in allen Fällen außer einem falsch ist.
   c) in allen Fällen außer einem wahr ist.
   d) logisch wahr ist.
   e) logisch falsch ist.

6. Wir wollen ein Experiment ähnlich dem in Abb. 16 durchführen, jedoch soll die erste Urne zwei schwarze und zwei weiße und die zweite Urne eine weiße und vier schwarze Kugeln enthalten. Wir wählen nun eine der Urnen aus und entnehmen ihr drei Kugeln. Zeichnen Sie den Baum der logischen Möglichkeiten, Wie viele Fälle gibt es? [Lös.: 10.]

7. Beantworten Sie mit Hilfe des in Übung 6 gezeichneten Baumes die folgenden Fragen:
   a) In wie vielen Fällen ziehen wir drei schwarze Kugeln?
   b) In wie vielen Fällen ziehen wir zwei schwarze Kugeln und eine weiße Kugel?
   c) In wie vielen Fällen ziehen wir drei weiße Kugeln?
   d) Wie viele Fälle bleiben noch übrig? [Lös.: 3.]

8. Wir beabsichtigen, für den Fall der Übung 6 eine gröbere Gruppierung der logischen Möglichkeiten vorzunehmen. Welche Äste in dem dort gezeichneten Baum werden identisch, wenn:
   a) wir die Reihenfolge vernachlässigen, in der die Kugeln gezogen werden,
   b) wir sowohl die Reihenfolge der Kugeln als auch die Nummer der ausgewählten Urne vernachlässigen,
   c) wir uns dafür interessieren, welche Urne ausgewählt wird und ob die gezogenen Kugeln alle die gleiche Farbe haben.

9. Zeichnen Sie für Übung 7 des letzten Abschnittes einen Baum.

10. Wir wollen drei arithmetische Operationen definieren. Bei der Operation A wird 2 zu einer gegebenen Zahl addiert; die Operation R erhebt die Zahl ins Quadrat, und D bedeutet Division der Zahl durch 2. Zeichnen Sie einen Baum, der die möglichen Reihenfolgen demonstriert, in der die Operationen ausgeführt werden können (jede Operation soll einmal durchgeführt werden). Wie viele Reihenfolgen gibt es? [Lös.: 6.]

11. Benutzen Sie den nach Abb. 10 gezeichneten Baum, um darzustellen, zu welchen Ergebnissen die Anwendung aller drei Operationen auf die Zahl 0 in verschiedenen Reihenfolgen führt.

12. Verwenden Sie den nach Übung 10 gezeichneten Baum, um zu zeigen, was geschieht, wenn die Operationen in verschiedener Reihenfolge auf eine Zahl x angewandt werden. Untersuchen Sie für jeden der sechs Fälle, ob ein x existiert, das nach Durchführung der drei Operationen unverändert geblieben ist.

13. Die Nachfrage nach einem Gegenstand kann an einem bestimmten Tag zwischen 0 und 3 Einheiten schwanken. Zeichnen Sie einen Baum, der die möglichen Nachfragen an jedem zweier auseinanderfolgender Tage aufzeigt.

14. Eine Ware kann dann verkauft werden, wenn sie nachgefragt wird und genügend Lagervorrat vorhanden ist, um die Nachfrage zu befriedigen. Wie hoch sind für

den nach Abb. 13 gezeichneten Baum an jedem der Tage die möglichen Verkäufe, wenn der anfängliche Lagerbestand (a) 4 Einheiten, (b) 6 Einheiten beträgt?

15. Angenommen, der anfängliche Lagerbestand des Gegenstands in Übung 13 betrage zwei Einheiten, jedoch treffe nach dem ersten Tage eine zusätzliche Lieferung von zwei Einheiten aus dem Erzeugungswerk ein. Wie hoch sind nun die möglichen Verkäufe am Ende der beiden Tage?

16. Der Lagerbestand am Ende einer Periode errechnet sich aus dem Lagerbestand zu Beginn der Periode, vermindert um die Verkäufe, die während der Periode vorgenommen wurden, und vermehrt um Neuzugänge, die vor Ende der Periode eintreffen. Geben Sie für Übung 15 den Lagerbestand am Ende des ersten und des zweiten Tages für jede mögliche Nachfragekombination der zwei Tage an.

17. Eine Stichprobenprüfung zur Auswahl einer aus zwei möglichen Handlungsweisen wird oft nach einer „Entscheidungsregel" durchgeführt. Für Abnahmeprüfungen, die vorgenommen werden, um zu entscheiden, ob eine gekaufte Warenpartie vom Käufer akzeptiert werden kann oder nicht, möge z. B. folgende Entscheidungsregel dienen: „Man ziehe aus der Partie eine Stichprobe im Umfang von n Stück und bestimme, wie viele Stücke der Stichprobe gut und wieviel schlecht sind. Ist die Anzahl der schlechten kleiner oder gleich der Größe c, so wird die Partie abgenommen, andernfalls wird sie zurückgewiesen. Eine solche Entscheidungsregel kann einfach durch den Stichprobenumfang n und die Annahmekennzahl c charakterisiert werden. Man bezeichnet sie dann als eine (n, c) Entscheidungsregel".
Zeichnen Sie den Baum für die Entscheidungsregel (7, 4), wobei vorausgesetzt werden soll, daß das erste Stück der Probe gut ist und daß jedes Stück als „gut" oder „schlecht" klassifiziert werden kann. Bezeichnen Sie die Ergebnisse, die zur Annahme der Partie und diejenigen, die zu ihrer Ablehnung führen.

18. Bei dem nach Übung 17 gezeichneten Baum ist es oft möglich, schon vor Ziehung aller sieben Stichprobenelemente zu entscheiden, was mit der Partie geschehen soll. Werden z. B. die ersten vier Stücke als schlecht erkannt, so wird die Annahme der Sendung gemäß der Entscheidungsregel abgelehnt, und die Prüfung kann dementsprechend schon in diesem früheren Stadium abgebrochen werden.
Zeichnen Sie den Baum der Übung 17 noch einmal, wobei Sie die Prüfung jeweils abbrechen, sobald eine Entscheidung über die Partie gefällt werden kann. Vergleichen Sie dieses Diagramm mit Abb. 26.

19. Ein Elektrizitätswerk stellt seinen privaten Abnehmern zweimonatlich die Rechnungen zu. Mahnungen über fällige Beträge erfolgen aufgrund des offenen Saldos, der Dauer des Verzugs, der Kreditfähigkeit des Kunden und seines etwaigen Guthabens. Klassifizieren Sie diese Variablen wie folgt:

Offener Saldo	unter DM 25 DM 25 oder mehr
Verzugsdauer	30 bis 60 Tage über 60 Tage
Kreditfähigkeit	gut mittel schlecht
Guthaben	ja nein

Zeichnen Sie den Baum der logischen Möglichkeiten.

20. Im Beispiel der Übung 19 soll an alle Abnehmer eine Erinnerung geschickt werden, bei denen ein Saldo von weniger als DM 25 offensteht, mit Ausnahme derjenigen (a) geringer Kreditfähigkeit, die kein Guthaben besitzen oder (b) mittelmäßiger Kreditfähigkeit, die kein Guthaben zu verzeichnen haben und länger als 60 Tage im Verzug sind. Die letzteren beiden Ausnahmen sollen scharfe Mahnungen erhalten. Diejenigen, bei denen Salden von mehr als DM 25 offenstehen, sollen gemahnt werden, mit Ausnahme solcher Abnehmer (a), deren Kreditfähigkeit gut ist bzw. derjenigen, die (b) weniger als 60 Tage in Verzug sind und deren Schulden durch Guthaben gedeckt sind. In diesen Ausnahmefällen soll nur erinnert werden. Sind die Kriterien logisch widerspruchsfrei? Wenn ja, geben Sie an, in welchen Fällen logischer Möglichkeiten Mahnungen bzw. Erinnerungen erfolgen.

6. Entscheidungsbäume

Eine wichtige Anwendungsform der Bäume besteht in der logischen Analyse von Entscheidungen. Die Entscheidungen eines Geschäftsmanns bilden oft eine zeitliche Reihe und können daher durch einen Baum besonders gut dargestellt werden.

Beispiel 1. Ein Großhändler vertreibt eine einzige Warenart, deren Anschaffungskosten und Verkaufspreise sich in bekannter Weise saisonal ändern. Abb. 27 zeigt diese Kosten und Preise für die nächsten vier Monate.

Monat	Anschaffungskosten	Verkaufspreis
1	4 DM	9 DM
2	5 DM	6 DM
3	8 DM	3 DM
4	4 DM	7 DM

Abb. 27

Angenommen, der Händler verkaufe in einem beliebigen Monat entweder seinen gesamten Vorrat, fülle sein Lager auf oder entscheide sich dafür, nichts zu tun. Wir wollen diese drei Verhaltensweisen als „Verkauf", „Kauf" und „Abwarten" bezeichnen. Abb. 28 zeigt für die nächsten vier Monate die möglichen Reihenfolgen der Verhaltensweisen, wenn er mit einem vollen Lager beginnt.
Mit Hilfe der Abb. 27 und 28 können wir seinen Nettogewinn während der vier Monate errechnen. So besteht z. B. seine Verhaltensweise nach dem sechsten Ast aus Abwarten-Verkaufen-Abwarten-Kaufen. Er verkauft seine Waren im zweiten Monat zu 6 DM pro Einheit und füllt sein Lager im vierten Monat bei einem Einheitspreis von 4 DM wieder auf. Auf diese Weise erzielt er, wie wir in der obersten Zeile von Abb. 28 zeigen, einen Nettogewinn von 2 DM pro Einheit. Der Stern deutet an, daß er am Ende des vierten Monats ein volles Lager hat.
Ein kurzer Blick auf die Nettogewinne zeigt, daß nur zwei Verhaltenskombinationen als rational angesehen werden können. Von den acht Möglichkeiten, bei denen er am Ende des vierten Monats ein volles Lager hat, stellt sich die Kombination Verkaufen-

Abwarten-Abwarten-Kaufen als die beste heraus, da er mit ihr den größten Nettogewinn (5 DM pro Einheit) erzielt. Unter den acht Wegen, die am Ende der vierten Periode ein leeres Lager ergeben, ist die Kombination Verkaufen-Kaufen-Abwarten-Verkaufen diejenige mit dem maximalen Nettogewinn von 11 DM pro Einheit. Welche dieser alternativen Möglichkeiten er bevorzugt, hängt davon ab, ob er volle Lager am

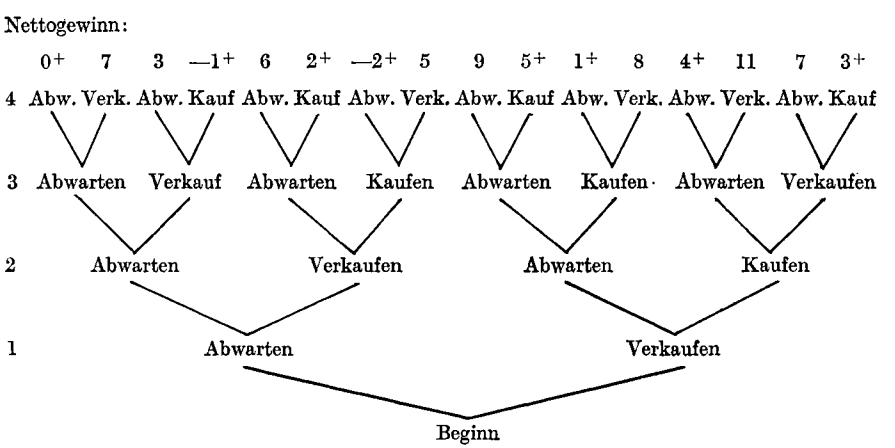


Abb. 28

Ende des vierten Monats einem Gewinnunterschied von 6 DM pro Einheit vorzieht. Aber auch ohne dies zu wissen, kann er bestimmte Entscheidungen fällen, z. B. müßte er jedenfalls im ersten Monat verkaufen und im dritten Monat abwarten. Abb. 27 macht diese Entscheidungen unmittelbar verständlich.

Das erste Beispiel war durch die einfache Tatsache gekennzeichnet, daß alle wesentlichen Tatsachen bekannt sind. Wir bezeichnen dies als *Entscheidung unter Sicherheit.* Die Entscheidung unter Unsicherheit ist zwar interessanter, aber auch schwieriger zu behandeln. In diesem Abschnitt werden wir uns nur mit der logischen Analyse solcher Probleme befassen. Bestimmte Entscheidungsverfahren für konkrete Fälle werden in Kapitel 4 besprochen. Unsicherheit wird dadurch verursacht, daß derjenige, dem eine Entscheidung obliegt, nicht alle erheblichen Tatsachen kennt bzw. unter Kontrolle hat. Wir werden im folgenden die Verfahren, die er beherrscht, als *Verhalten* und die Faktoren, die er nicht kontrollieren kann, als *Ereignisse* bezeichnen. Ein Ereignis kann das Resultat des Verhaltens einer anderen Person oder ein Naturereignis sein. Die Beispiele 2 und 3 sollen diese beiden Möglichkeiten erläutern.

Beispiel 2. Ein Ölsucher muß sich entscheiden, ob er in einem gegebenen Gebiet eine Bohrung abteufen oder seine Bohrrechte verkaufen will. Der Wunsch zu bohren hängt von der Existenz eines Ölvorkommens ab.

Bevor der Ölsucher bohrt, kann er durch seismographische Aufnahmen geologische und geophysikalische Informationen erlangen, aus denen Schlüsse in bezug auf die Existenz einer solchen Erdrindenstruktur gezogen werden können, die gewöhnlich mit einem Ölvorkommen einhergeht. Derartige Informationen lassen jedoch keine sicheren Voraussagen zu: Manchmal wird auch dort Öl gefunden, wo keine entsprechende Erdrindenstruktur festgestellt wurde und umgekehrt. Abb. 29 zeigt den Baum der logisch möglichen Kombinationen von Verhalten und Ereignissen.

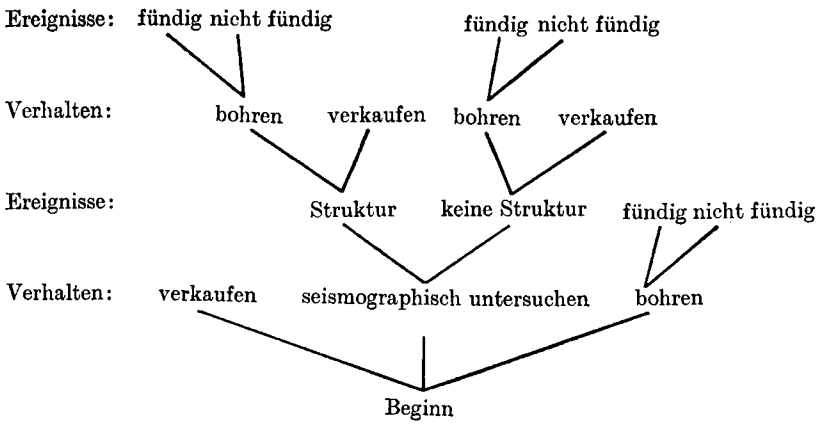


Abb. 29

Der Planer würde in diesem Beispiel zusätzliche Informationen brauchen, um zu einer rationalen Entscheidung zu kommen. Zunächst müßte er wissen, welchen Erlös er bei einem Verkauf erzielen könnte und wieviel das vorhandene Öl erbringen würde. Ferner müßte er die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der verschiedenen Ereignisse kennen. Wie wahrscheinlich ist es z. B., daß eine Ölbohrung, in der keine entsprechende Struktur festgestellt wurde, doch fündig wird?

Beispiel 3. Eine Gesellschaft, die elektronische Bauteile und Ausrüstungen erzeugt, wird von einem Flugzeughersteller beauftragt, ein Spezialbauteil zu entwickeln, das in zwei verschiedenen Baugruppen A und B eines neuen Versuchsflugzeugs verwendet werden kann. Ein Muster des neu entwickelten Bauteiles ist dem Flugzeugfabrikanten zuzusenden. Wird es als annehmbar befunden, soll die Gesellschaft eine der beiden Baugruppen entwickeln. Nach Abschluß der Entwicklung wird sie auf Brauchbarkeit geprüft, und im Falle ihrer Eignung soll die Gesellschaft versuchen, auch die andere Baugruppe zu entwickeln.

Die Gesellschaft hat die Wahl, jeden beliebigen oder alle drei Entwicklungsaufträge abzulehnen, obwohl die Ablehnung, den Grundbauteil zu entwickeln, die Möglichkeit der Entwicklung beider Baugruppen ausschließt. Wird auf einer der drei Stufen ein nicht annehmbares Produkt hergestellt, so wird der Vertrag mit der Gesellschaft automatisch hinfällig. Die Gesellschaft kann die Entwicklung von A oder B in verschiedener Reihenfolge durchführen. Abb. 30 zeigt die Folge der möglichen Ereignis-Verhaltens-Kombinationen.

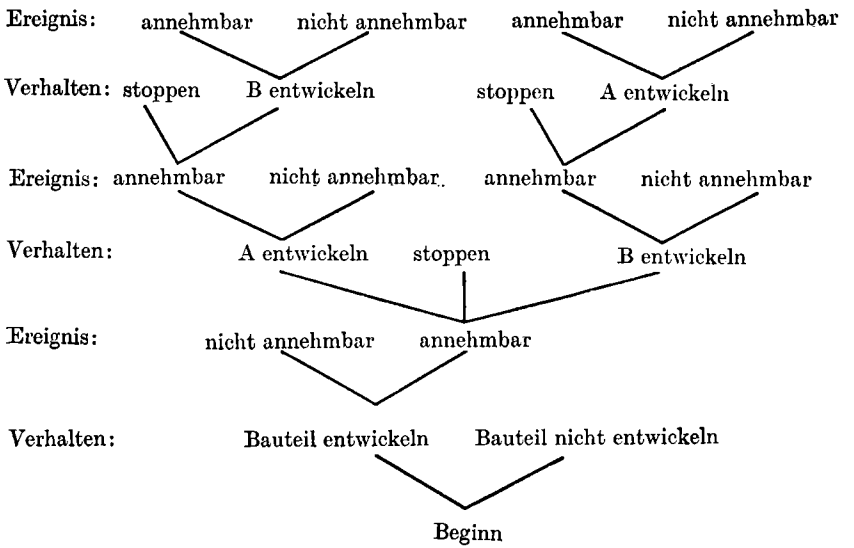


Abb. 30

ÜBUNGEN

1. Bezeichnen Sie die möglichen und erheblichen Verhaltensweisen und Ereignisse der folgenden Situationen:
   a) Ein Geschäftsmann kann Aktien oder Schuldverschreibungen kaufen. Ist die Geschäftslage gut, kann er mit Aktien mehr verdienen, schwächt die Konjunktur sich jedoch ab, so wird er mit Schuldverschreibungen besser fahren.
   b) Der Eigentümer eines Warenhauses kann dieses gegen Feuer versichern.
   c) Ein Fabrikant erhält von einem seiner Lieferanten eine Partie von 1000 Stück eines bestimmten Teiles, von denen eine unbekannte Anzahl unbrauchbar ist. Er kann die Partie annehmen oder ablehnen.
   d) Drei Bewerber werden gebeten sich vorzustellen, aber nur einer wird die offene Stelle erhalten.
   e) Der Fabrikant eines neuen Produktes muß einen Preis festsetzen, obwohl er nicht weiß, wie der Preis die Nachfrage beeinflussen wird.
   f) Ein Fabrikant kann ein Maschinenwerkzeug, das er gegenwärtig in seiner Fabrik verwendet, durch ein neueres Modell ersetzen. Innerhalb der nächsten zwei Jahre kann jedoch ein vollkommen neues und verbessertes Modell entwickelt und auf den Markt gebracht werden.
   g) Eine Gesellschaft kann ihr Produkt in einem ausländischen Staat anbieten, aber der Erfolg des Unternehmens hängt davon ab, ob und wie lange die gegenwärtige Regierung dieses Staates am Ruder bleibt.
2. Angenommen, der Großhändler aus Beispiel 1 könne bei einem schnellen Umschlag einen Stückgewinn von 3 DM erzielen, wenn sein Lager in der vierten Periode stilliegt. Errechnen Sie die Gewinne bei verschiedenem Verhalten und bestimmen Sie die besten Folgen.
3. Zeichnen Sie einen Baum für die Situation des Beispiels 1, wenn der Großhändler mit den Waren A und B handeln kann. Hierbei seien die Ein- und Verkaufspreise

für A durch Abb. 27 und die Ein- und Verkaufspreise für B durch die folgende Tabelle gegeben:

Monat	Einkaufspreis	Verkaufspreis
1	15 DM	13 DM
2	15 DM	12 DM
3	13 DM	11 DM
4	14 DM	19 DM

In dem Lager kann er die gleiche Anzahl Einheiten entweder der Ware A oder der Ware B lagern. Bei Beginn (Monat 0) ist das Lager mit A gefüllt. Warum ist es sinnlos, A und B gleichzeitig zu lagern?

4. Entwickeln Sie alle Verhaltensfolgen aus Übung 3 in bezug auf ihre Gewinnauswirkungen für den Großhändler. Klassifizieren Sie die Gewinnwirkungen der einzelnen Folgen nach dem Lagerbestand im Monat 4. Welche möglichen, rationalen Entscheidungen gibt es?

[Teillös.: Verkauf A im ersten Monat, Abwarten im zweiten.]

5. Welche zusätzliche Information braucht man in Beispiel 3 für eine rationale Entscheidung? Erörtern Sie, in welcher Weise die Information für die Entscheidung verwendet würde.

6. Jemand habe die Möglichkeit, eine von zwei Aktien zu erwerben oder auf einen Kauf zu verzichten. Die Aktienkurse können während des nächsten Monats steigen oder fallen. Zeichnen Sie den Baum der möglichen Entscheidungen. Welche Entscheidung scheint die günstigste zu sein, wenn der Kurs der ersten Aktie mit gleicher Wahrscheinlichkeit um 20% steigen oder um 30% fallen wird, während der Kurs der zweiten Aktie mit geringer Wahrscheinlichkeit um 100% steigen und andernfalls um 10% fallen wird?

7. Ein Personaldirektor muß Bewerber für eine bestimmte Stelle überprüfen. Alle Bewerber haben bereits ein Bewerbungsformular ausgefüllt, aufgrund dessen sie sofort angenommen oder abgelehnt werden können. Der Personaldirektor kann jedoch nach Gutdünken die einzelnen Bewerber zu einer Unterredung oder einer Eignungsprüfung oder für beides vorladen. Kommt beides in Frage, können die Prüfungen in irgendeiner Reihenfolge erfolgen. Zeichnen Sie einen Baum, der die möglichen Verhaltensfolgen zeigt.

8. Eine Kaffeerösterei muß ihre Einkäufe grüner Kaffeebohnen für Röstzwecke 90 Tage im voraus planen. Da sie über keinen überflüssigen Lagerraum verfügt, muß sie sich entscheiden, die Bohnen entweder heute in 90 Tagen zu kaufen oder heute ein Termingeschäft mit Lieferung nach 90 Tagen abzuschließen. Bevor sie sich für eine dieser Möglichkeiten entscheidet, kann sie von der volkswirtschaftlichen Abteilung eine Prognose über die voraussichtliche Preisentwicklung von Kaffee innerhalb der nächsten drei Monate anfordern. Diese Prognose kann in zweierlei Weise gestellt werden: „Der Preis wird steigen" und „Der Preis wird sinken oder gleichbleiben". Die Voraussage kann natürlich falsch sein. Zeichnen Sie einen Baum, der die möglichen Kombinationen von Verhalten und Ereignissen zeigt.

9. Die Maschinisten eines Betriebes müssen ihre Werkzeuge von einer Werkzeugausgabe abholen, die von Angestellten verwaltet wird. Sind alle Angestellten beschäftigt, dann muß sich der Maschinist, der Werkzeuge braucht, der Schlange anschließen, die vor der Werkzeugausgabe wartet. Die Werkzeugausgabe wird durch

zwei Angestellte verwaltet, die beschäftigt oder unbeschäftigt sein können. Zeichnen Sie den Baum logischer Möglichkeiten für den Fall, daß vier Maschinisten in einem Zeitpunkt eintreffen, in dem keine Warteschlange vorhanden ist.

7. Logische Beziehungen

Bis jetzt haben wir Sätze isoliert betrachtet. Manchmal interessieren uns jedoch die Beziehungen zwischen Satzpaaren. Am interessantesten ist eine Beziehung derart, daß ein Satz den anderen (logisch) *impliziert*. Wenn der Satz p den Satz q impliziert, sagen wir auch, daß q aus p folge oder daß q (logisch) aus p ableitbar sei. So impliziert z. B. in jedem mathematischen Lehrsatz die Voraussetzung den Schluß.

Sind alle logischen Möglichkeiten für ein Satzpaar p und q erfaßt, kann die (logische) Implikation wie folgt charakterisiert werden: p impliziert q, wenn q stets dann wahr ist, wenn p wahr ist, d. h. wenn q in allen logisch möglichen Fällen wahr ist, in denen p wahr ist.

Für Satzverknüpfungen, die aus den gleichen Teilsätzen bestehen, bilden Wahrheitstafeln ein bequemes Hilfsmittel zur Prüfung dieser Beziehung. Wir illustrieren diese Methode in Abb. 31.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$p \vee q$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	F	W	W
F	F	W	W	F

Abb. 31

Als Voraussetzung sei $p \leftrightarrow q$ gewählt. Da sie nur im ersten und vierten Fall wahr ist, in diesen beiden Fällen jedoch auch $p \rightarrow q$, kann man sagen, daß der Satz $p \leftrightarrow q$ den Satz $p \rightarrow q$ (logisch) impliziert. Demgegenüber ist der Satz $p \vee q$ im vierten Fall falsch, und $p \leftrightarrow q$ impliziert ihn daher nicht (logisch). Weiter zeigt ein Vergleich der letzten zwei Spalten der Abb. 31, daß der Satz $p \rightarrow q$ weder den Satz $p \vee q$ (logisch) impliziert noch von ihm (logisch) impliziert wird.

Die Beziehung der (logischen) Implikation hat eine größere Ähnlichkeit zur Implikation, und es ist daher wichtig, diese beiden nicht zu verwechseln[1].

[1] Die Verfasser folgen künftig der Bezeichnungsweise von R. Carnap, die dieser in seinem Buch „Einführung in die symbolische Logik" (Wien 1954) verwendet. Auch er unterscheidet die Implikation im Sinne der Satzverknüpfung $p \rightarrow q$ von der logischen Implikation, wie sie oben dargestellt wird. Die logische Implikation bezeichnet er abgekürzt als L-Implikation. (Der Übersetzer.)

Die Implikation ist ein neuer *Satz*, der aus zwei gegebenen Sätzen gebildet wird, während die L-Implikation eine Beziehung zwischen zwei Sätzen ist. Das Bindeglied ist folgendes: p L-*impliziert* q dann und nur dann, wenn die Implikation $p \rightarrow q$ *logisch wahr ist.*

Der Beweis hierfür ist einfach zu erbringen: Der Satz p L-impliziert den Satz q, wenn q stets in den Fällen wahr ist, in denen p wahr ist. Das bedeutet, daß kein Fall existiert, in dem p wahr und q falsch ist, d. h. kein Fall, in dem $p \rightarrow q$ falsch ist. Das bedeutet jedoch wiederum, daß $p \rightarrow q$ logisch wahr ist. In Übung 1 wird dieses Ergebnis auf die Abb. 31 angewandt werden.

Wir wollen nun auf die „Paradoxien" der Implikation eingehen. Implikative Sätze klingen dann paradox, wenn ihre Bestandteile zueinander in keiner Beziehung stehen. So klingt es z. B. merkwürdig, wenn man sagt, der Satz „Wenn schönes Wetter ist, dann besteht Kreide aus Holz", sei an einem regnerischen Tag wahr. Man darf jedoch nicht vergessen, daß die Implikation, die wir gerade zitierten, nicht mehr und nicht weniger bedeutet, als daß einer der folgenden Sätze stimmt: (1) „Es ist schönes Wetter, und Kreide besteht aus Holz" oder (2) „Es ist kein schönes Wetter, und Kreide besteht aus Holz" oder (3) „Es ist kein schönes Wetter, und Kreide besteht nicht aus Holz" [siehe Abb. 11b]. Bei schlechtem Wetter wäre dann Satz 3 richtig.

Keinesfalls ist es aber wahr, daß der Satz „Es ist schönes Wetter" den Satz „Kreide besteht aus Holz" L-impliziert. Es ist logisch möglich, daß der erstere wahr und der letztere falsch ist (und so verhält es sich tatsächlich an einem schönen Tag und bei den üblichen Herstellungsmethoden von Kreide). Es liegt daher keine L-Implikation vor. Die oben angeführte Implikation ist also an bestimmten Tagen wahr, aber nicht logisch wahr (L-wahr; d. Verf.).

In der Umgangssprache wird der Satz „wenn ..., dann ..." gewöhnlich aus logischen Gründen behauptet. Daher klingt eine solche Behauptung ungewöhnlich, wenn sie zufällig wahr, jedoch nicht logisch wahr ist. Ähnliches gilt für den gewöhnlichen Gebrauch von „dann und nur dann, wenn".

Wenn die Äquivalenz $p \leftrightarrow q$ nicht nur wahr, sondern auch logisch wahr ist, entsteht dadurch eine Beziehung zwischen p und q. Da $p \leftrightarrow q$ in jedem logisch möglichen Fall wahr ist, haben die Sätze p und q in jedem Fall den gleichen Wahrheitswert. Wir bezeichnen unter diesen Umständen p und q als (logisch) *äquivalent* (L-äquivalent). Die Prüfung, ob Satzverknüpfungen aus gleichen Elementarsätzen äquivalent sind, kann auf einfache Weise mit Hilfe von Wahrheitstafeln vorgenommen werden. Es ist dabei lediglich festzustellen, ob die Komponenten die gleiche Wahrheitstafel haben. So zeigt z. B. Abb. 32, daß $p \rightarrow q$ und $\sim p \vee q$ äquivalent sind.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
W	W	W	W
W	F	F	F
F	W	W	W
F	F	W	W

Abb. 32

Ein Satzpaar p und q wird als *inkonsistent* bezeichnet, wenn bekannt ist, daß einer der Sätze falsch sein muß, wenn der andere wahr ist. Mit anderen Worten sind p und q inkonsistent, wenn sie unmöglich beide gleichzeitig wahr sein können. Man kann dieses Konzept auch auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Sätzen ausdehnen: Die Sätze $p_1, p_2 \ldots, p_n$ sind inkonsistent, wenn es unmöglich ist, daß sie alle wahr sind. Insbesondere ist ein einziger Satz (n = 1) dann inkonsistent, wenn er sich selbst widerspricht.
Für den Fall, daß die Satzverknüpfungen aus denselben Elementarsätzen bestehen, gibt es eine einfache Methode, die Konsistenz der Sätze zu prüfen: Wir stellen zu diesem Zweck für jeden Satz eine Wahrheitstafel auf und untersuchen diese nacheinander. Stoßen wir dabei auf einen Fall, in dem alle Sätze wahr sind (eine Zeile, die nur aus W's besteht), dann sind die Sätze konsistent, andernfalls inkonsistent. Diese Methode ist in Abb. 31 dargestellt: Untersuchen wir die drei Wahrheitstafeln, so finden wir, daß die erste Zeile nur aus W's besteht; $p \leftrightarrow q$, $p \rightarrow q$ und $p \vee q$ sind daher konsistent. Fügen wir jedoch irgendeinen anderen Satz hinzu, der im ersten Falle falsch ist, wie z. B. $\sim p$, dann sind die vier Sätze, die sich ergeben, inkonsistent.

ÜBUNGEN

1. Zeigen Sie, daß zwar $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ L-wahr ist, jedoch nicht $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$.
2. Beweisen Sie, daß p und q L-äquivalent sind, wenn p q L-impliziert und ebenso q p.
3. Stellen Sie Wahrheitstafeln für die folgenden Satzverknüpfungen auf und untersuchen Sie sie auf L-Implikation und L-Äquivalenzen hin.
   a) $p \wedge q$.
   b) $p \rightarrow \sim q$.
   c) $\sim p \vee \sim q$.
   d) $\sim p \vee q$.
   e) $p \wedge \sim q$. [Lös.: b) L-äquiv. c); a) L-impl. d); e) L-impl. b), c).]
4. Stellen Sie für die folgenden Verknüpfungen Wahrheitstafeln aus und ordnen Sie sie so an, daß jede der Verknüpfungen sämtliche folgenden L-impliziert.
   a) $\sim p \leftrightarrow q$.
   b) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$.
   c) $\sim [p \rightarrow (q \rightarrow p)]$.
   d) $p \vee q$.
   e) $\sim p \wedge q$. [Lös.: c), e), a), d), b).]

5. Wie viele der folgenden Behauptungen sind höchstens miteinander vereinbar?
   a) Die Qualität des Produktes Z ist gut.
   b) Produkt Z ist zu teuer.
   c) Produkt Z ist nicht zu teuer, aber es ist von schlechter Qualität.
   d) Wenn die Qualität des Produktes Z gut ist, dann ist es zu teuer.
   e) Die Qualität des Produktes Z ist dann und nur dann gut, wenn es nicht zu teuer ist.
   f) Entweder ist das Produkt Z von guter Qualität, oder es ist nicht zu teuer; beides gleichzeitig gilt nicht. [Lös.: 4.]
6. Zeigen Sie, daß die fünf Sätze in Übung 3 nicht miteinander vereinbar sind. Sind irgendwelche vier dieser fünf Sätze konsistent?
7. Es seien neun Satzverknüpfungen gegeben, die nur die Buchstaben p und q enthalten. Beweisen Sie, daß mindestens ein L-äquivalentes Paar vorhanden sein muß, wenn sie miteinander vereinbar sein sollen.
8. Beweisen Sie für den Fall, daß p L-wahr ist:
   a) $p \vee q$ ist L-wahr;
   b) $\sim p \wedge q$ ist L-falsch;
   c) $p \wedge q$ ist L-äquivalent mit q;
   d) $\sim p \vee q$ ist L-äquivalent mit $\sim q$.
9. Was ist der Wahrheitswert von $(p \vee \sim q) \wedge \sim r$, wenn p und q L-wahr sind und r L-falsch ist? [Lös.: L-wahr.]
10. Beweisen Sie, daß Konjunktion oder Disjunktion eines Satzes mit sich selbst dem Satz L-äquivalent sind.
11. Beweisen Sie, daß die doppelte Negation eines Satzes dem Satz L-äquivalent ist.
12. Beweisen Sie, daß ein Satz, der seine eigene Negation L-impliziert, ein Widerspruch in sich selbst ist.
13. Was ist der Wahrheitswert eines Satzes, der seiner eigenen Negation L-äquivalent ist?
14. Welche Beziehung besteht zwischen zwei L-wahren Sätzen? Welche zwischen zwei Sätzen, die sich selbst widersprechen?
15. Beweisen Sie, daß ein L-wahrer Satz von jedem Satz L-impliziert wird und daß ein Satz, der sich selbst widerspricht, jeden Satz L-impliziert.

8*. Eine systematische Analyse logischer Beziehungen

Die L-Implikation ist dadurch charakterisiert, daß der Vordersatz (die Hypothese) unmöglich falsch sein kann, wenn gleichzeitig der Nachsatz (die Konklusion) falsch ist. Sind zwei Sätze L-äquivalent, so kann unmöglich einer davon wahr und der andere falsch sein. Wir sehen also, daß für eine L-Implikation ein Fall der Wahrheitstafel nicht vorkommen kann und daß für eine L-Äquivalenz zwei der vier Fälle der Wahrheitstafel nicht möglich sind. Das Fehlen eines oder mehrerer Fälle der Wahrheitstafeln ist daher für

logische Beziehungen charakteristisch. Wir wollen in diesem Abschnitt alle denkbaren Beziehungen untersuchen, die zwischen zwei Sätzen bestehen können.

Wir wollen zwei Sätze dann *unabhängig* nennen, wenn jeder der vier Fälle der Wahrheitstafel (siehe Abb. 33) vorkommen kann. Die beiden Sätze sind dagegen *abhängig*, wenn einer oder mehrere der vier Fälle der Abb. 33 nicht möglich sind (siehe Abschnitt 4). Wenn p und q solche Sätze sind, daß genau einer der in Abb. 33 gezeigten Fälle ausgeschlossen wird, dann besteht zwischen ihnen eine *einfache Beziehung*. Offensichtlich gibt es folgende vier mögliche einfache Beziehungen: a) Wird Fall 1 ausgeschlossen, können die Sätze nicht beide wahr sein. In diesem Fall sind p und q *unvereinbar* (siehe Abschnitt 7). Die traditionelle Logik bezeichnet sie als *kontradiktorisches* Satzpaar. b) Wird Fall 2 ausgeschlossen, dann (siehe Abschnitt 7) L-impliziert p q. c) Wird Fall 3 ausgeschlossen, dann ist es falsch, daß q wahr und p falsch sind, d. h. q L-impliziert p. d) Wird Fall 4 ausgeschlossen, können nicht beide Sätze falsch sein, d. h. einer von ihnen muß wahr sein. Wir bezeichnen dieses Satzpaar dann als *subkonträr*.

p	q	Fall No.
W	W	1
W	F	2
F	W	3
F	F	4

Abb. 33

Werden durch die Art der Beziehung zwischen p und q genau zwei Fälle der Abb. 33 ausgeschlossen, so sprechen wir von einer *zweifachen* Beziehung zwischen beiden Sätzen. Es gibt sechs Möglichkeiten, aus vier Fällen zwei auszuwählen, aber einige von ihnen ergeben nur uninteressante Beziehungen. Man nehme z. B. an, die Fälle 1 und 2 würden ausgeschlossen. Dann kann p nicht wahr sein, d. h. es ist logisch falsch (L-falsch). Ähnlich verhält es sich, wenn die Fälle 1 und 3 ausgeschlossen werden; dann ist q L-falsch. Schließen wir andererseits die Fälle 3 und 4 aus, so ist p L-wahr; und schließen wir 2 und 4 aus, so ist q L-wahr. Man sieht also, daß diese Wahlmöglichkeiten keine neuen Beziehungen ergeben; sie deuten lediglich an, daß einer der beiden Sätze L-wahr oder L-falsch ist. Es bleiben uns nun nur noch zwei Alternativen: A) Die Fälle 2 und 3 werden ausgeschlossen; das bedeutet, daß die beiden Sätze L-äquivalent sind; B) wir schließen die Fälle 1 und 4 aus; dann können die beiden Sätze weder beide wahr noch beide falsch sein. Mit anderen Worten, einer davon muß wahr und der andere falsch sein. Wir bezeichnen dann p und q als ein *kontradiktorisches* Satzpaar.

Es ist leicht einzusehen, daß es keine dreifachen Beziehungen geben kann, denn wenn man drei Fälle der Abb. 33 ausschließt, bleibt nur eine Möglichkeit für jeden der beiden Sätze übrig, so daß jeder entweder logisch wahr oder logisch falsch sein muß.

Wir haben bereits die Beziehung von L-Implikation und L-Äquivalenz zu Implikation bzw. Äquivalenz herausgearbeitet. Wir können dasselbe auch für die drei verbleibenden Beziehungen tun: Wenn p und q subkonträre

Sätze sind, können sie nicht beide falsch sein. Da dies der einzige Fall wäre, in dem ihre Disjunktion falsch ist, bedeutet dies, daß p und q dann und nur dann subkonträre Sätze sind, wenn $p \vee q$ L-wahr ist. Sind p und q unvereinbar, können sie nicht beide wahr sein. Da das nur dann der Fall wäre, wenn ihre Konjunktion wahr ist, kann man sagen, daß p und q dann und nur dann unvereinbar sind, wenn $p \wedge q$ L-falsch ist. Sind schließlich p und q kontradiktorische Sätze, dann sind die Fälle 1 und 4 der Abb. 33 ausgeschlossen. $p \leftrightarrow q$ ist daher L-falsch. (Man beachte auch, daß dann, wenn p und q kontradiktorische Sätze sind, $p \underline{\vee} q$ L-wahr ist.) Die Tabelle in Abb. 34 gibt eine Zusammenfassung der wesentlichen Tatsachen über die sechs Beziehungen, die wir abgeleitet haben.

Ausgeschlossene Fälle	Beziehung	Alternative Definition
W-W	unvereinbar	$p \wedge q$ L-falsch
F-F	subkonträr	$p \vee q$ L-wahr
W-F	das 1. bedingt das 2.	$p \rightarrow q$ L-wahr
F-W	das 2. bedingt das 1.	$q \rightarrow p$ L-wahr
W-F und F-W	L-äquivalent	$p \leftrightarrow q$ L-wahr
W-W und F-F	kontradiktorisch	$p \leftrightarrow q$ L-falsch

Abb. 34

Während subkonträre Sätze theoretisch nicht sehr interessant sind, ist dies bei unvereinbaren und kontradiktorischen Aussagen durchaus der Fall. Jede dieser Beziehungen kann so verallgemeinert werden, daß sie für mehr als zwei Sätze gilt. Den Begriff der Unvereinbarkeit für n Sätze haben wir bereits definiert: Sie können nicht alle gleichzeitig wahr sein, d. h. ihre Konjunktion muß falsch sein. Haben wir auf der anderen Seite n verschiedene Sätze, von denen einer und nur einer wahr sein kann, so bilden sie ein *vollständiges System von Alternativen*. Ist $n = 1$, handelt es sich um einen einzigen logisch wahren Satz, und ist $n = 2$, so liegt ein kontradiktorisches Satzpaar vor.

Auch hier bilden Wahrheitstafeln ein Hilfsmittel, um die zwischen verschiedenen Sätzen vorliegenden Beziehungen zu erkennen. Die folgenden Beispiele zeigen, wie man diese Methode anwendet:

Beispiele. Betrachten Sie die fünf, in Abb. 35 dargestellten Satzverknüpfungen, die sämtlich aus denselben Komponenten bestehen. Bestimmen Sie alle Beziehungen, die zwischen Paaren dieser Sätze bestehen.

Zunächst stellen wir fest, daß die Sätze 3 und 5 identische Wahrheitstafeln besitzen. Sie sind daher L-äquivalent. Wir brauchen deshalb nur eine von ihnen zu untersuchen, sagen wir Satz 3. Die Wahrheitstafeln der Sätze 1 und 2 sind genau entgegengesetzt; die Sätze sind daher kontradiktorisch. Beim Vergleich der Sätze 1 und 3 finden wir keinen Fall W-F, so daß Satz 1 den Satz 3 L-impliziert. Da die Sätze 1 und 4 nie gleichzeitig wahr sind, sind sie miteinander unvereinbar, während die Sätze 2 und 3 nie beide

gleichzeitig falsch sind, so daß sie subkonträr sind. Schließlich finden wir bei dem Vergleich von 2 oder 3 mit 4 keinen W-F-Fall, und daher werden beide durch 4 L-impliziert. Auf diese Weise gibt Abb. 35 für alle oben gefundenen Beziehungen ein Beispiel an. Man beachte ferner, daß die Sätze p und q ein Beispiel für ein Paar unabhängiger Aussagen darstellen (siehe Abschnitt 4).

p	q	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim p$	$p \rightarrow q$
W	W	W	F	W	F	W
W	F	F	W	F	F	F
F	W	F	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W
Aussage Nr.		1	2	3	4	5

Abb. 35

ÜBUNGEN

1. Stellen Sie die Wahrheitstafeln für die folgenden vier Sätze auf, und geben Sie an, welche Beziehung (wenn eine existiert) zwischen den sechs möglichen Satzpaaren besteht.
   a) $\sim p$.
   b) $\sim q$.
   c) $p \wedge \sim q$.
   d) $\sim(\sim p \vee q)$.

   [Lös.: a) und b) unabhängig; a), c) und d) unvereinbar; c) und d) L-implizieren b); c) L-äquivalent d).]

2. Entwerfen Sie Wahrheitstafeln für jeden der folgenden sechs Sätze. Bilden Sie ein Beispiel eines unabhängigen Satzpaares und je ein Beispiel der zwischen diesen Sätzen möglichen sechs Beziehungen.
   a) $p \leftrightarrow q$.
   b) $p \rightarrow q$.
   c) $\sim p \wedge \sim q$.
   d) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.
   e) $\sim q$.
   f) $p \wedge \sim q$.

3. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:
   a) Die Disjunktion zweier kontradiktorischer Sätze ist L-wahr.
   b) Zwei Sätze sind dann und nur dann L-äquivalent, wenn jeder von ihnen den anderen L-impliziert.
   c) Die Negationen zweier unvereinbarer Sätze sind subkonträr.

4. Welche Beziehung besteht zwischen den folgenden Satzpaaren?
   a) $p \rightarrow [p \wedge \sim(q \vee r)]$.
   b) $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$.

   [Lös.: L-äquivalent.]

5. Angenommen jeweils zwei der Sätze p, q und r seien unabhängig. Ferner sei angenommen, daß es nur vier mögliche Wahrheitstafelfälle für die drei Sätze gebe. Beweisen Sie, daß r entweder $p \leftrightarrow q$ oder $p \underline{\vee} q$ L-äquivalent ist.

6. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:
   a) Die Negationen zweier L-äquivalenter Sätze sind L-äquivalent.
   b) In einem vollständigen System von Alternativen sind jeweils zwei Sätze unvereinbar.
   c) Wenn p und q subkonträr sind und wenn jedes von ihnen r L-impliziert, dann ist r L-wahr.
7. Bilden Sie aus den folgenden Sätzen ein vollständiges System von (vier) Alternativen:
   a) Es regnet, aber der Wind weht nicht.
   b) Es regnet dann und nur dann, wenn der Wind weht.
   c) Es stimmt nicht, daß es regnet und daß der Wind weht.
   d) Es regnet, und der Wind weht.
   e) Es regnet weder, noch weht der Wind.
   f) Es ist nicht der Fall, daß es regnet oder daß der Wind nicht weht.

   [Lös.: a), d), e), f).]
8. Welche Beziehung besteht zwischen $[p \vee \sim(q \vee r) \vee (p \wedge s)]$ und $\sim(p \wedge q \wedge r \wedge s)$?

   [Lös.: subkonträre Sätze.]
9. Nehmen Sie an, daß p und q unvereinbar seien. Welche Beziehung besteht dann zwischen
   a) p und $\sim q$.
   b) $\sim p$ und q.
   c) $\sim p$ und $\sim q$.
   d) p und $\sim p$.
10. p, q und r seien drei Sätze, von denen jeweils zwei voneinander unabhängig sind. Diskutieren Sie die zwischen diesen drei Sätzen möglichen Beziehungen. [Hinweis: Wenn wir die Reihenfolge der Sätze ignorieren, dann gibt es 16 solcher Beziehungen. Sie sind meist vierfach. Es gibt zwei vierfache Beziehungen, aus denen 12 andere durch die Ausschließung wenigerer Fälle gewonnen werden können. Weiterhin bestehen zwei andere zweifache Beziehungen.]
11. Definieren Sie die Klasse logischer Möglichkeiten, die eine Person bezüglich ihres Geschlechts und ihres Ehestandes klassifiziert.
    a) Zeigen Sie, daß „Wenn eine Person Junggeselle ist, dann ist sie unverheiratet" L-wahr ist.
    b) Bestimmen Sie die zwischen „Die Person ist ein Mann" und „Die Person ist ein Junggeselle" bestehenden Beziehungen.
    c) Suchen Sie einen einfachen Satz, der in subkonträrem Verhältnis zu „Die Person ist ein Mann" steht und damit vereinbar ist.

9*. Sätze mit gegebenen Wahrheitstafeln

In den Abschnitten 2 und 3 haben wir gezeigt, wie man die Wahrheitstafel für eine beliebige Satzverknüpfung aufstellt. Es ist ebenfalls von großem Interesse, das umgekehrte Problem, nämlich bei gegebener Wahrheitstafel einen oder mehrere Sätze zu finden, die die gleiche Wahrheitstafel haben, zu betrachten. Dieses Problem hat immer eine Lösung, und zwar eine Lösung,

in der lediglich die Verknüpfungszeichen $\wedge$, $\vee$ und $\sim$ vorkommen können. Wir wollen hier nur auf Wahrheitstafeln dreier Teil-Sätze eingehen, die Ausführungen können jedoch leicht erweitert werden, um auch für n Teil-Sätze zu gelten.

Wie wir bereits in Abschnitt 3 feststellten, hat eine Wahrheitstafel dreier Teil-Sätze stets acht Zeilen, jeweils eine für die acht möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten. Nehmen wir an, die letzte Zeile unserer Wahrheitstafel bestehe nur aus F's. Es ist dann leicht zu überprüfen, daß die Wahrheitstafel des Satzes $p \wedge \sim p$ ebenfalls nur F's in ihrer letzten Spalte hat, so daß dieser Satz als eine Lösung unseres Problems angesehen werden kann. Wir brauchen nun also nur noch Wahrheitstafeln zu betrachten, die ein oder mehrere W's aufweisen. Wir bedienen uns der Methode, Sätze zu bilden, die nur in einem Fall wahr sind, und dann den gesuchten Satz als ihre Disjunktion darzustellen.

Es ist nicht schwierig, Sätze zu konstruieren, die nur in einem Fall wahr sind. In Abb. 36 sind acht solcher Sätze aufgeführt, die jeweils nur in einem Fall wahr sind.

p	q	r	Basiskonjunktionen
W	W	W	$p \wedge q \wedge r$
W	W	F	$p \wedge q \wedge \sim r$
W	F	W	$p \wedge \sim q \wedge r$
W	F	F	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$
F	W	W	$\sim p \wedge q \wedge r$
F	W	F	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$
F	F	W	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$
F	F	F	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

Abb. 36

Wir werden solche Sätze *Basiskonjunktionen* nennen. Eine derartige Basiskonjunktion enthält jede der Variablen oder ihre Negation, je nachdem, ob in der Zeile, in der sie in Abb. 36 auftritt, ein W oder ein F unter der Variablen steht. Man beachte, daß die Disjunktion zweier solcher Basiskonjunktionen genau in zwei Fällen wahr ist, die Disjunktion dreier Basiskonjunktionen in drei Fällen usw. Um einen Satz zu einer gegebenen Wahrheitstafel zu bestimmen, braucht man also nur die Disjunktion derjenigen Basiskonjunktionen zu bilden, die in Abb. 36 in den Zeilen auftreten, in denen die gegebene Wahrheitstafel ein W aufweist.

Beispiel 1. Man bestimme den Satz, dessen Wahrheitstafel in der ersten, zweiten und letzten Zeile ein W und in den anderen Zeilen ein F hat. Der gesuchte Satz ist die Disjunktion der ersten, zweiten und achten Basiskonjunktionen, d. h.

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

In Übung 2 werden Sie zeigen, daß dieser Satz die geforderte Wahrheitstafel hat.

Beispiel 2. Ein Logiker wird durch einen Stamm von Wilden gefangengenommen und in ein Gefängnis gesperrt, das zwei Ausgänge hat. Der Häuptling der Wilden bietet dem Gefangenen die folgende Chance zu entfliehen: „Eine der Türen führt in den sicheren Tod und die andere in die Freiheit. Du kannst das Gefängnis durch jede der beiden Türen verlassen. Um Dir bei der Entscheidung zu helfen, werden zwei meiner Krieger bei Dir bleiben und Dir jede Frage beantworten, die Du ihnen stellst. Ich muß Dich jedoch warnen, denn einer meiner Krieger sagt immer die Wahrheit, während der andere immer lügt." Der Häuptling verläßt dann das Gefängnis und glaubt, dem Gefangenen nur eine sportliche Chance zur Flucht gegeben zu haben.
Nachdem unser gewitzter Logiker einen Moment nachgedacht hat, stellt er eine Frage und wählt dann die Tür, die in die Freiheit führt. Welche Frage stellte er?
p stehe für den Satz „Die erste Tür führt in die Freiheit" und q für die Aussage „Du sagst die Wahrheit". Natürlich sind p und q an sich nutzlose Fragen. Wir versuchen es deshalb mit Satzverknüpfungen. Wir wollen eine einzige Frage stellen, bei der ein „ja" als Antwort bedeutet, daß p wahr und ein „nein", daß p falsch ist, und zwar ohne Rücksicht darauf, welchem Krieger die Frage gestellt wird. Die gewünschten Antworten auf diese Fragen sind in Abb. 37 aufgeführt.
Weiter überlegen wir, wie die Wahrheitstafel einer Frage aussehen müßte, für die diese gewünschten Antworten zutreffen. Wenn der Krieger „ja" antwortet und die Warheit sagt, d. h. wenn q wahr ist, dann ist der Wahrheitswert W. Antwortet er jedoch „ja" und lügt, d. h. q ist falsch, dann ist der Wahrheitswert F. Eine ähnliche Analyse gilt wenn die Antwort „nein" lautet. Abb. 37 zeigt die Wahrheitswerte der gesuchten Antworten.

p	q	Gesuchte Antwort	Wahrheitstafel der Frage
W	W	ja	W
W	F	ja	F
F	W	nein	F
F	F	nein	W

Abb. 37

Damit haben wir das Problem darauf zurückgeführt, einen Satz zu bestimmen, der die in Abb. 37 gezeigte Wahrheitstafel hat. Folgen wir der allgemeinen Methode, die oben umrissen wurde, so sehen wir, daß der Satz

$$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

dieser Anforderung genügt. Der Logiker stellt also die Frage: „Führt die erste Tür in die Freiheit, und sagst du die Wahrheit, oder führt die zweite Tür in die Freiheit, und lügst du?" Auch der Satz $p \leftrightarrow q$ hat die in Abb. 37 gezeigte Wahrheitstafel, so daß eine kürzere, äquivalente Frage wäre: „Führt die erste Tür dann und nur dann in die Freiheit, wenn du die Wahrheit sagst?"

Am Beispiel 2 läßt sich erkennen, daß die Methode nicht unbedingt zu der einfachsten Satzverknüpfung führt. Sie hat jedoch zwei Vorteile: 1. Sie stellt eine mechanisch zu handhabende Methode dar, einen Satz zu bestimmen, der das Problem löst. 2. Der Satz erscheint in einer Standardform. Von dieser Eigenschaft werden wir beim Entwerfen von Schaltkreisen (siehe Abschnitt 10) Gebrauch machen.

ÜBUNGEN

1. Zeigen Sie, daß jede der Basiskonjunktionen in Abb. 36 eine Wahrheitstafel hat, die aus einem W, und im übrigen nur aus F's besteht. Das W erscheint dabei in der Zeile, in der der Satz aus Abb. 36 steht.
2. Stellen Sie die Wahrheitstafel für die in Beispiel 1 genannte Satzverknüpfung auf.
3. In Beispiel 2 existiert eine zweite Frage, die der Logiker stellen könnte und die eine, von der in Abb. 37 gezeigten verschiedene Wahrheitstafel hat. Welche Frage ist dies?
4. Konstruieren Sie eine oder mehrere Satzverknüpfungen, die die folgenden Wahrheitstafeln a), b), und c) haben.

p	q	r	(a)	(b)	(c)
W	W	W	W	F	W
W	W	F	F	F	W
W	F	W	W	F	W
W	F	F	F	W	F
F	W	W	F	F	W
F	W	F	F	F	W
F	F	W	W	F	F
F	F	F	F	F	W

5. Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen einen äquivalenten Satz und verwenden Sie dazu nur die Symbole $\vee$, $\wedge$ und $\sim$.
   a) $p \leftrightarrow q$.
   b) $p \rightarrow q$.
   c) $\sim(p \rightarrow q)$.
6. Bilden Sie unter Benutzung nur der Zeichen $\vee$ und $\sim$ einen Satz, der $p \wedge q$ äquivalent ist. Benutzen Sie diesen Satz zum Beweis, daß jede beliebige Wahrheitstafel mit Hilfe nur der beiden Verknüpfungszeichen (?) $\vee$ und $\sim$ dargestellt werden kann kann.
   In den Übungen 7—10 werden wir das neue Verknüpfungszeichen $\downarrow$ besprechen, wobei $p \downarrow q$ „weder p noch q" bedeutet.
7. Stellen Sie die Wahrheitstafel für $p \downarrow q$ auf.
8. Stellen Sie die Wahrheitstafel für $p \downarrow p$ auf. Für welche andere Satzverknüpfung gilt dieselbe Wahrheitstafel? [Lös.: dieselbe wie in Abb. 5.]
9. Stellen Sie die Wahrheitstafel für $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ auf. Für welche andere Satzverknüpfung gilt diese Wahrheitstafel auch? [Lös.: dieselbe wie in Abb. 3.]
10. Benutzen Sie die Ergebnisse der Übungen 6, 8 und 9, um zu zeigen, daß jede beliebige Wahrheitstafel mit Hilfe des einzigen Verknüpfungszeichens $\downarrow$ dargestellt werden kann.
11. Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse der Übungen 9 und 10 aus Abschnitt 2, daß jede Wahrheitstafel mit Hilfe des einzigen Verknüpfungszeichens $\downarrow$ dargestellt werden kann.
12. Konstruieren Sie eine Satzverknüpfung aus p, q und r, die dann und nur dann wahr ist, wenn eine der drei Komponenten wahr ist.

13. Die „Basiskonjunktionen" von Sätzen, die nur eine Variable enthalten, sind p und $\sim p$. Diskutieren Sie die verschiedenen Satzverknüpfungen, die durch Disjunktion aus beiden gebildet werden können. In welchem Verhältnis stehen diese zu den möglichen Wahrheitstafeln von Sätzen mit einer Variablen? Was kann bezüglich einer willkürlich angenommenen Satzverknüpfung, die nur die Variable p enthält, und unabhängig von der Länge der Satzverknüpfung, behauptet werden? [Lös.: es existieren 4 mögliche Wahrheitstafeln.]

14. Ein Student hat in einer Prüfung fünf Fragen mit ja oder nein zu beantworten. Er weiß, daß sein Prüfer immer mehr Fragen stellt, die zu bejahen, statt zu verneinen sind, und daß er nie drei Fragen hintereinander stellt, auf die die gleiche Antwort zu geben ist. Aus dem Charakter der ersten und letzten Frage ersieht er, daß diese entgegengesetzt beantwortet werden müssen. Die einzige Frage, auf die er die Antwort weiß, ist die Frage Nr. 2. Das überzeugt ihn jedoch davon, daß alle seine Antworten richtig sind. Was wußte er über die Frage 2? Wie lauten die Antworten auf die fünf Fragen. [Lös.: WFWWF.]

10*. Anwendungen auf Schaltkreise

Die Theorie der Satzverknüpfungen wird nicht nur in der reinen Mathematik, sondern auch auf vielen anderen Gebieten angewendet. Als ein Beispiel werden wir eine Theorie einfacher Schaltungen entwickeln.

Eine Schaltung ist eine Anordnung von Drähten und Schaltern, die zwei Endpunkte T_1 und T_2 miteinander verbinden. Jeder Schalter kann dabei entweder „offen" oder „geschlossen" sein. Ein offener Schalter unterbricht den Stromfluß, während ein geschlossener Schalter einen Stromfluß erlaubt. Wir wollen das folgende Problem lösen: Gegeben seien eine Schaltung und die Information, welche Schalter geschlossen sind; zu bestimmen sei, ob Strom von T_1 nach T_2 fließt oder nicht.

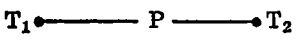


Abb. 38

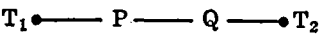


Abb. 39

Abb. 38 stellt die einfachste Art einer Schaltung dar, in der die Endpunkte durch einen einfachen Draht, der einen Schalter P enthält, verbunden sind. Ist der Schalter P geschlossen, so fließt Strom zwischen den Endpunkten, ist er offen, nicht. Die in Abb. 39 dargestellte Schaltung enthält zwei Schalter P und Q „in Serie". Hier fließt nur dann Strom, wenn beide Schalter P und Q geschlossen sind.

Um zu zeigen, wie unsere logische Analyse zur Lösung des obengenannten Problems verwendet werden kann, wollen wir jedem Schalter einen Satz zuordnen. So sei p der Satz „Schalter P ist geschlossen" und q der Satz „Schalter Q ist geschlossen". In Abb. 38 wird dann und nur dann Strom

fließen, wenn p wahr ist. Entsprechend wird in Abb. 39 dann und nur dann Strom fließen, wenn sowohl p als auch q wahr sind, d. h. dann und nur dann, wenn $p \wedge q$ wahr ist. Die erste Schaltung wird daher durch p und die zweite durch $p \wedge q$ dargestellt.

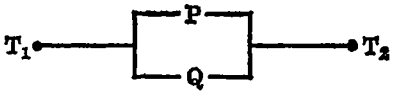


Abb. 40

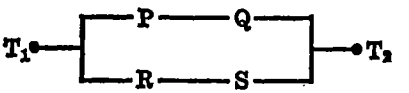


Abb. 41

Abb. 40 zeigt eine Schaltung, in der die Schalter P und Q „parallel" geschaltet sind. In diesem Fall fließt Strom, wenn wenigstens einer der beiden Schalter geschlossen ist, so daß die Schaltung durch den Satz $p \vee q$ dargestellt werden kann.

In der in Abb. 41 dargestellten Schaltung werden die Serien- und die Parallelschaltung kombiniert. Der obere Zweig der Schaltung wird durch den Satz $p \wedge q$ und der untere durch $r \wedge s$ dargestellt; die gesamte Schaltung wird also durch $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ repräsentiert. Da vier Schalter vorhanden sind und jeder entweder offen oder geschlossen sein kann, gibt es $2^4 = 16$ mögliche Schalterstellungen. Ähnlich hat der Satz $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ vier Variable, so daß seine Wahrheitstafel aus 16 Zeilen besteht. Die Schalterstellungen, bei denen Strom fließt, entsprechen den Stellen der Wahrheitstafel, für die die obige Satzverknüpfung wahr ist.

Schalter müssen nicht immer unabhängig voneinander wirken. Es ist möglich, zwei oder mehr Schalter so miteinander zu koppeln, daß sie sich gleichzeitig öffnen und schließen. In den folgenden Diagrammen werden wir das dadurch andeuten, daß wir solche Schalter mit den gleichen Buchstaben bezeichnen. Andererseits kann man zwei Schalter auch so koppeln, daß der eine dann offen ist, wenn der andere geschlossen ist. Wir werden das im folgenden dadurch andeuten, daß wir den ersten Schalter mit dem Buchstaben P und den zweiten mit dem Buchstaben P′ bezeichnen. Unter dieser Voraussetzung ist der Satz „P ist geschlossen" dann und nur dann wahr, wenn der Satz „P′ ist geschlossen" falsch ist. Stellt daher p den Satz „P ist geschlossen" dar, dann bedeutet $\sim p$ den Satz „P′ ist geschlossen".

Wir zeigen eine solche Schaltung in Abb. 42. Die zugeordnete Satzverknüpfung ist $[p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee [p \wedge q]$. Da der Satz nur dann falsch ist, wenn p falsch und q wahr ist, wird immer dann Strom fließen, wenn nicht gleichzeitig P offen und Q geschlossen sind. Wir können dies auch direkt nachprüfen. Ist P geschlossen, so wird Strom unabhängig vom Zustand von Q durch den oberen Zweig fließen. Sind die Schalter P und Q offen, dann sind P′ und Q′ geschlossen, so daß der Strom durch den mittleren Zweig fließen kann. Ist jedoch P geöffnet und Q geschlossen, so sind alle Zweige für den Stromdurchfluß gesperrt.

Man beachte, daß wir nie den durch den unteren Zweig fließenden Strom in Betracht zu ziehen hatten. Das logische Gegenstück dieser Tatsache besteht darin, daß der der Schaltung zugeordnete Satz dem Ausdruck $[p \vee (\sim p \wedge \sim q)]$ äquivalent ist. Diesem entsprechen aber gerade die oberen zwei Zweige der Abb. 42. Die elektrischen Eigenschaften des in Abb. 42 dargestellten Schaltkreises wären also die gleichen, wenn man den unteren Zweig wegließe.

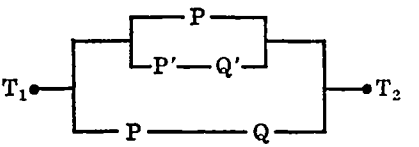


Abb. 42

Schließlich wollen wir den Entwurf einer speziellen Schaltung betrachten. Ein dazu äquivalentes Problem haben wir bereits in Abschnitt 9 gelöst. Dort war eine Satzverknüpfung zu bestimmen, deren Wahrheitstafel gegeben war. Wie in jenem Abschnitt, wollen wir uns auch hier auf Sätze mit drei Variablen beschränken, obwohl unsere Methoden ohne Schwierigkeiten erweitert werden könnten.

In Abschnitt 9 haben wir eine allgemeine Methode zur Bestimmung eines Satzes entwickelt, wenn eine Wahrheitstafel gegeben war, die nicht ausschließlich aus F's bestand (der Schaltkreis, der einem Satz mit einer nur aus F's bestehenden Wahrheitstafel entspricht, interessiert nicht, da in ihm nie Strom fließt). Jeder solche Satz konnte als eine Disjunktion einer Basiskonjunktion konstruiert werden. Da die Basiskonjunktionen die Form $p \wedge q \wedge r$, $p \wedge q \wedge \sim r$ usw. haben, wird jede von ihnen durch einen Schaltkreis dargestellt, der aus drei, in Serie geschalteten Schaltern besteht. Wir wollen diese Schaltkreise *Basisserienschaltung* nennen. Die Disjunktion gewisser dieser Basiskonjunktionen wird dann durch den Schaltkreis dargestellt, den wir durch das Parallelschalten mehrerer Basisserienschaltungen erhalten. Die Schaltung, die sich ergibt, wird zwar im allgemeinen nicht die einfachste sein, die den gestellten Anforderungen genügt, aber diese Methoden genügen stets, einen den Anforderungen entsprechenden Schaltkreis zu bestimmen.

p	q	r	Gew. Wahrheitswert	Entsprechende Basiskonjunktion
W	W	W	W	$p \wedge q \wedge r$
W	W	F	W	$p \wedge q \wedge \sim r$
W	F	W	W	$p \wedge \sim q \wedge r$
W	F	F	F	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$
F	W	W	W	$\sim p \wedge q \wedge r$
F	W	F	F	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$
F	F	W	F	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$
F	F	F	F	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

Abb. 43

Beispiel. Ein aus drei Personen bestehendes Komitee möchte mit Hilfe eines elektrischen Schaltkreises eine geheime Mehrheitswahl durchführen. Entwerfen Sie einen dafür brauchbaren Schaltkreis, bei dem jedes Komiteemitglied einen Knopf zum Zeichen seines „ja" drücken kann (das Nicht-Drücken bedeutet dann „nein") und bei dem dann ein Signallicht aufleuchtet, wenn die Mehrheit der Komiteemitglieder „ja" gewählt hat. p bedeute „Komiteemitglied 1 wählt ‚ja'", q bedeute „Mitglied 2 wählt ‚ja'" und r bedeute „Mitglied 3 wählt ‚ja'". Abb. 43 zeigt die Wahrheitstafel für die Aussage „Die Mehrzahl der Mitglieder wählt ‚ja'". Aus dieser Abbildung können wir die gewünschte Satzverknüpfung als

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$$

ablesen. Abb. 44 zeigt den für den Wahlvorgang verwendbaren Schaltkreis (siehe Übung 7).

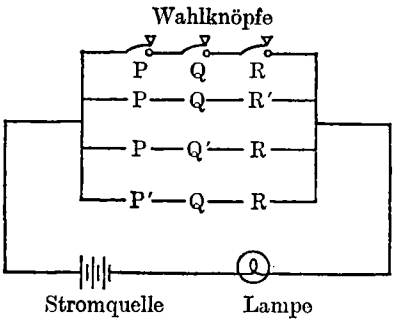


Abb. 44

ÜBUNGEN

1. Welchem Schaltkreis entspricht eine logisch wahre Aussage? Nennen Sie ein Beispiel.
2. Entwerfen Sie einen Schaltkreis, der dem Satz
$$[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$$ entspricht.
3. Welche Satzverknüpfung wird durch den folgenden Schaltkreis repräsentiert?

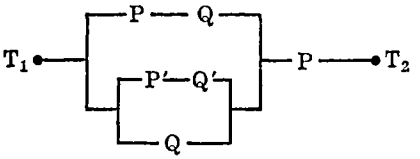


Abb. 44a

4. Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Satzverknüpfung der Übung 3 auf. Was sagt sie uns über den Schaltkreis?
5. Entwerfen Sie einen einfacheren Schaltkreis als den in Übung 3 gezeigten, der jedoch über die gleichen Eigenschaften verfügt.
6. Entwerfen Sie einen, dem folgenden Satz entsprechenden Schaltkreis.
$$[(p \vee q) \wedge \sim r] \vee [(\sim p \wedge r) \vee q].$$
7. Suchen Sie den einfachsten Schaltkreis, der dem in Abb. 44 gezeigten äquivalent ist.

8. Entwerfen Sie einen Schaltkreis für das folgende Spiel: Auf ein gegebenes Zeichen öffnet oder schließt jeder der zwei Spieler einen Schalter. Betätigen sie ihre Schalter beide in der gleichen Weise, so gewinnt A; betätigen sie sie gegensätzlich, dann gewinnt B. Eine in den Schaltkreis eingefügte Lampe soll dann aufleuchten, wenn A gewinnt.
9. In einem großen Saal soll das Licht von irgendeinem der vier an den Wänden befindlichen Schalter an- oder ausgeschaltet werden können. Dies kann wie folgt erreicht werden: Man legt den Schaltkreis so aus, daß das Licht dann brennt, wenn eine gerade Anzahl von Schaltern geschlossen ist und nicht brennt, wenn eine ungerade Anzahl geschlossen ist (warum kann dadurch das Problem gelöst werden?). Entwerfen Sie einen solchen Schaltkreis.
10. Ein Komitee habe fünf Mitglieder. Die Entschlüsse werden mit einfacher Mehrheit gefällt, wobei der Vorsitzende ein Vetorecht habe (d. h. die Maßnahme kann nur dann ausgeführt werden, wenn auch er für sie stimmt). Entwerfen Sie einen Schaltkreis, mit Hilfe dessen jedes Mitglied dadurch für eine Maßnahme stimmen kann, daß es einen Knopf drückt und bei dem ein Licht dann und nur dann aufleuchtet, wenn die Maßnahme gutgeheißen wird.
11. Im Rahmen einer Prüfung werden den Kandidaten vier Fragen vorgelegt, die mit „ja" oder „nein" zu beantworten sind. Entwerfen Sie einen Schaltkreis, bei dem ein Kandidat die Knöpfe der Fragen drücken kann, die er mit „ja" beantworten will und der die Anzahl der richtigen Antworten angibt (Hilfe: Benutzen Sie fünf Lampen, die 0, 1, 2, 3, 4 richtigen Antworten entsprechen).
12. Entwerfen Sie ein Schema für das Aufstellen von Wahrheitstafeln mit Hilfe von Schaltkreisen.

11*. Dualzahlen

Im Dezimalsystem bedeutet der Ausdruck „3825" die Zahl 3 tausend 8 hundert 5 und 20 oder

$$3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 1.$$

Hierbei bedeuten, von rechts angefangen, aufeinanderfolgende Ziffern vielfache steigende Potenzen von 10. Wir bezeichnen daher die Zahl 10 als die Basis dieses Systems. Die Wahl der Zahl 10 als Basis hat hauptsächlich historische Gründe; sie ist wahrscheinlich auf die Anzahl der Finger eines Menschen zurückzuführen. Man könnte genausogut jede andere ganze Zahl, die größer als 1 ist, wählen. Benutzen wir z. B. 8 als Basis (oktales System), so stellt „325" z. B. die Zahl dar, die im Dezimalsystem als

$$3 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 5 \times 1 = 213$$

geschrieben würde. Die Zahl „325" bezeichnet also im Oktalsystem die gleiche Größe wie „213" im Dezimalsystem.
Die kleinstmögliche Basis ist 2 und ,das daraus resultierende System ist das sogenannte Dualsystem. Im Dezimalsystem benötigen wir 10 Ziffern (von 0—9), um die möglichen Vielfachen einer Zehnerpotenz bis zur nächst-

höheren Potenz zu bezeichnen. Hätten wir allgemein als Basis b, so benötigten wir die Ziffern 0, 1, . . ., b—1. Das heißt, im Dualsystem benötigten wir lediglich die Ziffern 0 und 1. Eine 1 in der am weitesten rechts stehenden Stelle bedeutet 1, in der nächsten Stelle $2^1 = 2$, in der nächsten $2^2 = 4$ und schließlich in der dritten von rechts $2^3 = 8$. Abb. 45 zeigt einige Dualzahlen und ihre Äquivalente im Dezimalsystem. Wir wollen jede Ziffer im Dualsystem mit einem „bit" bezeichnen.

Dualzahl	1	10	11	100	101	110	111	1000	10000	100000
Dezimales Äquivalent	1	2	3	4	5	6	7	8	16	32

Abb. 45

Die in Abb. 45 gezeigten Additions- und Multiplikationstabellen für Dualzahlen sind besonders einfach:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

(a)

×	0	1
0	0	0
1	0	1

(b)

Abb. 46

Alle Werte der Multiplikationstabelle und drei Werte der Additionstabelle gleichen denen der entsprechenden Dezimaltabellen. Die einzige überraschende Rechenoperation ist $1 + 1 = 10$. Das wird aber dann sofort verständlich, wenn wir uns ins Gedächtnis rufen, daß „10" im Dualsystem die Zahl 2 repräsentiert.

Beispiel 1. Wir wollen die Addition $6 + 7 = 13$ im Dualsystem durchführen. Aus Abb. 45 ersehen wir, daß die Zahl 6 im Dualsystem als 110 und die Zahl 7 als 111 dargestellt wird. Also:

$$\begin{array}{r} 110 \\ +\ 111 \\ \hline 1101, \end{array}$$

wobei 1101 im Dualsystem

$$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 1 = 13,$$

die von uns im Dezimalsystem erwartete Antwort darstellt.

Beispiel 2. Wir wollen nun die Multiplikation $6 \times 7 = 42$ im Dualsystem durchführen:

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times\ 111 \\ \hline 110 \\ 110 \\ 110 \\ \hline 101010 \end{array}$$

Die Zahl 101010 im Dualsystem ist äquivalent zu

$$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 1 = 42$$

im Dezimalsystem.
Auch hier erhielten wir also das von uns erwartete Ergebnis.

Im nächsten Abschnitt werden wir Gelegenheit haben, Wahrheitstafeln durch Reihenfolgen von Nullen und Einsen darzustellen. Hierbei wollen wir festlegen, daß das bit O dem Wahrheitswert F entspricht und bit 1 dem Wahrheitswert W. In Abb. 47 haben wir das für eine Wahrheitstafel dreier Sätze durchgeführt. Wir können sehen, daß die resultierenden Dualzahlen in fallender Reihenfolge die Ziffern 0, 1, 2 . . . 7 darstellen. Dadurch kann bewiesen werden, daß eine Wahrheitstafel mit n Variablen aus 2^n Zeilen besteht (siehe Übung 9).

p	q	r	Dualzahl	Dargestellte Zahl
W	W	W	111	sieben
W	W	F	110	sechs
W	F	W	101	fünf
W	F	F	100	vier
F	W	W	011	drei
F	W	F	010	zwei
F	F	W	001	eins
F	F	F	000	null

Abb. 47

ÜBUNGEN

1. Übersetzen Sie die folgenden Zahlen in solche des Dualsystems.
   a) 20. [Lös.: 10100.]
   b) 75.
   c) 128.
   d) 80. [Lös.: 1010000.]
   e) 200.
2. Führen Sie unter Verwendung der Ergebnisse der Übung 1 die folgenden Additionen im Dualsystem aus. Prüfen Sie Ihre Resultate nach.
   a) 20 + 80.
   b) 75 + 80.
   c) 128 + 128.
   d) 128 + 200.
   e) 80 + 200.
   e) 80 + 200. [Lös.: e) 100011000.]
3. Führen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übung 1 die folgenden Multiplikationen im Dualsystem aus. Prüfen Sie Ihre Resultate nach.
   a) 20 × 20.
   b) 20 × 80.
   c) 128 × 128.

4. Führen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übung 1 die Subtraktion 200—128 im Dualsystem aus.
5. Wie kann man erkennen, ob eine Dualzahl gerade oder ungerade ist?
6. In einem Test, in dem jede Frage vier mögliche Antworten hat, bezeichne man die Antworten mit 1, 2, 4 und 8. Man sagt den Kandidaten, daß jede Frage keine, eine oder mehrere richtige Antworten haben kann. Man fordere sie auf, die Ziffern der richtigen Antworten zu addieren (oder 0 hinzuschreiben, wenn keine richtige Antwort vorliegt).
   a) Zeigen Sie, daß die resultierende Zahl alle Informationen enthält, die der Prüfer wünscht.
   b) Bei einer gegebenen Frage sei die richtige Summe 7 gewesen. Drei Studenten gaben 4, 8 bzw. 15 an. Welche Antwort kam der richtigen am nächsten? Welche war am weitesten von der richtigen Antwort entfernt?
   [Lös.: 15 beste Lösung, 8 schlechteste Lösung.]
7. Drücken Sie die Zahlen 80 und 200 in dem Nummernsystem aus, bei dem 8 als Basis verwandt wird (sog. oktales Nummernsystem). Addieren Sie die sich ergebenden Zahlen im Oktalsystem und prüfen Sie Ihr Resultat nach. [Lös.: 430.]
8. Vergleichen Sie die Addition der Übung 7 mit der der Übung 20. Beschreiben Sie daraufhin, wie das Oktalsystem als eine Kurzschrift für das Dualsystem verwendet werden kann (Hinweis: Jede Oktalziffer steht anstelle dreier Dualziffern).
9. Beweisen Sie aufgrund der Entsprechung von Wahrheitstafelzeilen und Dualzahlen, daß für n Aussagen genau 2^n Wahrheitstafelzeilen vorhanden sind.
10. In Abb. 47 habe 0 die Bedeutung W und 1 die Bedeutung F; welchen Zahlen entsprechen die acht Zeilen?
11. Nehmen Sie an, daß in Abb. 1 jedes W durch eine 1 und jedes F durch eine 0 ersetzt würde. Geben Sie eine arithmetische Interpretation der dadurch entstehenden Tafel. Führen Sie das gleiche für Abb. 3 durch.
12. Lösen Sie Übung 11, nachdem Sie für W die Ziffer 0 und für F die Ziffer 1 gesetzt haben.

12*. Schaltkreise elektronischer Rechenmaschinen

Bei Elektronenrechnern werden die Zahlen im Dualsystem dargestellt. Wir wollen nun betrachten, wie Dualzahlen im Rechner verarbeitet werden können und welche Arten von Schaltkreisen benötigt werden um die arithmetischen Operationen durchzuführen. Obwohl die Bauteile moderner elektronischer Rechenanlagen Vakuumröhren oder Transistoren sind, spielen diese Bauteile die gleiche Rolle wie Schalter im Schaltkreis. Die Logik elektronischer Kreise kann daher sehr gut an einfachen Schaltkreisen studiert werden.

Da ein Schalter nur zwei mögliche Stellungen hat, ist er ideal dazu geeignet, ein „bit" einer Dualzahl darzustellen. Während ein geöffneter Schalter eine

Null darstellt, bedeutet ein geschlossener Schalter eine 1. In Abschnitt 10 haben wir über die Verbindung von Wahrheitstafeln und Schaltkreisen gesprochen. Wir wollen nun Dualzahlen durch Wahrheitstafeln darstellen, indem wir eine 1 für W (der Schalter ist geschlossen) und eine 0 für F (es ist falsch, daß der Schalter geschlossen ist, d. h. er ist offen) setzen. Damit haben wir die Verbindung hergestellt, die in Abb. 47 des letzten Abschnittes illustriert wurde.

Der Elektronenrechner speichert, solange er in Betrieb ist, in seinem „Gedächtnis" große Zahlenmengen. Eine oder mehrere dieser Zahlen können nun abgerufen werden, um damit arithmetische Operationen auszuführen und das Resultat wiederum zu speichern. So mag z. B. gefordert werden, zwei Zahlen miteinander zu multiplizieren und das Produkt für zukünftige Zwecke zu speichern. Die „bits" jeder Ziffer der gespeicherten zwei Dualzahlen entsprechen je einem Schalter. Wir wollen diese Eingabeschalter mit den Buchstaben P, Q und R bezeichnen. Das Ergebnis der Multiplikation wird wiederum eine Dualzahl sein, deren bits wieder jeweils einem Schalter entsprechen. Diese Ausgangsschalter sollen mit A, B und C bezeichnet werden. Wir wollen annehmen, daß diese Schalter zunächst geöffnet seien und daß wir, wenn wir sie schließen wollen (um eine 1 in der Antwort zu bezeichnen), ein Signal an die Ausgangsschalter zu senden haben. Für eine typische arithmetische Operation müssen wir daher einen Schaltkreis entwerfen, der die obengenannten Eingangsschalter enthält, die ein Signal an jeden Ausgangsschalter aussenden, die einer 1 in der Antwort entsprechen.

Beispiel 1. Bei der Multiplikation zweier Zahlen multiplizieren wir immer — gleichgültig innerhalb welchen Systemes die Operation vorgenommen wird — eine Ziffer der einen Zahl mit einer Ziffer der anderen Zahl, um diese Produkte anschließend zu addieren. Wir haben also nie mehr als eine Ziffer auf einmal mit einer anderen zu multiplizieren. Bei Dualzahlen brauchen wir daher nur einen Schaltkreis für das Produkt eines bits mit einem anderen. Wir wollen die Schalter entsprechend diesen bits P und Q nennen. Die Antwort soll ein einzelnes bit, dargestellt durch Schalter A, sein.

Zunächst stellen wir eine Tabelle auf, die die Rechenoperation in ihren möglichen Variationen enthält. Dies zeigt Abb. 48. Wir stellen dann die entsprechende Wahrheitstafel auf, indem wir 0 durch F und 1 durch W ersetzen. Dies zeigt Abb. 49. Damit haben wir das Problem auf den in Abschnitt 10 behandelten Problemtyp zurückgeführt. Da die Wahrheitstafel nur ein einziges W enthält, benötigen wir nur einen Serienschaltkreis, so daß die Multiplikationen zweier bits durch den sehr einfachen Schaltkreis der Abb. 50 durchgeführt werden kann.

Erstes bit	Zweites bit	Ergebnis-bit
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Abb. 48

Wird nun ein elektrischer Impuls vom Ausgangspunkt T ausgesandt, so erreicht er den Ausgangsschalter A dann und nur dann, wenn die Schalter P und Q geschlossen sind. Mit anderen Worten, das Ergebnis-Bit ist dann und nur dann 1, wenn beide Ausgangs-Bits 1 waren. Wir können das leicht aus Abb. 48 ersehen.

p	q	a
F	F	F
F	W	F
W	F	F
W	W	W

Abb. 49



Abb. 50

Beispiel 2. Für die Addition zweier Dualzahlen benötigen wir einen komplizierteren Schaltkreis. Wir addieren noch immer ein bit einer Zahl zu einem bit der anderen Zahl. Wir dürfen jedoch nicht vergessen, daß wir einen Überlauf haben können. Unser Schaltkreis muß daher so beschaffen sein, daß drei bits auf einmal addiert werden können. Diese bits sollen die Schalter P, Q und R steuern. Als Ausgang haben wir sowohl einen Antwort-bit als einen Überlauf, die durch A bzw. C dargestellt werden sollen. Die Tabelle der Rechenoperation, die Wahrheitstafel und den resultierenden Schaltkreis zeigen die Abb. 51, 52 und 53.

Erstes bit	Zweites bit	Drittes bit	Summen-bit	Überlauf
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Abb. 51

p	q	r	a	c
F	F	F	F	F
F	F	W	W	F
F	W	F	W	F
F	W	W	F	W
W	F	F	W	F
W	F	W	F	W
W	W	F	F	W
W	W	W	W	W

Abb. 52

Der in Abb. 53 gezeigte, mit Hilfe unserer automatischen Methode gebildete Schaltkreis ist recht kompliziert. Einen einfacheren Schaltkreis, der jedoch zum gleichen Resultat führt, zeigt Abb. 54. Wir wollen z. B. die dritte Zeile unserer Tabellen nachprüfen. Die

Zeile heißt 0 + 1 + 0. Da Q der einzige geschlossene Eingangsschalter ist, kann in Abb. 54 weder durch den P-Schalter noch durch den R-Schalter Strom fließen. Das heißt nur durch den P′-R′-Q-Zweig fließt Strom, und somit leuchtet A, aber nicht C auf. Die Antwort ist daher 1, und es gibt keinen Überlauf.

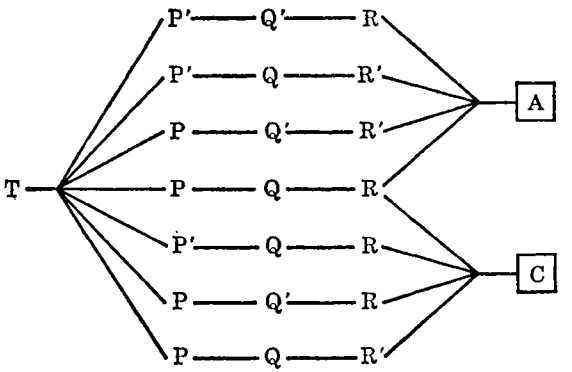


Abb. 53

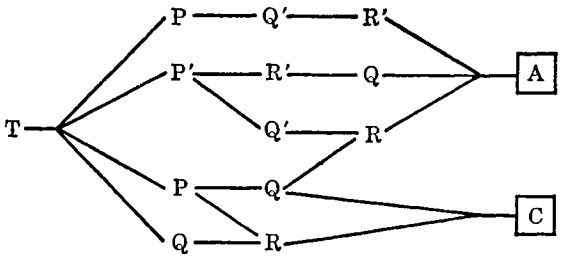


Abb. 54

Beispiel 3. Als letztes Beispiel wollen wir einen Schaltkreis für die Subtraktion zweier, durch P und Q dargestellter, bits betrachten. Wir haben zwar eine Ein-bit-Antwort (dargestellt durch A); da jedoch das Resultat negativ sein kann, benötigen wir ein weiteres bit, das als mögliches Minuszeichen gelten kann. Dieses „Zeichen-bit", soll durch den Ausgangsschalter B dargestellt werden.

Erstes bit	Zweites bit	Antwort-bit	Zeichen-bit
0	0	0	+
0	1	1	—
1	0	1	+
1	1	0	+

Abb. 55

Abb. 55 zeigt die Tabelle der Rechenoperation. Abb. 56 die Wahrheitstafel und Abb. 57 den Schaltkreis. Das *b* in der Wahrheitstafel bedeutet, daß das Ergebnis negativ ist, d. h. der Schalter B (entsprechend dem Zeichen-bit) ist dann und nur dann geschlossen, wenn das Ergebnis negativ ist.

p	*q*	*a*	*b*
F	F	F	F
F	W	W	W
W	F	W	F
W	W	F	F

Abb. 56

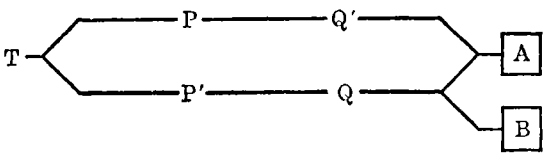


Abb. 57

ÜBUNGEN

1. Überprüfen Sie den Schaltkreis der Abb. 53. Zeigen Sie, daß der in Abb. 54 gezeigte Schaltkreis dem gleichen Zweck dient.
2. Überprüfen Sie den in Abb. 57 gezeigten Schaltkreis.
3. Die meisten elektronischen Rechner verfügen über ein „logisches oder", das im Maximum aus zwei bits bestehen kann (d. h. die Antwort entspricht dem größeren). Stellen Sie die arithmetischen Tabellen und Wahrheitstafeln auf, und entwerfen Sie einen Schaltkreis, um die Operation auszuführen. Wovon kommt der Name „logisches oder"?
4. Führen Sie die Übung 3 für das „logische und" aus, das mindestens aus zwei bits besteht.
5. Entwerfen Sie einen Schaltkreis, der eine Ein-bit-Zahl zu einer Zwei-bit-Zahl addiert (Hinweis: Er besteht aus drei Eingangs- und drei Ausgangsschaltern).
6. Entwerfen Sie einen Schaltkreis für die Addition zweier Zwei-bit-Zahlen.
7. Vereinfachen Sie den in Übung 6 erhaltenen Schaltkreis so weit wie möglich.
8. Entwerfen Sie einen Schaltkreis für die Subtraktion einer Zwei-bit-Zahl von einer anderen (Hinweis: Im Ausgang erscheinen zwei Antwort-bits und ein Zeichen-bit).
9. Vereinfachen Sie den in Übung 8 erhaltenen Schaltkreis so weit wie möglich.
10. Wie viele bits werden benötigt, um alle ganzen Dezimalzahlen bis 1000 darzustellen?
11. „Kommerzielle" Rechner werden im Gegensatz zu „wissenschaftlichen" Rechnern oft so entworfen, daß sie Zahlen in einer Form darstellen, die unserem Dezimalsystem näher stehen. Ein System, das einige Vorteile des Dualsystems mit anderen Vorteilen des Dezimalsystems verbindet, ist die „dualgesetzte Dezimalschreibweise". Bei diesem System wird jede ganze Zahl von 0 bis 9 durch ihr duales

(vier-bit-)Äquivalent dargestellt, während die Position jedes Blockes von vier bits der Position entspricht, die die äquivalente dezimale Ziffer bei einer dezimalen Darstellung der Zahl einnähme. So entspricht 0001 im Dualsystem der Ziffer 1 im Dezimalsystem, 1001 im Dualsystem entspricht 9 im Dezimalsystem und 10010001 in dualgesetzter Dezimalschreibweise bedeutet 91 im Dezimalsystem.

a) Schreiben Sie die folgenden Dezimalzahlen in dualgesetzter Dezimalschreibweise:

11, 52, 64, 98, 128, 144.

b) Welche Dezimalzahlen entsprechen den folgenden, dualgesetzten Dezimalzahlen:

1000, 01010101, 100000010101 ?

c) Haben die folgenden Zahlen in dualgesetzter Dezimalschreibweise irgendeinen Sinn:

11010001, 10101010, 00101100 ?

d) Wie viele bits werden benötigt, um alle Dezimalzahlen bis 1000 in dualgesetzter Dezimalschreibweise darzustellen ?

e) Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile der dualgesetzten Dezimalschreibweise im Vergleich zur reinen Dualschreibweise von Zahlen.

Empfohlene Lektüre

Bochenski, J. M.: Formale Logik, 1956.
Bochenski, J. M., und A. Menne: Abriß der Logistik, 1954.
Carnap, R.: Einführung in die symbolische Logik, 1954.
Lorenzen, P.: Formale Logik, (Sammlung Göschen 1176/1176a) 1962.
Schmidt, H. A.: Mathematische Gesetze der Logik. Bd. I, Vorlesungen über Aussagen-Logik, 1958.
Scholz, H.: Geschichte der Logik, 1932.

II. Klassen und Unterklassen

1. Einführung

Unter einer Klasse verstehen wir eine streng definierte Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen. Der Klassen-Begriff[1] hat, wegen seiner großen Allgemeinheit in der Mathematik eine erhebliche Bedeutung, da man aus ihm die gesamte Mathematik logisch entwickeln kann.

So bilden die verschiedenen Möbelstücke in einem Raum, die Bücher einer gegebenen Bibliothek, die ganzen Zahlen zwischen eins und einer Million oder alle Ideen, die die Menschheit gehabt hat oder diejenigen, die menschliche Wesen zwischen einer Million vor Christi Geburt und zehn Millionen nach Christi Geburt gehabt haben, die Maschinenwerkzeuge in einer Fabrik, die Vorstandsmitglieder eines Unternehmens oder die Produkte, die eine Gesellschaft verkauft, jeweils eine Klasse. Alle angeführten Beispiele sind Fälle *endlicher* Klassen, d. h. von Klassen, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen. Wir wollen in diesem Buch nur endliche Klassen behandeln.

Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Wege, eine Klasse zu beschreiben: Entweder man formuliert eine Regel, mit deren Hilfe bestimmt werden kann, ob ein gegebenes Objekt zu der Klasse gehört oder nicht, oder man stellt eine vollständige Liste aller Elemente auf, die zu der Klasse gehören. Wir wollen die erste Form eine *Beschreibung* und die zweite eine *Enumeration* der Klasse nennen. So können wir z. B. eine Klasse von vier Personen definieren als a) die Vorstandsmitglieder der XYZ-Gesellschaft oder b) die Personen, deren Namen Meier, Müller, Schulze und Schmidt sind. Gewöhnlich umschließt man die Enumeration mit Klammern. Die obengenannte Klasse hätte also die Enumeration {Meier, Müller, Schulze, Schmidt}.

Da die Analyse logischer Möglichkeiten sehr oft die Hauptaufgabe bei der Lösung eines Problemes ist, werden uns häufig deren Klassen interessieren. Nehmen Sie z. B. an, wir seien an den Erfolgen dreier Gesellschaften interessiert, die auf vier Gebieten, die wir hier einfach Nord, Süd, Ost und West bezeichnen wollen, konkurrieren. Wir wollen die Möglichkeiten einer Marktführerschaft auf jedem der Gebiete bestimmen, wobei wir eine Gesellschaft

---

[1] In der Mathematik wird gewöhnlich statt des hier benutzten, aus der Logistik stammenden Begriffs Klasse synonym der Begriff „Menge" verwendet.
[Der Übersetzer]

dann als Marktführer bezeichnen, wenn ihr Marktanteil größer als der jeder anderen Gesellschaft ist. Nehmen Sie an, Gesellschaft A bearbeite alle Gebiete, B bearbeite nicht das Gebiet Ost und C bearbeite nicht das Gebiet Nord. Abb. 1 stellt dann ein Verzeichnis aller logischen Möglichkeiten dar. Da im Osten und im Norden nur zwei mögliche Marktführer vorhanden sind, im Süden und Westen dagegen drei, bestehen insgesamt, wie Abb. 1 zeigt, $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ verschiedene logische Möglichkeiten.

Besteht eine Klasse nur aus einigen Elementen einer anderen Klasse, so bezeichnen wir sie als Unterklasse der ersteren. So ist z. B. die in Abb. 1 gezeigte Klasse der logischen Möglichkeiten, für die die Aussage „Die Gesellschaft A ist in wenigstens drei Gebieten Marktführer" wahr ist, eine Unterklasse der Klasse aller logischen Möglichkeiten. Auch diese Unterklasse kann durch eine Enumeration ihrer Mitglieder definiert werden:

$$\{P1, P2, P3, P4, P13, P19\}.$$

Wir wollen, um alle Unterklassen einer gegebenen Klasse diskutieren zu können, die folgende Terminologie einführen: Wir wollen die Klasse, von der wir jeweils ausgehen, die *Universalklasse*, Klassen mit nur einem Element *Einerklasse* und Klassen ohne Inhalt *leere Klassen* nennen. Für andere Arten von Unterklassen der Universalklasse wollen wir keinen speziellen Namen einführen.

Die Universalklasse U besteht z. B. aus den drei Elementen $\{a, b, c\}$. Die *echten Unterklassen* von U sind dann die Klassen, die einige, aber nicht alle Elemente von U enthalten. In dem vorliegenden Fall bestehen die echten Unterklassen aus drei Klassen mit zwei Elementen, nämlich $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ und $\{b, c\}$, und den drei Einerklassen $\{a\}$, $\{b\}$ und $\{c\}$. Um das Bild zu vervollständigen, betrachten wir auch die Universalklasse als eine Unterklasse (aber nicht als eine echte Unterklasse) von sich selbst und die leere Klasse E, die keines der Elemente von U enthält, als eine Unterklasse von U. Zunächst mag es sinnlos erscheinen, die Klassen U und E als Unterklassen von U zu betrachten; die Gründe dafür werden jedoch später klar werden.

Wie wir sahen, verfügt die obige, aus drei Elementen bestehende Klasse über $8 = 2^3$ Unterklassen. Wir werden im folgenden sehen, daß ganz allgemein eine Klasse mit n Elementen 2^n Unterklassen hat. Die Unterklasse P der Klasse U bilden wir dadurch, daß wir jedes der Elemente von U betrachten und darüber entscheiden, ob wir es in die Unterklasse P aufnehmen oder nicht. Nehmen wir alle Elemente von U in P auf, so erhalten wir die Universalklasse. Entscheiden wir uns dazu, keines der Elemente von U in P auszunehmen, so führt dies zur leeren Klasse. In den meisten Fällen werden wir einige, aber nicht alle Elemente von U in P einschließen und so einige der echten Unterklassen von U erhalten. Es sind also n Entscheidungen zu fällen; eine für jedes der Elemente der Klasse. Bei jeder Entscheidung haben wir dabei zwischen zwei Alternativen zu wählen.

Möglichkeit Nummer	Marktführer im Osten	Marktführer im Süden	Marktführer im Norden	Marktführer im Westen
P1	A	A	A	A
P2	A	A	A	B
P3	A	A	A	C
P4	A	A	B	A
P5	A	A	B	B
P6	A	A	B	C
P7	A	B	A	A
P8	A	B	A	B
P9	A	B	A	C
P10	A	B	B	A
P11	A	B	B	B
P12	A	B	B	C
P13	A	C	A	A
P14	A	C	A	B
P15	A	C	A	C
P16	A	C	B	A
P17	A	C	B	B
P18	A	C	B	C
P19	C	A	A	A
P20	C	A	A	B
P21	C	A	A	C
P22	C	A	B	A
P23	C	A	B	B
P24	C	A	B	C
P25	C	B	A	A
P26	C	B	A	B
P27	C	B	A	C
P28	C	B	B	A
P29	C	B	B	B
P30	C	B	B	C
P31	C	C	A	A
P32	C	C	A	B
P33	C	C	A	C
P34	C	C	B	A
P35	C	C	B	B
P36	C	C	B	C

Abb. 1

Diese Entscheidungen können auf $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ verschiedene Weisen gefällt werden, womit die Anzahl der verschiedenen Unterklassen von U gegeben ist. Bitte beachten Sie, daß unsere Formel nicht so einfach gewesen wäre, wenn wir nicht die Unterklasse und die leere Klasse als Unterklassen von U zugelassen hätten.

In dem obigen Beispiel der Marktführerschaft existieren somit 2^{36} oder ungefähr 70 Milliarden Unterklassen. Wir können uns natürlich bei einem praktischen Beispiel nicht mit so vielen Unterklassen beschäftigen. Glück-

licherweise interessieren uns gewöhnlich jedoch nur einige davon. Die interessantesten Unterklassen sind diejenigen, die mit Hilfe einer einfachen Regel wie z. B. „Die Klassen aller logischen Möglichkeiten, in denen C nicht wenigstens Marktführer auf zwei Gebieten ist", definiert werden können. Es wäre demgegenüber recht schwierig, eine einfache Beschreibung der Unterklasse zu geben, die die Elemente

$$\{P1, P4, P14, P30, P34\}$$

enthält. Wir werden allerdings im nächsten Abschnitt sehen, wie man neue Unterklassen mit Hilfe bereits definierter Unterklassen beschreiben kann.

Beispiele. Wir wollen die beiden Möglichkeiten, eine Klasse zu definieren, am Beispiel der Marktführerschaft illustrieren: Die Universalklasse U umfasse alle in Abb. 1 gegebenen logischen Möglichkeiten.

1. Woraus besteht die Unterklasse von U, in der die Gesellschaft B auf mehr Gebieten Marktführer ist als die anderen beiden Gesellschaften?
   Antwort: {P11, P12, P17, P23, P26, P28, P29}.
2. In welcher Unterklasse ist die Führerschaft gleichmäßig aufgeteilt?
   Antwort: {P5, P8, P10, P15, P21, P30, P31, P35}.
3. Beschreiben Sie die Klasse {P1, P4, P19, P22}.
   Antwort: Die Klassen der Möglichkeiten, in denen A im Süden und Westen ist.
4. Wie können wir die Klasse {P18, P24, P27} beschreiben?
   Antwort: Die Klasse der Möglichkeiten, bei denen C Führer im Westen ist und die Führerschaft auf den drei anderen Gebieten sich in drei verschiedenen Weisen aufteilt.

ÜBUNGEN

1. Geben Sie im Rahmen des Marktführerbeispieles eine Enumeration für jede der folgenden Klassen:
   a) Die Klasse, in der C wenigstens in zwei Gebieten Marktführer ist.
   b) Die Klasse, in der im Osten, Süden und Norden die gleiche Gesellschaft Marktführer ist.
   c) Die Klasse, in der B auf allen vier Gebieten Marktführer ist.
2. Ein Unternehmen werde dann als auf dem Markt dominierend angesehen, wenn es in drei Gebieten oder in zwei Gebieten einschließlich des Westens Marktführer ist. Nennen Sie die Klassen, in denen eine dominierende Gesellschaft vorhanden ist.
3. Geben Sie einfache Beschreibungen für die folgenden, auf das Marktführerbeispiel bezogenen Klassen:
   a) {P33, P36}.
   b) {P10, P11, P12, P28, P29, P30}.
   c) {P6, P20, P22}.
4. Ein Unternehmen möchte drei unterschiedliche Reklametexte in aufeinanderfolgenden Ausgaben einer Wochenzeitschrift erscheinen lassen. Die drei Texte, die sich auf das Produkt A beziehen, wollen wir mit A1, A2 und A3 bezeichnen, und

die zwei, die sich auf Produkt B beziehen mit B1 und B2. Man entscheide sich dafür, die Reklametexte des Produktes A und die des Produktes B abwechselnd zu bringen. Nennen Sie die Enumeration der Klasse aller Möglichkeiten.

5. Geben Sie die Enumerationen der folgenden, sich auf die Übung 4 beziehenden Unterklassen.
   a) Die Klasse, in der A1 B2 entweder direkt vorangeht oder folgt.
   b) Die Klasse, in der B2 A2 und A3 entweder direkt vorangeht oder folgt.
   c) Die Klasse, in der A2 an dritter Stelle erscheint.
   d) Die Klasse, in der B1 an dritter Stelle erscheint.
   e) Die Klasse, in der eine Reklame für das Produkt A die Serie beginnt und beendet.

6. Nennen Sie all die Paare aus Übung 5, bei denen eine Klasse eine Unterklasse der anderen ist.

7. Ein Fabrikant von Fernsehapparaten plane eine halbstündige Werbesendung. Sie soll aus amüsanten, musikalischen und kommerziellen Darbietungen bestehen. Bilden Sie die Klasse der möglichen Zeitverteilungen, unter der Voraussetzung, daß jeder Darbietungsart ein Vielfaches von fünf Minuten zugestanden wird. (Ziehen Sie nur die Gesamtzeit je Darbietungsart in Betracht.)

8. Nennen Sie die Enumerationen der folgenden, auf Übung 7 bezogenen Unterklassen:
   a) Die Klasse, in der mehr Zeit für die amüsanten als für die musikalischen Darbietungen verwandt wird.
   b) Die Klasse, bei der den kommerziellen Mitteilungen nicht mehr Zeit gewidmet wird als den musikalischen oder den amüsanten Darbietungen.
   c) Die Klasse, in der den musikalischen Darbietungen genau fünf Minuten gewidmet werden.
   d) Die Klasse, in der alle drei der obengenannten Bedingungen erfüllt werden.

9. Nennen Sie zwei Klassen der Übung 7, die echte Unterklassen der in 8a und in 8c genannten Klassen sind.

2. Das Arbeiten mit Unterklassen

In Kapitel 1 untersuchten wir, wie man aus gegebenen Sätzen neue Sätze bilden kann. Wir werden nun einen dazu analogen Vorgang, die Bildung neuer Klassen aus gegebenen Klassen, betrachten. Dabei wollen wir annehmen, daß jede der in der Verknüpfung enthaltenen Klassen Unterklasse irgendeiner Universalklasse ist, und wir wollen fordern, daß die neugebildete Klasse ebenfalls eine Unterklasse der gleichen Universalklasse ist. Wie schon erwähnt, können wir eine neu gebildete Klasse entweder durch eine definierende Bedingung oder Regel oder durch eine Enumeration definieren.

Sind P und Q zwei Klassen, so definieren wir die neue Klasse $P \cap Q$, die wir *Durchschnitt* von P und Q nennen wollen, wie folgt: $P \cap Q$ ist die Klasse die genau die Elemente enthält, die sowohl zu P als auch zu Q gehören. Betrachten Sie als ein Beispiel die logischen Möglichkeiten der Abb. 1.

P sei die Unterklasse, in der die Gesellschaft A Marktführer in wenigstens drei Gebieten ist, d. h. die Klasse

$$\{P1, P2, P3, P4, P7, P13, P19\}.$$

Q sei die Unterklasse, in der A Marktführer im Osten und im Süden ist, d. h. die Klasse

$$\{P1, P2, P3, P4, P5, P6\}.$$

Unter dem Durchschnitt $P \cap Q$ verstehen wir dann die Klasse, in der beide Bedingungen erfüllt werden, d. h. in der A Marktführer im Osten und Süden *und* mindestens in dreien der Gebiete ist. Die Klasse $P \cap Q$ wird also durch

$$\{P1, P2, P3, P4\} \text{ gebildet.}$$

Es seien P und Q wiederum zwei Klassen. Die neue Klasse $P \cup Q$, die Vereinigung von P und Q heißt, soll dann wie folgt definiert werden: $P \cup Q$ ist die Klasse, die genau die Elemente enthält, die entweder zu P oder zu Q oder zu beiden Klassen gehören. In dem Beispiel des obigen Absatzes ist die Vereinigung $P \cup Q$ die Klasse der Möglichkeiten, für die entweder A der Führer im Osten und im Westen oder der Führer in wenigstens dreien der Gebiete ist, d. h. die Klasse

$$\{P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P13, P19\}.$$

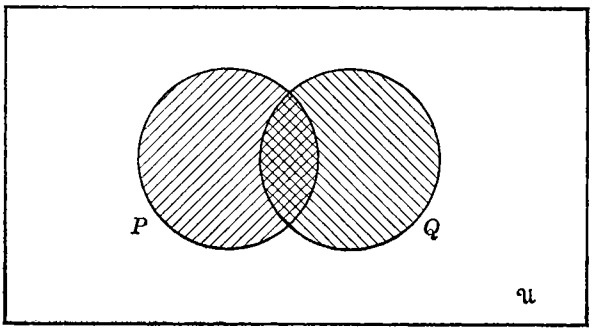


Abb. 2

Diese Vorgänge lassen sich durch das Zeichnen sogenannter Venn Diagramme bildlich darstellen. Die Universalklasse wird durch ein Rechteck symbolisiert und die Unterklassen durch Kreise, die in das Rechteck hineingezeichnet werden. Abb. 2 zeigt die beiden Klassen P und Q als schraffierte Kreise. Die doppelt schraffierte Fläche ist dann der Durchschnitt $P \cap Q$, und die gesamte schraffierte Fläche stellt die Vereinigung $P \cup Q$ dar.

Ist P eine gegebene Unterklasse der Universalklasse U, so können wir eine neue Klasse $\tilde{P}$, genannt Komplement von P, wie folgt definieren: $\tilde{P}$ umfaßt alle die Elemente von U, die *nicht* in P enthalten sind. Ist z. B., wie oben

ausgeführt, Q die Klasse, in der die Gesellschaft A der Marktführer im Osten und Süden ist, dann ist $\tilde{Q}$ die Klasse {P7, P8, . . . P36}. In Abb. 3 stellt die schraffierte Fläche das Komplement der Klasse P dar. Beachten Sie, daß das Komplement der Leerklasse E die Universalklasse U ist und daß das Komplement der Universalklasse die leere Klasse ist.

Es kann durchaus vorkommen, daß uns nur ein Teil des Komplementes einer Klasse interessiert. So mögen wir z. B. an dem Teil des Komplementes der Klasse Q, der in P enthalten ist, d. h. in der Klasse $P \cap \tilde{Q}$, interessiert sein. Diese Klasse wird in Abb. 4 durch die schraffierte Fläche dargestellt.

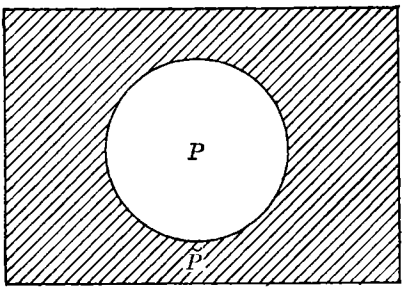


Abb. 3

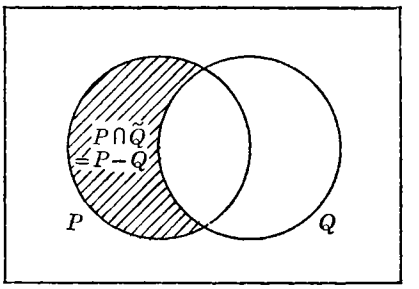


Abb. 4

Eine etwas anschaulichere Definition dieser Klasse ist die folgende: $P - Q$ sei die *Differenz* von P und Q, d. h. die Klasse, die all die Elemente der Klasse P enthält, die nicht zu Q gehören. Wir sehen in Abb. 4, daß durch $P \cap \tilde{Q}$ und $P - Q$ das gleiche Flächenstück bezeichnet wird. In unserem Marktführerbeispiel kann die Klasse $P - Q$ z. B. mit {P7, P13, P19} beschrieben werden.

Da $\tilde{Q} = U - Q$, können wir das Komplement einer Klasse als den Spezialfall einer Differenzklasse ansehen. Sind P und Q nicht leere Klassen, und ist ihre Durchschnittsklasse die Leerklasse, d. h. $P \cap Q = E$, so bezeichnen wir sie als voneinander unabhängig oder durchschnittsfrei.

Beispiele. Betrachten Sie in unserem Marktführerbeispiel die vier Gebiete in der Reihenfolge Ost, Süd, Nord und West, und verstehen Sie unter R die Klasse, in der A der Marktführer in den drei ersten Gebieten ist, d. h. die Klasse {P1, P2, P3}. S sei die Klasse, in der A Führer in den letzten zwei Gebieten ist, d. h. die Klasse

{P1, P7, P13, P19, P25, P31}.

$R \cap S$ = {P1} ist dann die Klasse, in der A sowohl Führer in den drei ersten Gebieten als auch in den zwei letzten Gebieten ist, d. h. A ist Führer in allen Gebieten. Entsprechend ist

$$R \cup S = \{\text{P1, P2, P3, P7, P13, P19, P25, P31}\}$$

die Klasse, in der A Führer in den drei ersten oder den zwei letzten Gebieten ist. Die Klasse, in der A in den ersten drei Gebieten kein Führer ist, ergibt sich zu $\tilde{R} = \{P4, P5, \ldots, P36\}$.
Schließlich ist die Differenz $R - S$ die Klasse, in der A Marktführer in den ersten drei Gebieten, jedoch nicht in den beiden letzten ist. Wir erhalten die Klasse dadurch, daß wir von R das Element {P1}, das die Klasse R mit Klasse S gemeinsam hat, wegnehmen, so daß

$$R - S = \{P2, P3\}.$$

ÜBUNGEN

1. Zeichnen Sie die Venn Diagramme für $P \cap Q$, $P \cap \tilde{Q}$, $\tilde{P} \cap Q$ und $\tilde{P} \cap \tilde{Q}$.
2. Geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Diagramm $(P - Q) \cup (P \cap \tilde{Q})$.
3. Venn Diagramme erweisen sich auch dann als nützlich, wenn drei Unterklassen gegeben sind. Zeichnen Sie ein solches Diagramm für die gegebenen Unterklassen P, Q und R. Bezeichnen Sie jede der acht entstehenden Flächen mit Hilfe von P, Q und R.
4. Bei Blutuntersuchungen werden drei Typen unterschieden: A, B und Rh. Jede Person wird doppelt klassifiziert. Sie ist Rh-positiv, wenn sie den Rhesus-Faktor aufweist, andernfalls Rh-negativ. Entsprechend den anderen Merkmalen ist sie Typ AB, A oder B. Wenn sie weder die A- noch die B-Merkmale aufweist, wird sie als Typ 0 bezeichnet. Zeichnen Sie ein Venn Diagramm und bezeichnen Sie jede der acht Flächen.
5. Betrachten Sie die beiden Unterklassen X und Y. Klasse X umfasse alle Personen, die das Merkmal A aufweisen, Klasse Y diejenigen, die Merkmal B aufweisen. Definieren Sie (symbolisch) die Typen AB, A, B und 0.
6. Eine Person kann dann von einer anderen Blut übertragen bekommen, wenn sie die gleichen Merkmale wie der Spender hat. Beschreiben Sie unter Verwendung der Klassen X und Y die Klasse der Menschen, die jedem der vier Typen Blut spenden können. Bezeichnen Sie diese Klassen durch Blutgruppen.
7.

	Sehr beliebt	Beliebt	Unbeliebt	Sehr unbeliebt
Männer	1	3	5	10
Frauen	6	8	3	1
Jungen	5	5	3	2
Mädchen	8	5	1	1

Die obige Tabelle zeigt die Reaktion einer Anzahl von Zuschauern bei einem Fernsehspiel. Alle Gruppen können durch die folgenden vier Merkmale definiert werden: M (männlich), E (erwachsen), B (beliebt), S (sehr). Wie viele Personen fallen in jede der folgenden Gruppen?

a) M. [Lös.: 34.]
b) $\tilde{B}$.
c) S.
d) $M \cap \tilde{E} \cap \tilde{B} \cap S$. [Lös.: 2.]

e) $\tilde{M} \cap E \cap B$.
f) $(M \cap E) \cup (B \cap S)$.
g) $\widetilde{(M \cap E)}$. [Lös.: 48.]
h) $(M \cup \tilde{E})$.
i) $(M - E)$.
j) $[\tilde{M} - (E \cap B \cap \tilde{S})]$.

8. Bei einer Umfrage bei 100 Familien wurden als Leser für die neuesten Ausgaben verschiedener Zeitschriften folgende Zahlen ermittelt:
Look 28; Time 30; Life 42; Look und Time 8; Look und Life 10; Time und Life 5; alle drei Zeitschriften 3.
a) Wie viele Personen lasen keine der drei Zeitschriften? [Lös.: 20.]
b) Wie viele lasen Life als einzige Zeitschrift? [Lös.: 30.]
c) Wie viele lasen dann und nur dann die Time, wenn sie auch Life lasen? [Lös.: 38.]

9. Bei einer anderen Umfrage bei 100 Familien, bei der gefragt wurde, wer die neuesten Ausgaben einer bestimmten Monatszeitschrift gelesen hatte, wurden folgende Zahlen ermittelt: Nur September 18; September, aber nicht August 23; September und Juli 8; September 26; Juli 48; Juli und August 8; keinen der drei Monate 24.
a) Wie viele lasen die Augustausgabe? [Lös.: 18.]
b) Wie viele lasen zwei aufeinanderfolgende Ausgaben? [Lös.: 8.]
c) Wie viele lasen die Juliausgabe dann und nur dann, wenn sie die Augustausgabe nicht lasen? [Lös.: 50.]
d) Wie viele lasen die September- und Augustausgabe, aber nicht die Juliausgabe? [Lös.: keiner.]

10. Ein Prüfer, der ein Los von 100 Stücken auf Härte, Oberflächenbeschaffenheit und Abmessungen hin zu prüfen hatte, gab folgenden Bericht: alle drei Fehler 5; Härte und Oberfläche 10; Abmessung und Oberfläche 8; Abmessung und Härte 20; Oberfläche 30; Härte 23; Abmessung 50. Der Prüfer wurde fristlos entlassen. Warum?

11. Die Arbeiter einer Fabrik werden nach ihrer Geschicklichkeit, der Anzahl der Jahre ihrer Werksangehörigkeit und nach der Art der durch sie verrichteten Arbeit (produktiv oder unproduktiv) klassifiziert. Sind sie weniger als drei Jahre in der Fabrik, so werden sie durch „kurz", gehören sie dem Werk länger als 10 Jahre an durch „lang" und alle übrigen durch „mittel" symbolisiert. Die folgende Tabelle zeige die ermittelten Werte:

	Geschickt u. produktiv	Ungeschickt u. produktiv	Geschickt u. unproduktiv	Ungeschickt u. unproduktiv
Kurz	6	9	10	20
Mittel	7	11	15	9
Lang	2	3	8	0

Es bedeute K = kurz, M = mittel, L = lang, G = geschickt, U = unproduktiv. Bestimmen Sie die Anzahl der in folgenden Klassen enthaltenen Arbeiter:
a) $K \cap G \cap U$. [Lös.: 10.]
b) M.
c) $L \cup U$.
d) $(M \cup L) \cap (G \cup U)$. [Lös.: 41.]
e) $\widetilde{\tilde{K} \cup (\tilde{G} \cap U)}$.

12. Nennen Sie die jeweils größere Klasse der folgenden Paare:

a) $(\widetilde{K \cup M})$ oder L?
b) $U \cap \tilde{G}$ oder $K - (U \cap G)$?
c) E oder $L \cap \tilde{G} \cap U$?

3. Das Verhältnis von Klassen zu Satzverknüpfungen

Es wird dem Leser in den vorangehenden Abschnitten des öfteren aufgefallen sein, daß zwischen Klassen und Sätzen und zwischen dem Umgang mit Klassen und dem mit Sätzen eine Verbindung besteht. In dem vorliegenden Abschnitt wollen wir diese Zusammenhänge schematisieren.

Beim Betrachten einer Anzahl von Sätzen gibt es einen natürlichen Weg, jeden dieser Sätze einer Klasse zuzuordnen: Wir bilden zunächst die Klasse aller logischen Möglichkeiten der betrachteten Sätze und nennen diese Klasse dann die „Universalklasse". Jedem Satz ordnen wir dann die Unterklasse der logischen Möglichkeiten der Universalklasse zu, für die er wahr ist. Dieses Vorgehen ist für die weiteren Ausführungen so wichtig, daß wir es formal festlegen wollen:

Definition. p, q, r, ... seien Sätze und U die Klasse ihrer logischen Möglichkeiten; P, Q, R, ... seien die Unterklassen von U, für die die Sätze p, q, r, ... wahr sind. Wir nennen dann P, Q, R, ... die *Wahrheitsklassen* der Sätze p, q, r, ...

Wenn p und q Sätze sind, dann sind auch $p \wedge q$ und $p \vee q$ Sätze. Ihnen müssen also auch Wahrheitsklassen zuzuordnen sein. Um die Wahrheitsklasse von $p \vee q$ zu finden, gehen wir davon aus, daß dieser Satz immer dann wahr ist, wenn p oder q oder beide wahr sind. Wir müssen daher $p \vee q$ die logischen Möglichkeiten zuordnen, die in P oder in Q (oder in beiden) enthalten sind, d. h. wir müssen $p \vee q$ die Klasse $P \cup Q$ zuordnen. Auf der anderen Seite ist der Satz $p \wedge q$ nur dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr ist, so daß wir hier die Klasse $P \cap Q$ zuzuordnen haben.

Wir sehen also, daß eine enge Verbindung zwischen der logischen Disjunktion und der klassenlogischen Bezeichnung der Vereinigung und zwischen der Konjunktion und dem Durchschnitt besteht. Eine sorgfältige Untersuchung der Definition der Vereinigung und des Durchschnitts zeigt, daß in der Definition der Vereinigung das Wort „oder" und in der Definition des Durchschnitts das Wort „und" vorkommt. Die Verbindung zwischen diesen beiden Theorien ist daher nicht überraschend.

Da wir in der Definition des Komplementes einer Klasse auf das Wörtchen „nicht" stoßen, wird es auch nicht sonderlich überraschen, wenn wir sehen,

daß die Wahrheitsklasse von $\sim p$ $\tilde{P}$ ist. Das wiederum folgt aus der Tatsache, daß $\sim p$ dann wahr ist, wenn p falsch ist. Die Wahrheitsklasse von $\sim p$ umfaßt also alle logischen Möglichkeiten, für die p falsch ist. Mit anderen Worten, die Wahrheitsklasse von $\sim p$ ist $\tilde{P}$.

Abb. 5 zeigt die Wahrheitsklassen zweier Sätze p und q. Die Abbildung zeigt ferner die verschiedenen logischen Möglichkeiten dieser zwei Sätze. Der Leser kann diesem Diagramm die Wahrheitsklassen der Sätze $p \vee q$, $p \wedge q$, $\sim p$ und $\sim q$ selbst entnehmen.

Der Zusammenhang zwischen einem Satz und seiner Wahrheitsklasse macht es möglich, ein Problem des Satzverknüpfung in ein Klassenproblem „zu übersetzen". Es ist gleichfalls möglich, den umgekehrten Weg zu gehen: Wird ein Klassenproblem gegeben, so denke man an die Universalklasse als die Klasse der logischen Möglichkeiten und an die Wahrheitsklasse eines Satzes als eine Unterklasse. So können wir auch ein Klassenproblem in ein Problem der Satzverknüpfungen „übersetzen".

Bis jetzt haben wir nur die Wahrheitsklassen betrachtet, die den mit den Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$ und $\sim$ gebildeten Satzverknüpfungen zugeordnet sind. Da alle anderen Verknüpfungen mit Hilfe dieser drei definiert werden können, ist es nicht schwierig abzuleiten, welche Wahrheitsklassen den anderen zuzuordnen sind. Wir wissen z. B., daß $p \to q$ äquivalent $\sim p \vee q$ ist (siehe Abb. 32 des ersten Kapitels). Die Wahrheitsklasse von $p \to q$ ist daher die gleiche wie die von $\sim p \vee q$, d. h. $\tilde{P} \cup Q$. Abb. 6 zeigt das Venn Dia-

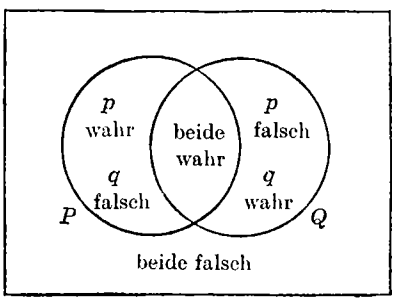


Abb. 5

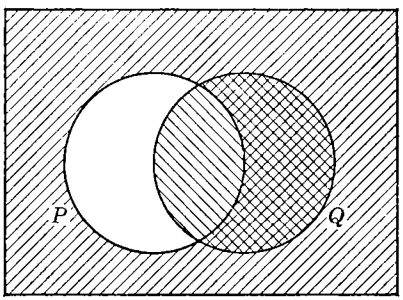


Abb. 6

gramm für $p \to q$. Die schraffierte Fläche stellt dabei die Wahrheitsklasse des Satzes dar. Bitte beachten Sie, daß die nicht schraffierte Fläche in Abb. 6 der Klasse $P - Q = P \cup \tilde{Q}$ entspricht, also der Wahrheitsklasse des Satzes $p \wedge \sim q$. Die schraffierte Fläche ist also die Klasse $\widetilde{(P - Q)} = \widetilde{P \cap \tilde{Q}}$, die Wahrheitsklasse des Satzes $\sim[p \wedge \sim q]$.

Damit sind wir auf die Tatsache gestoßen, daß $(p \to q)$, $(\sim p \vee q)$ und $\sim(p \wedge \sim q)$ äquivalent sind. Ganz allgemein sind zwei Satzverknüpfungen immer dann und nur dann äquivalent, wenn sie die gleichen Wahrheitsklassen haben. Wir sehen also, daß Venn Diagramme dazu benutzt werden können, die zwischen verschiedenen Sätzen bestehenden Beziehungen zu untersuchen.

Nehmen Sie an, p sei ein logisch wahrer Satz. Welche Wahrheitsklasse ist ihm zuzuordnen? Nun, p ist dann und nur dann logisch wahr, wenn es in jedem logisch möglichen Fall wahr ist, so daß U die Wahrheitsklasse von p sein muß. Ist p logisch falsch, dann ist es entsprechend für jeden logisch möglichen Fall falsch, so daß seine Wahrheitsklasse die leere Klasse E sein muß.

Schließlich wollen wir das Verhältnis der Implikation betrachten: Bitte rufen Sie sich ins Gedächtnis zurück, daß p nur dann q impliziert, wenn die Bedingung $p \to q$ logisch wahr ist; $p \to q$ ist aber dann und nur dann logisch wahr, wenn seine Wahrheitsklasse U ist, d. h. wenn $\widetilde{(P - Q)} = U$ oder $(P - Q) = E$. In Abb. 4 können wir sehen, daß dann, wenn $P - Q$ eine leere Klasse ist, P in Q enthalten ist. Wir werden das vorliegende Verhältnis wie folgt symbolisieren: $P < Q$ bedeute „P ist eine Unterklasse von Q". Daraus schließen wir, daß $p \to q$ dann und nur dann logisch wahr ist, wenn $P < Q$ gilt.

Wir wollen die obige Diskussion kurz zusammenfassen: Jedem Satz entspricht eine Wahrheitsklasse. Jedem Verhältnis zwischen Sätzen entspricht ein Verhältnis zwischen den Wahrheitsklassen. Die Wahrheitsklassen der Sätze $p \vee q$, $p \wedge q$, $\sim p$ und $p \to q$ sind $P \cup Q$, $P \cap Q$, $\tilde{P}$ bzw. $\widetilde{(P - Q)}$. Der Satz P ist logisch wahr, wenn $P = Q$ logisch falsch ist, d. h. wenn $P = E$. Die Aussagen p und q sind dann und nur dann äquivalent, wenn $P = Q$. Schließlich impliziert p dann und nur dann q, wenn $P < Q$ gilt.

Beispiel 1. Beweisen Sie mit Hilfe eines Venn Diagrammes, daß der Satz $[p \vee (\sim p \vee q)]$ logisch wahr ist.

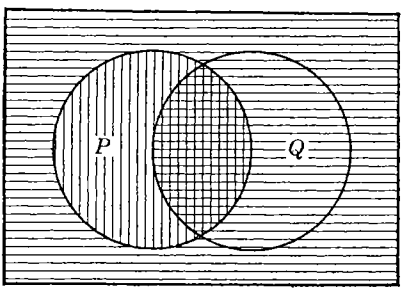


Abb. 7

Die diesem Satz entsprechende Klasse ist $[P \cup (\tilde{P} \cup Q)]$, deren Venn Diagramm Abb. 7 zeigt. In dieser Abbildung ist die Klasse P vertikal und die Klasse $\tilde{P} \cup Q$ horizontal schraffiert. Ihre „Vereinigung" ist die gesamte schraffierte Fläche, nämlich U, d. h. die Satzverknüpfung ist logisch wahr.

Beispiel 2. Beweisen Sie mit Hilfe eines Venn Diagrammes, daß $p \vee (q \wedge r)$ äquivalent $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ist. Der Wahrheitsklasse von $p \vee (q \wedge r)$ entspricht die ganze, in Abb. 8 schraffierte Fläche und der Wahrheitsklasse von $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ die doppelt schraffierte Fläche in Abb. 9. Aus der Tatsache, daß diese zwei Fächen deckungsgleich sind, können wir schließen, daß die zwei Sätze äquivalent sind.

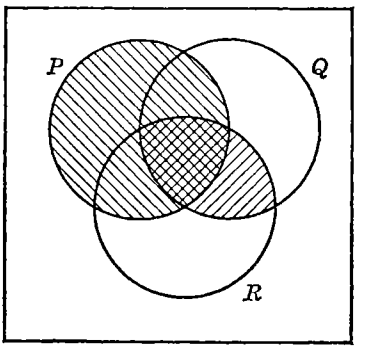


Abb. 8

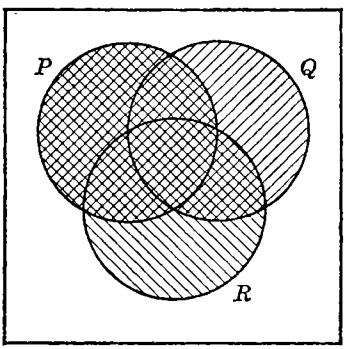


Abb. 9

Beispiel 3. Zeigen Sie mit Hilfe eines Venn Diagrammes, daß $p \to q$ von q impliziert wird.
Die Wahrheitsklasse von $p \to q$ wird durch die in Abb. 6 schraffierte Fläche dargestellt. Da diese schraffierte Fläche die Klasse Q einschließt, wird $p \to q$ von q impliziert.

ÜBUNGEN

Hinweis: Bestimmen Sie in den Übungen 1, 2 und 3 zunächst die Wahrheitsklasse jedes Satzes.

1. Untersuchen Sie mit Hilfe von Venn Diagrammen, welche der folgenden Sätze logisch wahr und welche logisch falsch sind.
   a) $p \vee \sim p$.
   b) $p \wedge \sim p$.
   c) $p \vee (\sim p \wedge q)$.
   d) $p \to (q \to p)$.
   e) $p \wedge \sim (q \to p)$. [Lös.: a), d) logisch wahr; e) logisch falsch.]
2. Untersuchen Sie die folgenden Sätze mit Hilfe von Venn Diagrammen auf Äquivalenzen.
   a) $p \vee \sim q$.
   b) $\sim (p \wedge q)$.
   c) $\sim (q \wedge \sim p)$.
   d) $p \to \sim q$.
   e) $\sim p \vee \sim q$. [Lös. a) und e) äquivalent; b), d) und e) äquivalent.]

3. Untersuchen Sie mit Hilfe von Venn Diagrammen, ob bei den folgenden Satzpaaren ein Satz den anderen impliziert.
   a) p; $p \wedge q$.
   b) $p \wedge \sim q$; $\sim p \rightarrow \sim q$.
   c) $p \rightarrow q$; $q \rightarrow p$.
   d) $p \wedge q$; $p \wedge \sim q$.

4. Ein Satzpaar wird dann als widersprüchlich bezeichnet, wenn nicht beide Sätze gleichzeitig wahr sein können. Entwerfen Sie eine Untersuchungsmethode hinsichtlich Widersprüchlichkeit.

5. Drei oder mehr Sätze werden dann als widersprüchlich bezeichnet, wenn sie nicht alle gleichzeitig wahr sein können. Was sagt dies bezüglich ihrer Wahrheitsklassen?

6. a) Ordnen Sie den Komponenten der folgenden drei Satzverknüpfungen Variable zu; b) schreiben Sie die Sätze in symbolischer Form; c) bestimmen Sie die Wahrheitsklassen; und d) untersuchen Sie sie auf Widersprüchlichkeit hin:
   Wenn dies ein gutes Seminar ist, dann will ich dafür hart arbeiten.
   Wenn dies kein gutes Seminar ist, dann werde ich keine schlechte Abschlußzensur erhalten.
   Ich werde nicht sehr hart arbeiten, aber ich werde eine gute Abschlußzensur in diesem Seminar erhalten. [Lös.: Widersprüchlich.]
   Hinweis: Ordnen Sie in den Übungen 7—9 jeder Klasse den Satz zu, dessen Wahrheitsklasse sie ist

7. Prüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der folgenden Klassen leere Klassen sind.
   a) $(P \cup Q) \cap (\tilde{P} \cup \tilde{Q})$.
   b) $(P \cap Q) \cap (\tilde{Q} \cap R)$.
   c) $(P \cap Q) - P$.
   d) $(P \cup R) \cap (\tilde{P} \cup \tilde{Q})$. [Lös. b) und c).]

8. Prüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, ob sich die folgenden Klassen alle voneinander unterscheiden.
   a) $P \cap (Q \cup R)$.
   b) $(R - Q) \cup (Q - R)$.
   c) $(R \cup Q) \cap \widetilde{(R \cap Q)}$.
   d) $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$.
   e) $(P \cap Q \cap \tilde{R}) \cup (P \cap \tilde{Q} \cap R) \cup (\tilde{P} \cap Q \cap \tilde{R}) \cup (\tilde{P} \cap \tilde{Q} \cap R)$.

9. Prüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, ob bei den folgenden Klassenpaaren die eine Klasse Unterklasse der anderen ist.
   a) P; $P \cap Q$.
   b) $P \cap \tilde{Q}$; $Q \cap \tilde{P}$.
   c) $P - Q$; $Q - P$.
   d) $\tilde{P} \cap \tilde{Q}$; $P \cup Q$.

10. Zeigen Sie sowohl unter Verwendung von Wahrheitstafeln als auch durch die Verwendung von Venn Diagrammen, daß $p \wedge (q \vee r)$ äquivalent $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ist.

4*. Die Operationsregeln der Klassenlogik

Wir wollen in diesem Abschnitt die sehr einfachen Gesetzmäßigkeiten behandeln, denen die von uns beschriebenen Klassenoperationen genügen. Diese Gesetze können mit Hilfe von Venn Diagrammen bewiesen werden, und sie können in Sätze übersetzt und mit Hilfe von Wahrheitstafeln überprüft werden.

Die Gesetze, auf die wir nun eingehen wollen, ähneln sehr stark den Grundgesetzen der Algebra, die dem Leser bereits vertraut sind. Diese Ähnlichkeit wird noch deutlicher, wenn man $\cup$ durch „$+$“, $\cap$ durch „$\times$“, U durch „1“ und E durch „0“ ersetzt. Wir sehen daher eine Klasse, ihre Unterklassen sowie die Gesetze der Kombination von Unterklassen als ein algebraisches System an. Nach dem englischen Mathematiker George Boole, der diese Zusammenhänge als erster vom algebraischen Standpunkt aus studierte, nennt man sie auch Boolesche Algebra. Dazu wird auch jedes andere System gerechnet, das diesen Gesetzen gehorcht, wie z. B. das in Kapitel 1 diskutierte System der Satzverknüpfung. Alle diese Systeme können entweder vom algebraischen oder logischen Standpunkt aus betrachtet werden.

Im folgenden finden Sie eine Aufstellung der grundlegenden Gesetze Boolescher Algebra. Die Beweise dieser Gesetze sollen später im Rahmen der Übungen durchgeführt werden:

Gesetze der „Vereinigung“ und des „Durchschnittes“:

A1. $A \cup A = A.$
A2. $A \cap A = A.$
A3. $A \cup B = B \cup A.$
A4. $A \cap B = B \cap A.$
A5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$
A6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
A7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
A8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
A9. $A \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}.$
A10. $A \cap \mathscr{E} = \mathscr{E}.$
A11. $A \cap \mathfrak{U} = A.$
A12. $A \cup \mathscr{E} = A.$

Gesetze des „Komplementes“:

B1. $\tilde{\tilde{A}} = A.$
B2. $A \cup \tilde{A} = \mathfrak{U}.$
B3. $A \cap \tilde{A} = \mathscr{E}.$
B4. $\widetilde{(A \cup B)} = \tilde{A} \cap \tilde{B}.$
B5. $\widetilde{(A \cap B)} = \tilde{A} \cup \tilde{B}.$
B6. $\tilde{\mathfrak{U}} = \mathscr{E}.$

Gesetze der „Differenz“:

C1. $A - B = A \cap \tilde{B}$.
C2. $\mathfrak{U} - A = \tilde{A}$.
C3. $A - \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$.
C4. $A - \mathfrak{E} = A$.
C5. $\mathfrak{E} - A = \mathfrak{E}$.
C6. $A - A = \mathfrak{E}$.
C7. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.
C8. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
C9. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.
C10. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

ÜBUNGEN

1. Überprüfen Sie die in Gruppe A1 bis A12 angegebenen Gesetze mit Hilfe von Venn Diagrammen.
2. „Übersetzen“ Sie die Gesetze unter A1 bis A12 in Gesetze der Satzverknüpfungen. Prüfen Sie diese mit Hilfe von Wahrheitstafeln nach.
3. Überprüfen Sie die Gesetze der Gruppe B und C mit Hilfe von Venn Diagrammen.
4. „Übersetzen“ Sie die B- und C-Gesetze der Satzverknüpfungen, und überprüfen Sie diese mit Hilfe von Wahrheitstafeln.
5. Leiten Sie die folgenden Resultate aus den 28 grundlegenden Gesetzen ab.
   a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \tilde{B})$.
   b) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap B)$.
   c) $A \cap (A \cup B) = A$.
   d) $A \cup (\tilde{A} \cap B) = A \cup B$.
6. Leiten Sie C2 bis C6 aus den A- und B-Gesetzen und aus C1 ab.
7. Leiten Sie mit Hilfe von A1 bis A12 und C2 bis C10 die Gesetze B1, B2, B3 und B6 ab.

5*. Wahlkoalitionen

Wir wollen nun die Rolle der Wahlkoalitionen innerhalb von Wahlkörperschaften als eine Anwendung unserer Klassenkonzepte betrachten. Hier wird die Universalklasse durch alle die Personen gebildet, die einer entscheidungsfällenden Körperschaft angehören. So mag z. B. die Universalklasse aus den Mitgliedern eines Komitees, des Stadtrates, des Bundestages u. a. bestehen. Für die Entscheidung, ob eine bestimmte Maßnahme durchgeführt werden soll oder nicht, kann die einfache Mehrheit oder die 2/3-Mehrheit Voraussetzung sein.

Nehmen Sie nun an, daß eine Unterklasse der Mitglieder der Körperschaft eine Koalition bilde, um eine Maßnahme durchzusetzen. Je nachdem, ob sie über genügend Stimmen verfügt, um die Maßnahme durchzusetzen oder nicht, bezeichnen wir sie als eine *gewinnende Koalition* oder als eine *verlierende Koalition.* Sind schließlich weder die Mitglieder der Koalition noch die ihr nicht angehörenden Personen in der Lage, die Maßnahme durchzusetzen, so bezeichnen wir die Koalition als eine *blockierende Koalition.*

Lassen Sie uns diese Definitionen noch einmal in klassentheoretischer Form wiederholen: Eine Koalition C wird als gewinnend bezeichnet, wenn sie über genug Stimmen verfügt, um etwas durchzusetzen. Koalition C ist eine verlierende Koalition, wenn die Koalition $\tilde{C}$ eine gewinnende ist; und schließlich ist Koalition C dann blockierend, wenn weder C noch $\tilde{C}$ eine gewinnende Koalition ist.

Aus den soeben gegebenen Definitionen ergeben sich folgende Konsequenzen: Das Komplement einer gewinnenden Koalition ist eine verlierende Koalition. Das Komplement einer verlierenden Koalition ist eine gewinnende Koalition, und das Komplement einer blockierenden Koalition ist eine blockierende Koalition.

Beispiel 1. Ein Komitee bestehe aus sechs Männern, von denen jeder eine Stimme habe. Für eine Entscheidung genüge die einfache Mehrheit. In diesem Fall ist jede Koalition mit vier oder mehr Mitgliedern eine gewinnende, jede Koalition mit ein oder zwei Mitgliedern eine verlierende und jede Koalition mit drei Mitgliedern eine blockierende Koalition.

Beispiel 2. Nehmen Sie an, daß im Zweifelsfall in Beispiel 1 die Stimme eines bestimmten Mitgliedes (z. B. des Vorsitzenden) den Ausschlag gäbe. In diesem Fall ist jede Drei-Personen-Koalition, deren Mitglied es ist, eine gewinnende, während die andere Drei-Personen-Koalition eine verlierende Koalition ist. Es existieren daher keine blockierenden Koalitionen. Die anderen Fälle entsprechen genau den in Beispiel 1 genannten.

Beispiel 3. Die Universalklasse U sei die Klasse $\{x, y, w, z\}$, wobei x und y je eine Stimme, w zwei Stimmen und z drei Stimmen habe. Nehmen Sie an, es seien fünf Stimmen notwendig, um eine Maßnahme zu beschließen. Die gewinnenden Koalitionen sind dann: $\{z, w\}$, $\{z, x, y\}$, $\{z, w, x\}$, $\{z, w, y\}$ und U. Die verlierenden Koalitionen sind jeweils die Komplemente dieser Klassen. Blockierende Koalitionen sind: $\{z\}$, $\{z, x\}$, $\{z, y\}$, $\{w, x\}$, $\{w, y\}$ und $\{w, x, y\}$.

Das letzte Beispiel zeigt, daß man nicht immer alle Mitglieder einer Koalition anführen muß. Gewinnt z. B. die Koalition $\{z, w\}$, so ist offensichtlich die Koalition $\{z, w, y\}$ ebenfalls eine gewinnende Koalition. Ganz allgemein kann man sagen, daß, wenn eine Koalition C gewinnt, dann jede andere Klasse, die C zur Unterklasse hat, ebenfalls eine gewinnende Koalition ist. Das führt uns zum Begriff der *minimalgewinnenden* Koalition. Eine minimalgewinnende Koalition ist eine gewinnende Koalition, die keine weiteren

echten Unterklassen enthält. Mit anderen Worten, als eine minimalgewinnende Koalition wird eine gewinnende Koalition bezeichnet, die beim Verlust eines Mitgliedes keine gewinnende Koalition mehr ist.

Kennen wir die minimalgewinnenden Koalitionen, so verfügen wir über jede für uns wichtige Information bezüglich des Wählproblemes. Gewinnende Koalitionen sind all jene Klassen, die eine minimalgewinnende Koalition enthalten, und verlierende Klassen sind die jeweiligen Komplemente einer gewinnenden Koalition. Alle anderen Klassen sind blockierende Koalitionen.

In Beispiel 1 sind alle Viererklassen minimalgewinnende Koalitionen. In Beispiel 2 bilden die Dreierklassen, denen der Vorstandsvorsitzende angehört, und die Viererklassen ohne den Vorsitzenden die minimalgewinnende Koalition. Im dritten Beispiel sind die Klassen $\{z, w\}$ und $\{z, x, y\}$ die minimalgewinnenden Koalitionen.

Manchmal verfügen Ausschußmitglieder über besondere Rechte oder über weniger Rechte als die anderen. Kann ein Mitglied jede Maßnahme durchsetzen, ohne die Zustimmung eines anderen dazu zu haben, dann nennen wir es einen *Diktator*. Das Mitglied x ist also dann und nur dann ein Diktator, wenn $\{x\}$ eine gewinnende Koalition ist. Ein etwas schwächeres, aber immerhin noch sehr machtvolles Mitglied ist dasjenige, das von sich aus jede Maßnahme blockieren kann. Wir bezeichnen dieses Recht als ein *Vetorecht*. x hat also dann und nur dann ein Vetorecht, wenn $\{x\}$ eine blockierende Koalition ist. Ist schließlich x kein Mitglied irgendeiner minimalgewinnenden Koalition, so nennen wir es ein stimmloses Mitglied. x ist also dann und nur dann stimmlos, wenn eine gewinnende Koalition, deren Mitglied x ist, auch ohne x eine gewinnende Koalition bildet.

Beispiel 4. Ein interessantes Beispiel einer entscheidungsfällenden Körperschaft ist der Sicherheitsrat der Vereinten Nationen. Dem Sicherheitsrat gehören 11 Mitglieder an, und zwar die fünf permanenten Vertreter der großen Nationen, genannt die „großen Fünf", und sechs Vertreter kleinerer Nationen. Um eine Maßnahme durchzuführen, müssen sieben Mitglieder einschließlich der „großen Fünf" für die Maßnahme stimmen. Die Siebenerklassen, die aus den großen Fünf und zwei kleinen Nationen bestehen, sind also die minimalgewinnenden Koalitionen. Die verlierenden Koalitionen enthalten höchstens vier kleine Nationen. Die blockierenden Koalitionen sind jene Klassen, die weder gewinnen noch verlieren. Insbesondere ist eine Einer-Klasse, die einen der großen Fünf enthält, eine blockierende Koalition. In diesem Sinne hat jeder der Vertreter der großen Fünf ein Vetorecht (die Möglichkeit der Stimmenthaltung soll hier vernachlässigt werden).

Beispiel 5. In einem Unternehmen werden die Direktoren nach einem als „kumulatives Wählen" bekannten System gewählt. Bei diesem System verfährt man wie folgt: Nehmen Sie an, es gäbe s Aktien mit Stimmrecht und es seien d Direktorenposten bei einer bestimmten Wahl zu besetzen. Jede Aktie habe d Stimmen, die ohne jede Einschränkung verteilt werden können. Das heißt, die d Stimmen einer Aktie können so verteilt werden, daß jeder Kandidat eine bekommt, oder sie können so kumuliert

werden, daß ein Kandidat d Stimmen erhält. Die Kandidaten werden dann gemäß der erreichten Stimmenzahl geordnet, und die d Personen mit den höchsten Stimmenzahlen gewinnen die Wahl. Was ist nun eine minimalgewinnende Koalition, die eine bestimmte Person als Direktor wählen kann?

Nehmen Sie an, der Koalition stehen t Aktien zur Verfügung; d. h. der von der Koalition gewählte Kandidat wird wenigstens $t \cdot d$ Stimmen erhalten. Die anderen Aktionäre besitzen $s - t$ Aktien, d. h. $(s - t) \cdot d$ Stimmen. Jeder der d anderen Kandidaten müßte wenigstens $t \cdot d$ Stimmen erhalten, wenn unser Kandidat verlieren soll. Das ist jedoch nur möglich, wenn

$$(s - t)\, d \geqq (td) \cdot d \text{ oder } dt \leqq (s - t).$$

Die Koalition kann für die Wahl des Kandidaten also dann garantieren, wenn $dt > s - t$ oder

$$t > \frac{1}{d+1}\, s \text{ ist.}$$

Das bedeutet, sie muß mehr als $1/(d+1)$ der Aktien kontrollieren. Wenn sie nur $s/(d+1)$ Aktien oder gar weniger besitzt, dann sehen wir aus der Formel $(s - t) \cdot d > (t \cdot d) \cdot d$, daß die Opposition ihre Stimmen so unter die anderen Kandidaten aufteilen kann, daß entweder unser Kandidat verliert oder ein Unentschieden erreicht wird.

Sollen z. B. sechs Direktoren gewählt werden, und sind 700000 Aktien vorhanden, dann bilden 100001 Aktien eine minimalgewinnende Koalition.

ÜBUNGEN

1. Ein Ausschuß bestehe aus den Mitgliedern w, x, y und z. Mitglied w verfüge über zwei Stimmen und alle anderen Mitglieder über eine. Geben Sie die gewinnenden, verlierenden und blockierenden Koalitionen an.

2. Ein Ausschuß bestehe aus n Mitgliedern mit je einer Stimme. Für die Durchführung einer Maßnahme solle ein Mehrheitsbeschluß Voraussetzung sein. Welche gewinnenden, verlierenden und blockierenden Koalitionen sind vorhanden?

3. Der Haushaltsausschuß der Stadt New York besteht aus acht Mitgliedern, die jeweils über folgende Stimmen verfügen:

s.	Oberbürgermeister	4 Stimmen
t.	Verwaltungsdirektor	4 Stimmen
u.	Präsident der Stadtverordneten	4 Stimmen
v.	Bürgermeister des Bezirks Brooklyn	2 Stimmen
w.	Bürgermeister des Bezirks Manhatten	2 Stimmen
x.	Bürgermeister des Bezirks Bronx Borough	2 Stimmen
y.	Bürgermeister des Bezirks Richmond Borough	2 Stimmen
z.	Bürgermeister des Bezirks Queens Borough	2 Stimmen

   Für die Beschlußfassung ist eine einfache Mehrheit erforderlich. Geben Sie die minimalgewinnenden und die blockierenden Koalitionen an. Was ändert sich, wenn der Oberbürgermeister bei Stimmgleichheit den Ausschlag gibt?

4. Das Aktienkapital eines Unternehmens bestehe aus 100000 Aktien mit je einer Stimme. Über wieviel Aktien muß ein Aktionär verfügen, um Diktator zu sein? Wieviel muß er besitzen, um ein Vetorecht zu haben? [Lös.: 50001; 50000.]

5. Bei der in Übung 4 erwähnten Gesellschaft werde für die Beschlußfällung eine 2/3-Mehrheit verlangt. Wie viele Aktien muß ein Aktionär besitzen, um Diktator zu sein oder über ein Vetorecht zu verfügen?
   [Lös.: wenigstens 66667; wenigstens 33334.]

6. Beweisen Sie, daß die Mitglieder eines Ausschusses, dem ein Diktator angehört, machtlos sind.
7. In Analogie zur minimalgewinnenden können wir eine „maximalverlierende" Koalition definieren. Welche Beziehung besteht zwischen der maximalverlierenden und minimalgewinnenden Koalition? Enthält die Angabe aller maximal verlierenden Koalitionen alle relevanten Informationen?
8. Beweisen Sie, daß jeweils zwei minimalgewinnende Koalitionen mindestens ein gemeinsames Mitglied haben.
9. Nennen Sie alle blockierenden Koalitionen im Beispiel 3.
10. Beweisen Sie, daß die Verteilung der übrigen Stimmen irrelevant ist, wenn eine Person ein Vetorecht hat und sie zusammen mit irgendeiner anderen Person jeden Beschluß durchführen kann.
11. Die *XYZ* Gesellschaft wähle ihre Direktoren nach einem kumulativen System. Welche minimalgewinnende Koalition ist für die Wahl zum Direktor notwendig, wenn fünf Direktorenposten zu besetzen sind und 1000 Aktien stimmberechtigt sind?
12. Zeigen Sie, daß die Anzahl t_n der Aktien, die benötigt werden, um $n < d$ Direktorenposten bei kumulativer Wahl zu besetzen, das kleinste t_n ist, für das $t_n > ns/(d+1)$ ist. (Aus Gründen der Einfachheit sei die Abgabe von Teilstimmen erlaubt.)
13. Zeigen Sie, daß eine minimalgewinnende Koalition, um eine Mehrheit der Direktorenposten zu gewinnen, aus mehr als der Hälfte der Aktien besteht, wenn die Anzahl der zu besetzenden Posten ungerade ist, daß dies jedoch dann nicht der Fall ist, wenn die Anzahl der zu besetzenden Posten gerade ist.
14. Bei einer Listenwahl von Direktoren habe jede Aktie eine Stimme. Diese Stimme sei für eine gesamte Kandidatenliste abzugeben, auf der genausoviel Personen stehen, wie Direktorenposten zu besetzen sind. Wie groß ist bei dieser Listenwahl eine minimalgewinnende Koalition zur Wahl eines einzelnen Direktors? Einer Mehrheit der Direktoren? Einer gesamten Kandidatenliste?

6*. Methode des kritischen Weges[1])

Eine Planung und Koordination von Tätigkeiten wird immer dann erforderlich, wenn Aufgaben durch viele verschiedene Personen oder Personengruppen, eventuell mit Hilfe von Maschinen u. ä., gelöst werden sollen. Einige der Tätigkeiten können simultan (parallel) gelöst werden, während andere Tätigkeiten in einer bestimmten Aufeinanderfolge (in Reihe) gelöst werden müssen. Im allgemeinen wird die Planung vom Leiter des Projektes durchgeführt, der auch den Arbeitsfortschritt kontrolliert.

---

[1] [Diese Technik, im amerikanischen Pert-Programm Evaluation and Review Technique- oder CPM = Critical Path Method genannt, wird in der deutschen Literatur auch als „Netzplantechnik" oder „Optimale Projekt Fortschrittsplanung" bezeichnet. Der Übersetzer.]

Solange alles programmgemäß abläuft, arbeitet diese Koordinationsmethode gewöhnlich zufriedenstellend. Gerät der Arbeitsablauf gegenüber dem Plan jedoch in Rückstand, oder muß die Arbeitsgeschwindigkeit aus irgendeinem Grunde erhöht werden, so ist eine bessere Methode wünschenswert. Das grundlegende Werkzeug für diese bessere Methode ist das Ablaufdiagramm, das wir im folgenden beschreiben werden. Das gesamte Verfahren wird gemeinhin als Methode des kritischen Weges bezeichnet. Wir wollen zunächst eine Anzahl technischer Ausdrücke erläutern:

Definition: Ein *Projekt* ist eine nicht leere Klasse von Arbeitsgängen $\{a, b, c, \ldots\}$, denen jeweils eine bestimmte *Zeit* zugeordnet ist und von denen jeder der Vorangehende anderer Arbeitsgänge ist.

So mögen z. B. die Arbeitsgänge die einzelnen Tätigkeiten darstellen, die ausgeführt werden müssen, um ein Haus zu bauen oder ein Flugzeug zu montieren. Jedem Arbeitsgang werden soviel Zeiteinheiten (in irgendeiner passenden Einheit) zugeordnet, wie notwendig sind, um ihn zu vollenden. Arbeitsgang a geht dann dem Arbeitsgang b voran (oder b folgt dem Arbeitsgang a), wenn a abgeschlossen sein muß, ehe b begonnen werden kann. So geht z. B. beim Hausbau das Legen des Fundamentes der Dachkonstruktion voran.

Um die vorangehenden Arbeitsgänge festzulegen, genügt es, die *unmittelbar* vorangehenden Arbeitsgänge zu nennen. Dies ist die kleinste Klasse der Arbeitsgänge, die abgeschlossen sein müssen, ehe ein gegebener Arbeitsgang begonnen werden kann.

Definition: Ein Netzplan besteht aus einer Anzahl von Kästchen, die durch Pfeile miteinander verbunden sind. Jedes Kästchen entspricht einem Arbeitsgang. Die unmittelbar aufeinanderfolgenden Arbeitsgänge a und b werden durch Pfeile verbunden. Vorangehende Arbeitsgänge erscheinen auf einer niedereren Stufe als die ihnen nachfolgenden.

Zur Erleichterung der Arbeit wollen wir ferner folgendes vereinbaren: Zur Liste der Arbeitsgänge zählen wir zwei Pseudoarbeitsgänge hinzu, und zwar „Start" und „Ende". Jeder dieser Arbeitsgänge erfordert zu seiner Ausführung 0 Zeiteinheiten, und „Start" geht allen anderen Arbeitsgängen voran, während „Ende" allen anderen Arbeitsgängen nachfolgt. Diese Vereinbarung wird sich für Zwecke der Buchhaltung als sehr hilfreich erweisen.

Beispiel 1. Unser Projekt sei die Herstellung eines Maschinenteiles, das aus den zwei Teilen P und Q bestehe. Jedes der Teile müsse auf einer Drehbank gedreht werden und Q sei außerdem zu polieren. Als Rohstoffe dienen die beiden Materialien A und B. Abb. 10 beschreibt unser Projekt, und Abb. 11 zeigt den entsprechenden Netzplan.

Arbeitsgang	Beschreibung	Unmittelbar vorangehend	Zeit
a	Start	keine	0
b	Bestelle A	$\{a\}$	2
c	Bestelle B	$\{a\}$	1
d	Drehe P	$\{b, c\}$	2
e	Drehe Q	$\{b, c\}$	1
f	Poliere Q	$\{e\}$	2
g	Montiere Maschinenteil	$\{d, f\}$	1
h	Ende	$\{g\}$	0

Abb. 10

Wie wir aus Abb. 11 ersehen können, ist der Netzplan eine bequeme und genaue Methode der Erfassung aller relevanten Informationen. Ein solches Diagramm ist ferner so allgemein verständlich, daß es nicht nur von den Vorarbeitern, Meistern und Projektleitern, sondern auch von Arbeitern und nicht direkt an dem Projekt Beteiligten verstanden werden kann. Wir wollen nun zeigen, daß aus einem solchen Netzplan noch wesentlich mehr entnommen werden kann:

Als erstes wollen wir versuchen, den frühest möglichen Fertigstellungszeitpunkt für unser Projekt zu finden. Zu diesem Zweck sind, beginnend bei

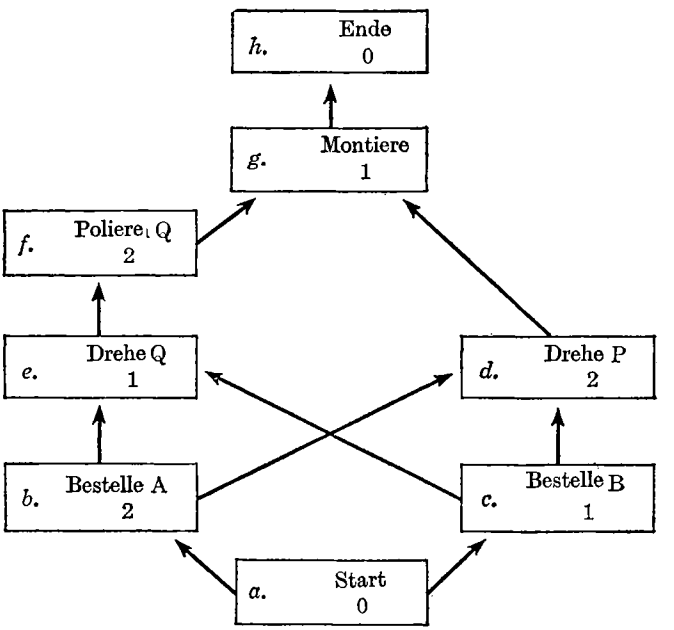


Abb. 11

„Start" und jeweils unter Berücksichtigung einer Stufe nach der anderen, folgende einfache Rechenoperationen durchzuführen: 1. Schreiben Sie 0 rechts von „Start". 2. Wählen Sie einen neuen Arbeitsgang, und schreiben Sie zu dessen Linken die größte Zahl, die Sie zur Rechten irgendeiner der vorangehenden Arbeitsgänge finden.
3. Addieren Sie zu dieser Zahl die Zeit des Projektes und schreiben Sie den erhaltenen Wert auf die rechte Seite des Arbeitsganges. 4. Fahren Sie auf diese Weise fort, bis Sie „Ende" erreichen.
Man kann diese einfache Methodik wie folgt interpretieren: Die Zahl zur Linken jedes Arbeitsganges ist der früheste Zeitpunkt, zu dem dieser Arbeitsgang begonnen werden kann, während die Zahl zur Rechten des Arbeitsganges den frühesten Zeitpunkt seines Abschlusses anzeigt. Wir beginnen mit „Start" beim Zeitpunkt 0 und errechnen die anderen Zahlen, indem wir davon ausgehen, daß ein Arbeitsgang erst dann begonnen werden kann, wenn die ihm unmittelbar vorangehenden abgeschlossen worden sind. Die errechneten Zeiten bezeichnen wir mit *früheste Anfangszeit* (FAZ) und *früheste Endzeit* (FEZ) der verschiedenen Arbeitsgänge. Die FAZ für „Ende" (oder auch die FEZ, die in diesem Fall gleich der FAZ ist) ist die Lösung unseres Problemes, nämlich der früheste Zeitpunkt, zu dem unser Projekt abgeschlossen werden kann. Die bis dahin verstrichene Zeit wollen wir als die *Sollzeit* bezeichnen.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Abb. 12 zeigt die FAZ_es und FEZ_es aller Arbeitsgänge. Diese können mit Hilfe der oben beschriebenen vierstufigen Methode errechnet werden. Als Sollzeit erhalten wir 6.

Als nächstes möchten wir gern wissen, wieviel Freiheit wir bei der Ablaufplanung der verschiedenen Aufgaben haben. Wir müssen dazu die spätesten Zeitpunkte wissen, zu denen ein Arbeitsgang begonnen oder beendet werden muß, ohne daß die Sollzeit überschritten wird. Wir wollen diese Zeitpunkte als die spätesten Anfangszeiten (SAZ) bzw. *spätesten Endzeiten* (SEZ) der verschiedenen Arbeitsgänge bezeichnen. Die Anfangszeiten schreiben wir wiederum auf die linke und die Endzeiten auf die rechte Seite der Arbeitsgänge, wobei wir die FAZ's von den SAZ's und die FEZ's von den SEZ's durch einen Bindestrich trennen. Unsere Vorgehensweise ähnelt dabei sehr der bereits beschriebenen vierstufigen Methode; dieses Mal beginnen wir jedoch bei „Ende" und bearbeiten nacheinander die einzelnen Stufen in fallender Reihenfolge: 1. Die SAZ von „Ende" ist die Sollzeit. 2. Wählen Sie einen neuen Arbeitsgang und schreiben Sie als SEZ die kleinste der SAZ's der unmittelbar vorangehenden. 3. Die SAZ erhalten Sie dann, indem Sie davon die Zeit des Projektes abziehen. 4. Fahren Sie in dieser Weise fort, bis Sie „Start" erreichen. Bitte beachten Sie, daß wir lediglich auf der Tatsache aufbauten, daß ein Arbeitsgang beendet werden muß, ehe einer der nachfolgenden begonnen werden kann.

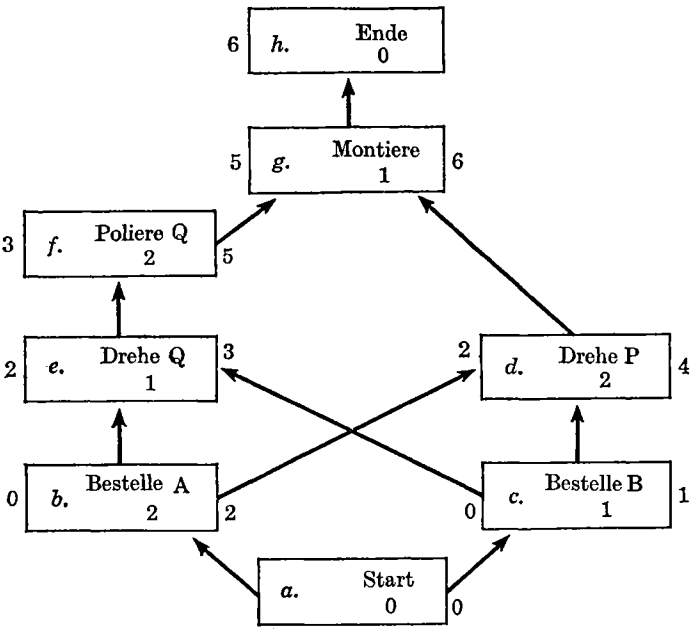


Abb. 12

Beispiel 1 (Fortsetzung). Abb. 13 zeigt die Ergebnisse der neuen vierstufigen Berechnung. Bitte beachten Sie, daß wir mit 0 als spätester Anfangszeit für „Start" enden. Dies ist zwangsläufig der Fall, da die Sollzeit der früheste Zeitpunkt ist, zu dem wir, unter der Voraussetzung eines Beginnes bei 0, enden können. Wäre ein späterer Startpunkt für dieses Projekt möglich, so hätten wir eine kürzere Sollzeit finden können.

Definition: Die Pufferzeit eines Arbeitsganges ist die Differenz zwischen ihrer SAZ und ihrer FAZ. Ein Arbeitsgang, dessen Pufferzeit 0 ist, soll als *kritischer Arbeitsgang* bezeichnet werden.

Man kann sich die Pufferzeit als die Zeitspanne vorstellen, innerhalb der wir bei der Einplanung eines Arbeitsganges variieren können, wenn alle anderen Arbeitsgänge zweckentsprechend eingeplant wurden. Natürlich könnte man diese Zeit auch als Differenz zwischen der SEZ und der FEZ errechnen. Ein kritischer Arbeitsgang stellt einen Engpaß innerhalb des Projektes dar.

Die Sollzeit kann nur durch eine Verringerung der für einen oder mehrere kritische Arbeitsgänge benötigten Zeiten verkürzt werden. (Siehe Übung 1.)

Definition. Ein *kritischer Weg* ist ein (den Pfeilen folgender) Weg von „Start" nach „Ende", der nur aus kritischen Arbeitsgängen besteht.

Theorem. Jedem kritischen Arbeitsgang (außer „Start" und „Ende") folgt unmittelbar wenigstens ein kritischer Arbeitsgang, und ihm geht wenigstens ein kritischer Arbeitsgang unmittelbar voraus. Jedes Projekt hat wenigstens einen kritischen Weg, und jeder kritische Arbeitsgang liegt auf einem oder mehreren kritischen Wegen.

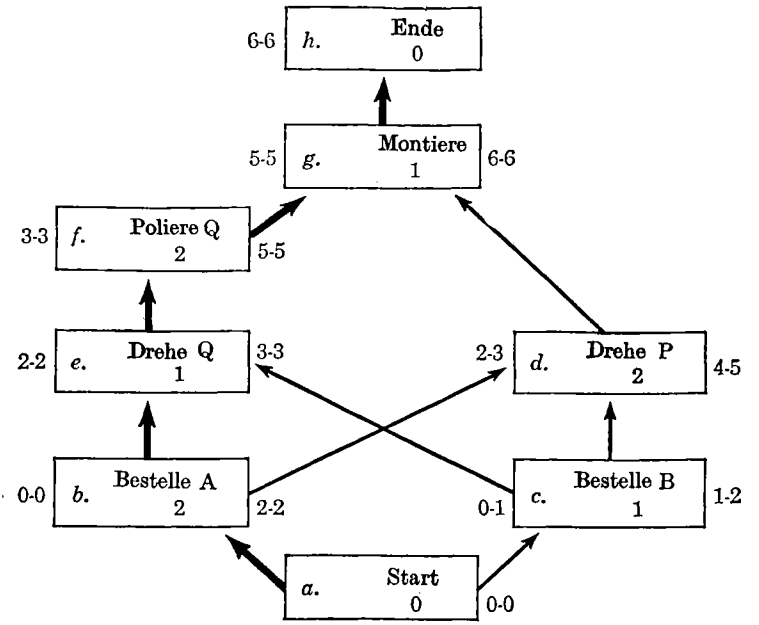


Abb. 13

Beweis. Lassen Sie uns zunächst zeigen, daß „Ende" wenigstens einen kritischen unmittelbaren Vorgänger hat. Wäre dies nicht der Fall, dann hätte jeder der unmittelbar vorangehenden Arbeitsgänge eine kleinere FEZ als SEZ. Jeder dieser Arbeitsgänge könnte dann also wenigstens eine Einheit vor seiner SEZ fertiggestellt werden. Da jedoch die SEZ eines unmittelbar dem „Ende" vorausgehenden Arbeitsganges gleich der Sollzeit ist, könnte in diesem Falle die Sollzeit verkürzt werden, was als unmöglich angesehen wurde.

Auf genau die gleiche Weise können wir zeigen, daß es ein Widerspruch ist anzunehmen, daß alle unmittelbaren Vorgänger eines kritischen Arbeitsganges über Pufferzeiten verfügen. Wir kommen somit zu dem Schluß, daß ein kritischer Arbeitsgang wenigstens einen kritischen, unmittelbar vorausgehenden Arbeitsgang haben muß.

Wir können ferner auf die gleiche Weise beweisen, daß „Start" und alle kritischen Arbeitsgänge kritische, unmittelbar folgende Arbeitsgänge haben

(siehe Übung 3). Damit wäre der erste Teil des Theorems bewiesen. Außerdem wird dadurch gezeigt, daß es außer „Start" oder „Ende" auch noch andere kritische Arbeitsgänge gibt. Wählen Sie irgendeinen Arbeitsgang a und suchen Sie einen kritischen, unmittelbar vorausgehenden und einen kritischen, unmittelbar darauffolgenden Arbeitsgang. Setzen Sie dies in beiden Richtungen solange fort, bis Sie „Start" und „Ende" erreicht haben. Sie erhalten so einen kritischen Weg, der a enthält. Damit ist der Beweis des obengenannten Theorems erbracht.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Der stark gezeichnete Weg in Abb. 13 zeigt den kritischen Weg unseres Beispieles. Auf diesem Weg liegen alle kritischen Arbeitsgänge. Die Verkürzung der Zeit des Arbeitsganges d um eine Einheit würde also die Fertigstellung des Projektes nicht beschleunigen, da dieser Arbeitsgang sowieso eine Pufferzeit von 1 enthält. Mit dem Beginn des Arbeitsganges g hätte man auf jeden Fall auf die Beendigung der kritischen Vorgänger b, e und f warten müssen, bei denen keine Beschleunigung durch eine Änderung in d erreicht würde.

Beispiel 2. Abb. 14 zeigt noch einmal den Netzplan des Beispieles 1, wobei jedoch die Zeit für den Arbeitsgang b geändert wurde. Es sind nun b, d und g die kritischen Arbeitsgänge, so daß sich der hier stark gezeichnete Weg als kritischer Weg ergibt. Die nicht kritischen Arbeitsgänge c, e und f haben jeweils eine Pufferzeit von 1. Beachten Sie, daß wir nicht gleichzeitig die Puffer der Arbeitsgänge e und f ausnutzen können, ohne die Sollzeit des Projektes zu verlängern. Wird e um eine Einheit verzögert, so wird die FAZ für f vier, und f wird dann ein kritischer Arbeitsgang.

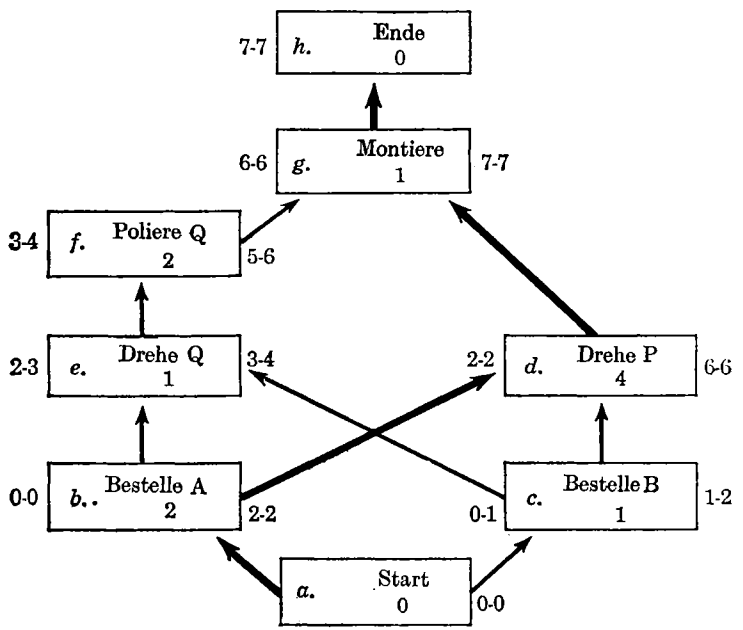


Abb. 14

Es können für die Arbeitsgänge auch noch andere Pufferarten definiert werden, auf die in den Übungen eingegangen werden soll (siehe Übungen 9 bis 11).

Nr.	Vorlesung	unmittelbar vorangehende Vorlesung
	Start	keine
M101	Höhere Mathematik I	Start
M102	Höhere Mathematik II	M101
M103	Finite Mathematik	Start
M104	Höhere Mathematik III	M102, M103
S1	Grundlagen der Statistik	M103
S2	Statistik für Fortgeschrittene	S1, M102
P1	Grundlagen der Physik	M101
P2	Physik für Fortgeschrittene	P1, M102
M108	Mathematik für Fortgeschrittene	M104
M109	Mathematische Physik	M108, P2
M110	Komplexe Zahlen	M108
M111	Reelle Zahlen	M110
	Ende	M109, M111, S2

Abb. 15

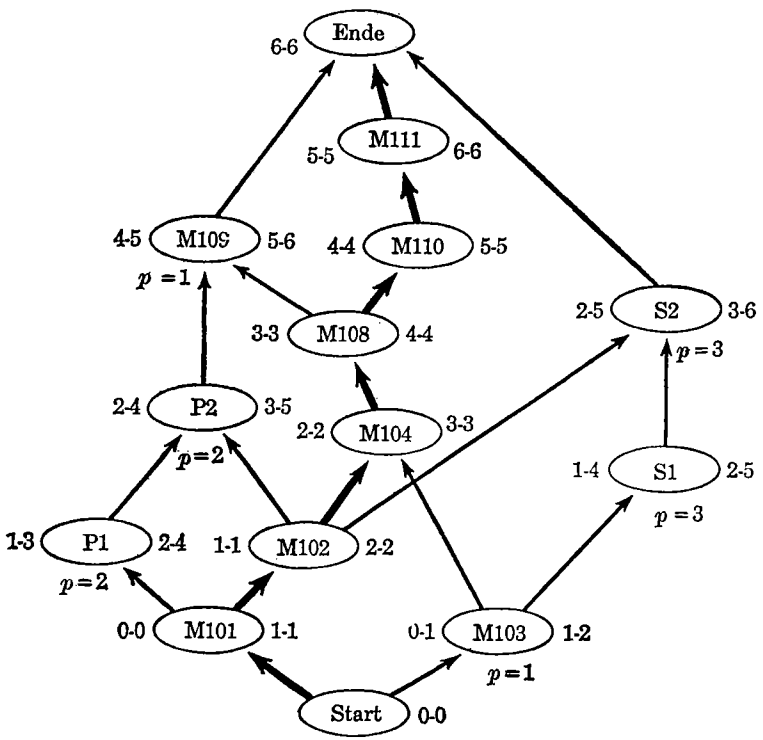


Abb. 16

Beispiel 3. Ein Student wolle Mathematik als Hauptfach und Physik als Nebenfach wählen. Er müsse sieben Mathematikvorlesungen, zwei Statistikvorlesungen, zwei Physikvorlesungen und eine Vorlesung über mathematische Physik hören. Diese Vorlesungen erstrecken sich jeweils über ein Semester. Wieviel Semester müßte er mindestens studieren, wenn er alle Vorlesungen, die nicht von ihm verlangt werden, außer acht ließe? Abb. 15 zeigt die 12 Vorlesungen jeweils mit den ihnen unmittelbar vorangehenden. Außer „Start" und „Ende", die keine Zeit beanspruchen, dauert jede Vorlesung eine Zeiteinheit (Semester).
Abb. 16 zeigt den entsprechenden Netzplan. Die Abbildung zeigt sowohl die frühesten als auch die spätesten Anfangs- und Endzeiten für jeden Arbeitsgang sowie die Puffer ($p = \ldots$). Das Projekt kann innerhalb von minimal 6 Semestern abgeschlossen werden. Der einzige, in diesem Fall bestehende kritische Weg ist durch verstärkt gezeichnete Pfeile angedeutet. Man sieht, daß M101, M102, M104, M108, M110 und M111 die kritischen Vorlesungen sind. Eine Verzögerung bei diesen Vorlesungen bedeutet unwiderruflich eine Verzögerung beim Abschluß des Studiums. Auf der anderen Seite

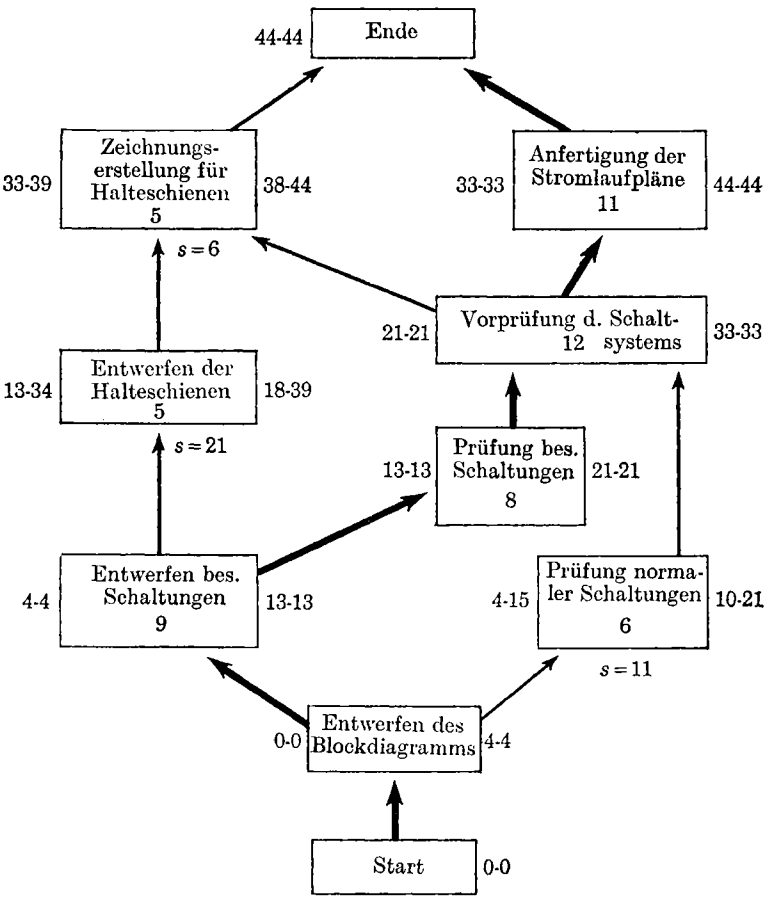


Abb. 17

enthalten einige Vorlesungen ziemlich große Pufferzeiten. Bei Statistik 1 und 2 haben wir Puffer von drei Einheiten, und M103 hat einen Puffer von einem Semester. Die Puffer der beiden Statistikvorlesungen verringern sich jedoch um eins, wenn M103 um ein Semester verzögert wird.

Beispiel 4. Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Methode des kritischen Weges ist die Planung und Durchführung der Entwicklung neuer Geräte. Abb. 17 zeigt ein Beispiel eines solchen Planes für die Entwicklung einer neuen elektronischen Einrichtung. Es wird vorausgesetzt, daß die Konstruktion aus einigen, nicht mehr unbekannten Schaltungen, die wenig Zeit erfordern, aus der Entwicklung neuer Schaltsysteme und dem Entwurf der Verkleidung und der Halteschienen für das fertige Produkt besteht. Die frühesten und spätesten Zeiten sowie die Pufferzeiten nichtkritischer Arbeitsgänge sind in Wochen angegeben. Wir sehen, daß der Entwurf und die Prüfung der besonderen Schaltungen den Engpaß des Projektes bilden.

ÜBUNGEN

1. Beweisen Sie, daß die Verkürzung der Zeiten nichtkritischer Arbeitsgänge keinen Einfluß auf die Sollzeit hat.
2. Das duale Projekt erhalten wir, wenn wir das ursprüngliche Projekt in umgekehrter Richtung ablaufen lassen. Das heißt, die Vorgänger eines jeden Arbeitsganges werden im dualen Projekt dessen Nachfolger. Beschreiben Sie eine einfache Methode zur Aufstellung des Netzplanes für das duale Projekt, wenn das Diagramm für das ursprüngliche Projekt gegeben ist. Wie ändern sich die verschiedenen Zeiten?
3. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß unter den einem kritischen Arbeitsgang unmittelbar vorangehenden Arbeitsgängen mindestens ein kritischer zu finden ist. Leiten Sie mit Hilfe des Konzeptes des dualen Projektes ab, daß unter den unmittelbar einem kritischen Arbeitsgang folgenden Arbeitsgängen mindestens ein kritischer zu finden ist.
4. Bauherr Winter habe alle beim Bau eines Hauses auszuführenden Arbeitsgänge in einer Liste zusammengefaßt. Sie werden im folgenden zusammen mit den ihnen jeweils vorangehenden Arbeitsgängen und ihren Zeiten aufgeführt. Zeichnen Sie den Netzplan, errechnen Sie die FAZ's, FEZ's, SAZ's und SEZ's für jeden Arbeitsgang, kennzeichnen Sie kritische Wege und berechnen Sie die Pufferzeiten.

Arbeitsgang	Beschreibung	Vorangehender Arbeitsgang	Zeit (Tage)
a	Start	keiner	0
b	Legen des Fundamentes	$\{a\}$	6
c	Holzgerüst einschl. Dach aufrichten	$\{b\}$	4
d	Maurerarbeiten	$\{b\}$	4
e	Installation im Erdgeschoß verlegen	$\{b\}$	1
f	Fußboden Erdgeschoß verlegen	$\{e\}$	2
g	Sanitäre Anlagen einbauen	$\{c, f\}$	3
h	Elektrische Installation verlegen	$\{c, f\}$	2
i	Heizung und Ventilation einbauen	$\{c, f\}$	4
j	Verputzen	$\{i, h, g\}$	10
k	Fußboden auslegen	$\{j\}$	3
l	Kücheneinrichtung installieren	$\{j\}$	2

Arbeitsgang	Beschreibung	Vorangehender Arbeitsgang	Zeit (Tage)
m	Feinputzen	$\{j\}$	2
n	Holzarbeiten beenden	$\{j\}$	3
o	Regenrinne und Blitzableiter anbringen	$\{d, c, f\}$	2
p	Dachzäune u. Wasserableitungen installieren	$\{o\}$	1
q	Sturmrohre für Regenwasser anbringen	$\{p\}$	1
r	Fußboden schleifen und streichen	$\{k, l, m, n\}$	2
s	Malen	$\{r\}$	3
t	Elektroarbeiten beenden	$\{s\}$	2
u	Aufräumen	$\{q\}$	2
v	Wege und Garten anlegen	$\{u\}$	5
w	Ende	$\{v, t\}$	0

5. Nehmen Sie an, daß der Student in Beispiel 3 die im folgenden angegebenen Vorlesungen um die jeweils angegebenen Zeiten verzögere, alle anderen Vorlesungen jedoch so früh wie möglich höre. Um wieviel würde dadurch sein Studium verlängert?
   a) M103 ein Semester.
   b) M103 ein Semester und S1 vier Semester.
   c) M101 zwei Semester und M108 ein Semester.
   d) P2 zwei Semester und M109 ein Semester. [Lös. a) 0; b) 2; c) 3; d) 1.]

6. Zeichnen Sie einen Netzplan für das Zubereiten eines Mahles in einer Küche mit zwei Herdflammen und einem Backofen. Das Menü bestehe aus Suppe, Braten, Bratkartoffeln, Gemüse, Pastete und Kaffee. Nehmen Sie für jeden Arbeitsgang vernünftige Zeiten an, und ermitteln Sie kritische Arbeitsgänge und -wege und die Gesamtpufferzeit für jeden Arbeitsgang.

7. Zeichnen Sie den Netzplan für die folgende Automobilreparatur: Einbau neuer Kolben und Kolbenringe, Einschleifen der Ventile, Auswechseln der Zündkerzen usw.

8. Welche der folgenden Projekte eignen sich für das Zeichnen eines Netzplanes?
   a) Grasmähen auf einer Wiese.
   b) Schreiben eines Briefes.
   c) Auszug aus einem Haus.
   d) Reparieren einer Uhr.
   e) Instandsetzung eines Flugzeuges.
   f) Bauen einer Brücke.
   g) Morgendliches Anziehen.

9. Die Differenz zwischen der kleinsten der frühesten Anfangszeiten der Nachfolger von a und der frühesten Endzeit von a wird als *freier Puffer* von a bezeichnet. So hat z. B. Arbeitsgang e in Abb. 14 einen freien Puffer von 0, während Arbeitsgang f über einen freien Puffer von 1 verfügt. Die freie Pufferzeit kann als die Spanne angesehen werden, um die ein Arbeitsgang unter der Voraussetzung verschoben werden kann, daß alle anderen Arbeitsgänge so früh wie möglich begonnen werden.
   a) Bestimmen Sie die freien Puffer der nicht kritischen Arbeitsgänge in Abb. 16.
   b) Bestimmen Sie die freien Puffer der nicht kritischen Arbeitsgänge in Abb. 17.

[Teillös.: In Abb. 16 hat M109 einen freien Puffer von 1 und S2 einen solchen von 3.]

10. Der *unabhängige Puffer* eines Arbeitsganges a wird als die Differenz zwischen dem Minimum der frühesten Anfangszeiten der Nachfolger von a und dem Maximum der spätesten Endzeiten der Vorgänger von a definiert. Hierbei wird vorausgesetzt, daß diese Größe nicht negativ ist. Ist sie negativ, so wird der unabhängige Puffer von a Null. Der unabhängige Puffer gibt die Zeitspanne an, um die ein Arbeitsgang, ohne Rücksicht auf die anderen, verschoben werden kann, solange die anderen Arbeitsgänge innerhalb ihrer frühesten und spätesten Zeitpunkte verbleiben.
    a) Zeigen Sie, daß der Arbeitsgang d in Abb. 13 einen unabhängigen Puffer von 1 hat.
    b) Zeigen Sie, daß die Arbeitsgänge e und f in Abb. 14 je einen unabhängigen Puffer von 0 haben.
    c) Bestimmen Sie die unabhängigen Puffer für die nichtkritischen Arbeitsgänge in Abb. 16.
    d) Bestimmen Sie die unabhängigen Puffer der nichtkritischen Arbeitsgänge in Abb. 17.
11. Entwerfen Sie ein Projekt, in dem wenigstens ein Arbeitsgang sowohl über einen freien als auch über einen unabhängigen Puffer verfügt.
12. Eine Gruppe von Autoren entwarf den folgenden Plan, um ein Buch miteinander zu schreiben. Das Projekt konnte bis jetzt noch nicht abgeschlossen werden. Warum?

Arbeitsgang	Beschreibung	Unmittelbar vorangehender Arbeitsgang	Zeit (Wochen)
a	Start	keiner	0
b	Schreiben Kapitel 1	$\{a\}$	2
c	Schreiben Kapitel 2	$\{a\}$	1
d	Schreiben Kapitel 3	$\{b, c\}$	4
e	Schreiben Kapitel 4	$\{c\}$	2
f	Zeichnen der Diagramme	$\{d, e, h\}$	1
g	Anfertigen des Registers	$\{f\}$	2
h	Schreiben des Vorwortes	$\{g, e, i\}$	2
i	Erstellen des Literaturverzeichnisses	$\{g\}$	2
j	Ende	$\{h, i\}$	0

Empfohlene Lektüre

1. Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, Stuttgart, seit 1950.
2. M. Breu: Netzplantechnik im Terminwesen, in: Industrielle Organisation, Jahrg. 62, Nr. 10.
3. Diemer, A. und Frenzel, I.: Philosophie (Fischer-Lexikon), Stichwort Logistik.
4. Hilbert, D. und Ackermann, W.: Grundzüge der theoretischen Logik, 3. Auflage 1949.
5. IBM Deutschland (Herausgeber): Pert — Eine Einführungsschrift, 1961.
6. Krüger, Kurt: Optimale Projekt-Fortschrittplanung, Beuth-Vertrieb, Berlin 1962.
7. Überweg, F.: System der Logik.
8. Weber, K.: Planung mit der „Program Evaluation and Review Technique" (Pert) in: Industrielle Organisation 32. Jahrgang, 1963, Nr. 2, S. 35.

III. Aufspalten und Zählen

1. Aufspalten

Das Problem, mit dem wir uns in diesem Kapitel beschäftigen wollen, kann am besten als das der Aufspaltung einer Klasse gekennzeichnet werden. Unter der *Aufspaltung* einer Klasse U verstehen wir deren vollständige Aufteilung in unabhängige (also durchschnittsleere) Unterklassen, d. h. jedes der Elemente von U gehört zu genau einer Unterklasse. Wir wollen die Unterklassen A_i, die durch die Aufspaltung entstehen, *Zellen* nennen. $[A_1, A_2, \ldots, A_r]$ ist also dann eine Aufspaltung von U, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind: 1) $A_i \cap A_j = E$ bei $i \neq j$ (die Zellen sind unabhängig voneinander) und 2) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r = U$ (die Aufspaltung ist vollständig).

Beispiel 1. Ist $U = \{a, b, c, d, e\}$, dann sind $[\{a, b\}, \{c, d, e\}]$ oder $[\{b, c, e\}, \{a\}, \{d\}]$ oder $[\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}]$ drei verschiedene Aufspaltungen von U. Bei der letzten Aufspaltung wird U in Einerklassen zerlegt.

Geht man von einer sehr feinen Analyse logischer Möglichkeiten auf eine weniger feine über, so geschieht dies in Wirklichkeit mit Hilfe einer Aufspaltung. Wir wollen als Beispiel die logischen Möglichkeiten der ersten drei Spiele der Weltmeisterschaften zwischen den Mannschaften Y und D betrachten. Bezeichnen wir jeweils den Sieg einer Mannschaft mit deren Buchstaben, so können wir die Möglichkeiten der Spielausgänge wie folgt darstellen:

$$\{\text{YYY, YYD, YDY, DYY, YDD, DYD, DDY, DDD}\}.$$

Fassen wir alle Möglichkeiten mit den gleichen Gewinnzahlen der Mannschaft Y in einzelne Zellen zusammen, so spalten wir die Gesamtklasse wie folgt auf:

$$\{\text{YYY}\}, \{\text{YYD, YDY, DYY}\}, \{\text{YDD, DYD, DDY}\}, \{\text{DDD}\}.$$

Sehen wir nun als Möglichkeiten lediglich die Fälle an, die sich dadurch unterscheiden, daß die Mannschaft Y in drei, zwei, einen oder null Spielen gewinnt, so gehen wir auf eine weniger detaillierte Analyse über. Diese gewinnen wir aus der ersten Analyse dadurch, daß wir die obigen Zellen als Möglichkeiten ansehen.

Stellen $[A_1, A_2, \ldots, A_r]$ und $[B_1, B_2, \ldots, B_s]$ zwei Aufspaltungen der gleichen Klasse U dar, so erhalten wir eine neue Aufspaltung, indem wir alle die Unterklassen von U betrachten, die die Form $A_i \cap B_j$ haben (siehe Übung 7). Diese neue Aufspaltung wird *Queraufspaltung* der ursprünglichen zwei Aufspaltungen genannt.

Beispiel 2. Eins der üblichen Anwendungsgebiete der Queraufspaltung ist das Problem der Gruppierung. Enthält die Klasse U z. B. die Besuche eines Vertreters während des letzten Monats, so können wir die Aufspaltung $[S, \tilde{S}]$ bilden. S stellt dabei die Klasse all der Besuche dar, die zu einem Verkauf führten. Daneben können wir auch die Aufspaltung $[P, N]$ bilden, bei der P die Klasse der Besuche bei schon früher besuchten Personen und N die Klasse der neuen Besuche darstellt. Die Queraufspaltung

$$[P \cap S, P \cap \tilde{S}, N \cap S, N \cap \tilde{S}]$$

bildet dann eine vollständige Gruppierung nach den beiden, voneinander unabhängigen Betrachtungsmerkmalen.

Viele der Beispiele, mit denen wir uns in Zukunft befassen werden, beziehen sich auf Stufenprozesse. Es wird sich hierbei als nützlich erweisen, Aufspaltungen und Queraufspaltungen dazu zu benutzen, die einzelnen Stufen der Prozesse darzustellen. Die graphische Darstellung solcher Prozesse geschieht dabei natürlich in der Form von Bäumen. Nehmen Sie z. B. an, wir erführen nacheinander die Wahrheitswerte einer Reihe von Sätzen, die sich auf eine bestimmte Situation beziehen. Ist U die Klasse der logischen Möglichkeiten der betreffenden Situation und p ein Satz im Bezug auf U, so bedeutet die Kenntnis des Wahrheitswertes von p das Wissen, in welcher Zelle der Aufspaltung $[P, \tilde{P}]$ die in Frage kommende Möglichkeit enthalten ist. Rufen Sie sich ins Gedächtnis zurück, daß P die Wahrheitsklasse von p und $\tilde{P}$ die Wahrheitsklasse $\sim p$ ist. Nehmen Sie nun an, wir erführen den Wahrheitswert eines zweiten Satzes q. Diese Information kann wiederum durch eine Aufspaltung, und zwar $[Q, \tilde{Q}]$ beschrieben werden. Die durch beide Sätze gegebene Information kann dann durch die Queraufspaltung dieser beiden Aufspaltungen, nämlich durch

$$P \cap Q, P \cap \tilde{Q}, \tilde{P} \cap Q, \tilde{P} \cap \tilde{Q}$$

dargestellt werden.

Das bedeutet: Sobald wir die Wahrheitswerte von p und q kennen, wissen wir auch, welche der Zellen der Queraufspaltung die logische Möglichkeit enthält, die die gegebene Situation beschreibt. Auf der anderen Seite kennen wir die Wahrheitswerte der Sätze p und q sobald wir wissen, welche der Zellen die betreffende Möglichkeit enthält.

Die Information, die wir durch die zusätzliche Kenntnis des Wahrheitswertes eines dritten Satzes r mit der Wahrheitsklasse R erhalten, kann durch

die Queraufspaltungen der drei Aufspaltungen $[P, \tilde{P}]$, $[Q, \tilde{Q}]$ und $[R, \tilde{R}]$ dargestellt werden. Wir erhalten für diese Queraufspaltungen also

$$[P \cap Q \cap R,\ P \cap Q \cap \tilde{R},\ P \cap \tilde{Q} \cap R,\ \tilde{P} \cap Q \cap R,$$
$$P \cap \tilde{Q} \cap \tilde{R},\ \tilde{P} \cap Q \cap \tilde{R},\ \tilde{P} \cap \tilde{Q} \cap R,\ \tilde{P} \cap \tilde{Q} \cap \tilde{R}].$$

Beachten Sie, daß wir das Problem so weit eingeengt haben, daß sich die gesuchte Möglichkeit in einer der $2^3 = 8$ Zellen befindet. Wären uns die Wahrheitswerte von n Sätzen bekannt, so hätte unsere Aufspaltung entsprechend 2^n Zellen.

Hätte z. B. die Klasse U 2^{20} (ungefähr eine Million) logische Möglichkeiten, und könnten wir die Anzahl der Möglichkeiten durch das Stellen von Fragen, die mit ja oder nein zu beantworten sind, d. h. durch die Kenntnis der Wahrheitswerte jeder dieser Fragen, um die Hälfte verringern, so könnten wir mit Hilfe von 20 Fragen jede der gegebenen Möglichkeiten der Klasse U bestimmen. Wir könnten diese Frage z. B. stellen, wenn wir eine Liste aller Möglichkeiten vor uns hätten. Durch Fragen der Form: „Befindet sich die Möglichkeit in der ersten Hälfte?" und, wenn die Antwort darauf ja ist, „Befindet sich die Möglichkeit in dem ersten Viertel?" usw. gelangen wir dann zum Ziele. In der Praxis steht uns jedoch gewöhnlich eine solche Liste nicht zur Verfügung, und wir können deshalb diesen Vorgang nur approximieren:

Beispiel 3. Karteikarten, die an ihrer oberen Kante eine Anzahl von Löchern tragen, werden im allgemeinen als Randlochkarten bezeichnet. Eine solche Karte kann Informationen über Beschäftigte, über Konten, eine Teilenummer, Aktionäre oder Verkaufsaufträge enthalten. Ein Satz dieser Karten wird in einem Karteikasten aufbewahrt, und man unterteilt die Karten, indem man sie jeweils einer oder mehreren Zellen der Aufspaltung der Gesamtklasse zuordnet. Um alle zu einer Zelle einer bestimmten Aufteilung oder Queraufspaltung gehörenden Kartei leicht herauszufinden, bedient man sich gewöhnlich der folgenden Hilfsmittel: Jeder der Aufspaltungen wird eine Unterklasse der Klasse aller in der Karte vorhandenen Löcher zugeordnet. Die so bezeichneten Löcher werden mit „Feld" bezeichnet. Die Zellen einer Aufspaltung können durch das Ausstanzen eines Schlitzes zwischen bestimmten Löchern und der oberen Kartenkante unterschieden werden.

Man kann dann eine Nadel an einem bestimmten Lochfeld durch den Kartensatz stecken und sie dann anheben. Alle Karten, die an dieser Stelle einen Schlitz haben, bleiben dann in dem Karteikasten, währenddessen diejenigen ohne Schlitz mit der Nadel herausgehoben werden.

Die Zahl der einem Feld zugeordneten Lochplätze hängt von der Zahl der Zellen ab, die innerhalb der Aufspaltung von dem Feld dargestellt werden. Wir wollen uns jede Lochstelle als ein bit vorstellen, wobei ein geschlitztes Loch eine 0 und ein ungeschlitztes Loch eine 1 darstelle. Befinden sich in einem Feld n Lochstellen, so können diese 2^n Zellen entsprechen, da wir mit n bits die 2^n ganzen Zahlen von 0 bis $2^n - 1$ darstellen können. Ein Feld, das aus vier bits besteht, kann also eine sechzehnzellige Aufspaltung darstellen.

Nehmen Sie z. B. an, wir hätten für jeden Arbeiter einer Fabrik eine Karte. Die Arbeiter seien nach ihrem Geschlecht, ihrer Beschäftigung und ihrer Kostenstelle

klassifiziert. Hierbei kann das Geschlecht eines Arbeiters durch ein einziges bit dargestellt werden, wobei z. B. 0 weiblich und 1 männlich bedeute. Sind 13 verschiedene Beschäftigungen vorhanden, so benötigen wir dafür ein Feld von vier bits. Wir können dann z. B. der Beschäftigung 1 die Bezeichnung 0001 zuordnen und so fortfahren, bis zu 1101 für die Beschäftigung 13. Es seien weiterhin 25 Kostenstellen vorhanden. Für ihre Erfassung benötigen wir ein Feld von fünf bits, indem wir der Kostenstelle 1 die Kennzahl 00001 zuordnen und entsprechend der 25. Kostenstelle die Bezeichnung 11001 geben.

Nehmen Sie nun an, wir suchten alle männlichen Arbeiter mit der Beschäftigung 6 in Kostenstelle 11. Diese werden durch die Dualzahl 1011001011 dargestellt, wobei das erste bit das Geschlecht angibt, die nächsten vier bits die Beschäftigung und die letzten fünf bits die Kostenstelle. Wir spalten die Gesamtklasse zunächst dadurch auf, daß wir die Karten mit ungeschlitzten Löchern in der Lochposition 1 herausziehen. Diese Karten stellen alle männlichen Arbeiter der Fabrik dar. Entnehmen wir nun dieser Unterklasse alle die Karten, die an Lochstelle 2 ungeschlitzte Löcher enthalten, so entsprechen die entnommenen Karten den Beschäftigungsmerkmalen 8 und höher, während die im Karteikasten verbleibenden Karten die Beschäftigungsarten bis einschließlich 7 darstellen. Aus den im Karteikasten verbliebenen Karten ziehen wir nun die mit ungeschlitzten Löchern in den Lochpositionen 3 und 4 heraus und sortieren aus dieser Unterklasse wiederum die Karten mit geschlitzten Löchern in der Lochposition 5 aus. Damit erhalten wir die Unterklasse der männlichen Arbeiter mit Beschäftigungsart 6. Dieses Vorgehen setzen wir nun solange fort, bis wir die Unterklasse aussortiert haben, die die Arbeiter der Kostenstelle 11 umfaßt.

Bitte beachten Sie, daß diese Arbeitsweise, unabhängig von der Reihenfolge, in der die Karten ursprünglich im Karteikasten stehen, zum Erfolg führt.

Beispiel 4. In einer elektronischen Rechenanlage werden Zahlen auf bestimmten „Speicheradressen" gespeichert, wobei jeder Adresse eine Zahl entspricht. Manchmal wird in einer Rechenanlage eine vollkommene Tabelle gespeichert, indem man an aufeinanderfolgenden Adressen in der Tabelle aufeinanderfolgende Werte speichert. Betrachten Sie z. B. die in Abb. 1 gezeigte Tabelle, in der jede der Zahlen größer als die direkt vorhergehende ist. Auf Grund des gespeicherten Programmes können wir vom Rechner eine Antwort auf die Frage „Welche Zahl ist bei einer bestimmten Speicheradresse gespeichert?" erhalten. Der Rechner kann jedoch nicht direkt die umgekehrt gestellte Frage „An welcher Speicheradresse ist eine bestimmte Zahl gespeichert?" oder „Zwischen welche Werte der Tabelle fällt eine bestimmte Zahl?" beantworten.

Speicher-adresse	Tabellen-wert	Speicher-adresse	Tabellen-wert
1	24	5	2000
2	100	6	2002
3	101	7	5179
4	197	8	5280

Abb. 1

Nehmen Sie z. B. an, wir wollten wissen, zwischen welchen zwei gespeicherten Zahlen die in der Tabelle nicht enthaltene Zahl 4096 liegt. Mit einem Blick auf die Tabelle können wir erkennen, daß sie sich zwischen den in Adresse 6 und Adresse 7 gespeicherten Zahlen befindet. Mit welcher systematischen Vorgehensweise können wir jedoch eine solche Zahl finden? Wir können zunächst davon ausgehen, daß in einer Tabelle mit ansteigenden Werten eine gegebene Zahl, die größer als die Zahl a und kleiner als die

Zahl $a + 1$ ist, zwischen den Adressen der Zahlen $a + 1$ liegt. Wir könnten also die Position der Zahl 4096 ermitteln, indem wir die Speicheradressen, beginnend mit der Adresse 1, abfragen, ob die auf ihnen gespeicherte Zahl größer als 4096 ist. Wir erhielten eine Reihe von „Nein"-Antworten, bis wir die Adresse 7 erreichen. Das bedeutet, daß 4096 zwischen der in Adresse 6 und der in Adresse 7 gespeicherten Zahl liegt.

Eine Vorgehensweise, die weniger Schritte erfordert, ist die systematische Aufspaltung der Klasse der Speicheradressen. Wir halbieren zunächst die Klasse und fragen, ob 4096 größer als die größte Zahl der ersten Zelle, d. h. der Zahl auf Adresse 4, nämlich 197, ist. Da die Antwort hierauf „ja" ist, betrachten wir die zweite Zelle als unsere Universalklasse und spalten sie in weitere zwei Zellen auf, wobei die erste die Zahlen der Adressen 5 und 6 und die zweite die Zahlen der Adressen 7 und 8 enthält. Wir fragen wiederum, ob die Zahl 4096 größer als die größte Zahl der ersten Zelle, d. h. die auf Adresse 6 gespeicherte 2002, ist. Da die Antwort wieder „ja" lautet, betrachten wir wiederum die zweite Zelle, d. h. die bei den Adressen 7 und 8 gespeicherten Zahlen, als unsere Ausgangsklassen und spalten sie in zwei Einerklassen. Unsere nächste Frage ist, ob 4096 größer als die Zahl der ersten Zelle, d. h. 5179, ist. Die Antwort hierauf lautet „nein". 4096 ist also größer als die in Adresse 6 gespeicherte Zahl und kleiner als die in Adresse 7 gespeicherte Zahl, womit wir ihren Platz in der Tabelle ermittelt haben[1].

Beachten Sie, daß bei der zweiten Vorgehensweise nur drei Fragen notwendig waren, während wir bei der ersten Arbeitsmethode sieben Fragen stellen mußten. Der Unterschied in der Anzahl der zu stellenden Fragen ist bei längeren Tabellen noch auffallender. So kann man z. B. mit nur 20 Fragen den Platz einer gegebenen Zahl innerhalb einer Tabelle von einer Million Zahlen ermitteln.

ÜBUNGEN

1. Führen Sie die Queraufspaltung der folgenden Aufspaltungspaare durch, wenn U die Klasse der ganzen Zahlen von 1 bis 6 ist:
   a) $[\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}]$ und $[\{1, 4\}, \{2, 3, 5, 6\}]$.
   b) $[\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\}]$ und $[\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}]$.
   [Lös. a) $\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}$.]

2. Eine Münze werde dreimal geworfen. Wie viele Möglichkeiten bezüglich der erscheinenden Seiten gibt es? Spalten Sie diese Möglichkeiten so auf, daß in einer Zelle alle Möglichkeiten zusammengefaßt sind, für die die gleiche Anzahl von Wappen erscheint.

3. p und q seien zwei Sätze mit den Wahrheitsklassen P und Q. Was kann über die Queraufspaltung von $[P, \tilde{P}]$ und $[Q, \tilde{Q}]$ gesagt werden, wenn
   a) q durch p impliziert wird. [Lös.: $P \cap \tilde{Q} = E$.]
   b) p äquivalent q ist.
   c) p und q widersprüchlich sind.

4. Betrachten Sie die aus den acht Bundesländern Baden, Bayern, Bremen, Hamburg, Hessen, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen und Rheinland-Pfalz bestehende Klasse.
   a) Zeigen Sie, daß man durch das Stellen dreier Fragen, auf die mit „ja" oder „nein" zu antworten ist, jedes der Länder identifizieren kann.

---

[1] Dieses Suchverfahren nennt man „logarithmisches Suchen", weil die Anzahl der Fragen dem natürlichen Logarithmus entspricht. [Der Übersetzer.]

b) Nennen Sie eine Klasse dreier Fragen, die unabhängig voneinander mit „ja" oder „nein" beantwortet werden können und die dazu dienen können, jedes der genannten Länder zu identifizieren.

5. Ein umfangreiches Wörterbuch enthält auf 3000 Seiten ungefähr 600000 Wörter. Kann man ein willkürlich aus dem Wörterbuch ausgewähltes Wort durch das Stellen von 20, mit „ja" oder „nein" zu beantwortenden Fragen identifizieren? Wenn dies der Fall ist, beschreiben Sie die Vorgehensweise, die Sie anwenden würden, und diskutieren Sie deren Durchführbarkeit.
[Lös.: Eine der Lösungen ist die folgende: Stellen Sie 12 Fragen, um die betreffende Seite herauszufinden; Sie benötigen dann noch einmal 9 Fragen, um auf der betreffenden Seite das gesuchte Wort zu bestimmen.]

6. Herr Müller hat zwei Eltern, von denen jeder Elternteil wiederum zwei Eltern hat usw. Verfolgt man den Stammbaum einer Person über 40 Generationen zurück (das entspricht ungefähr 1000 Jahren), so erhält man 2^{40} Vorfahren, d. h. mehr Personen, als während der letzten 1000 Jahre auf der Erde gelebt haben. Was stimmt an dieser Rechnung nicht?

7. A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2 seien zwei Aufspaltungen. Beweisen Sie, daß die Queraufspaltung der zwei gegebenen Aufspaltungen wiederum eine Aufspaltung ist, die den am Anfang dieses Abschnittes genannten Bedingungen 1 und 2 genügt.

8. Die aus den Wahrheitsklassen von n Sätzen gebildete Queraufspaltung enthält 2^n Zellen. Wie wir in Kapitel 1 sahen, hat die Wahrheitstafel einer aus n Sätzen bestehenden Satzverknüpfung 2^n Zeilen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Tatsachen?

9. p und q seien Sätze mit den Wahrheitsklassen P und Q. Bilden Sie die Aufspaltung

$$[P \cap Q, P \cap \tilde{Q}, \tilde{P} \cap Q, \tilde{P} \cap \tilde{Q}].$$

Geben Sie für jeden der folgenden Fälle an, welche der Zellen eine leere Klasse sein muß, damit die gegebene Aussage logisch wahr ist.

a) $p \rightarrow q$.
b) $p \leftrightarrow q$.
c) $p \vee \sim p$.
d) p.

10. Man bezeichnet eine Aufspaltung $[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ als eine *Verfeinerung* der Aufspaltung $[B_1, B_2, \ldots, B_m]$, wenn jedes A_j eine Unterklasse eines B_k ist. Zeigen Sie, daß eine Queraufspaltung zweier Aufspaltungen eine Verfeinerung jeder der ursprünglichen Aufspaltungen darstellt.

11. Betrachten Sie die Aufspaltung der Bewohner der Vereinigten Staaten nach ihrer Zugehörigkeit zu den verschiedenen Bundesstaaten. Die Klassifikation nach der Zugehörigkeit zu einzelnen Provinzen bilde eine zweite Aufspaltung. Zeigen Sie, daß dies eine Verfeinerung der ersten Aufspaltung ist. Nennen Sie eine dritte Aufspaltung, die sich von den beiden genannten unterscheidet und die eine Verfeinerung beider darstellt.

12. Was kann über die Queraufspaltung zweier Aufspaltungen gesagt werden, von denen eine die Verfeinerung der anderen ist?

13. Gegeben seien neun Gegenstände, von denen bekannt ist, daß acht gleich viel wiegen, während der neunte schwerer als die anderen ist. Wie kann, mit Hilfe von zwei Wiegevorgängen auf einer Balkenwaage der schwere Gegenstand bestimmt werden?

14. Nehmen Sie an, Ihnen seien dreizehn Gegenstände gegeben, von denen zwölf das gleiche Gewicht haben, währenddessen einer schwerer oder leichter als die anderen ist. Zeigen Sie, daß Sie mit Hilfe eines dreimaligen Wiegens auf einer Balkenwaage den von den anderen Gegenständen verschiedenen Gegenstand bestimmen können.

15. Ein Begriff kann durch die Einführung mehrerer, einfacher Unterteilungen und deren Queraufspaltung vollkommen klassifiziert werden. So mögen z. B. Vorlesungen an einer Universität nach ihrem Inhalt, ihrem Schwierigkeitsgrad, der Anzahl der Teilnehmer, den Wochenstunden, dem entgegengebrachten Interesse usw. aufgespalten werden. Geben Sie für jeden der folgenden Begriffe fünf oder mehr Aufspaltungen an. Wie viele Zellen gibt es bei einer vollständigen Klassifikation (Queraufspaltung) in jedem dieser Fälle?

    a) Deutsche Bundesländer.
    b) Aktiva einer Gesellschaft.
    c) Arbeiter einer Fabrik.
    d) Verbraucher eines Produktes.

2*. Anwendungen

Wir wollen Ihnen nun drei Beispiele für die Anwendung von Aufspaltungen zur mathematischen Beschreibung verschiedener Situationen geben. In späteren Kapiteln werden wir ausführlicher auf solche Beispiele eingehen.

Beispiel 1. *Ein einfaches Spiel.* Müller und Schulze spielen das folgende Spiel: Schulze hält in seiner Hand entweder ein Ein- oder ein Zweimarkstück. Müller rät, welche Münze Schulze in seiner Hand hält und gewinnt das Geld, wenn er richtig geraten hat. In einem späteren Kapitel werden wir versuchen, den Betrag zu bestimmen, den Müller zahlen sollte, um mit Schulze ein faires Spiel zu spielen. Im Moment interessieren uns lediglich die möglichen Abläufe dieses Spieles: Es umfaßt zwei Stufen: Zuerst wählt Schulze ein Ein- oder Zweimarkstück, und danach rät Müller, ob Schulze ein Ein- oder ein Zweimarkstück in der Hand hält. Die möglichen Abläufe dieser Stufen können wir durch den in Abb. 2 dargestellten Baum mit vier Zweigen aufzeichnen. Die vier Wege, auf denen das Spiel verlaufen kann, werden durch die vier Zweige des Baumes, die wir mit a_1, a_2, a_3 und a_4 bezeichnen wollen, dargestellt.

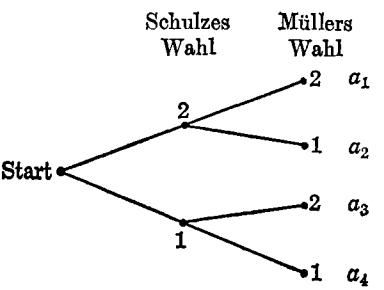


Abb. 2

Den Verlauf des Spieles können wir auch durch eine Reihenfolge dreier Aufspaltungen darstellen:

Start	$[\{a_1, a_2, a_3, a_4\}]$
Schulzes Wahl	$[\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}]$
Müllers Wahl	$[\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}]$.

Wir haben also jeder Stufe des Baumes eine Aufspaltung zugeordnet. Je eine Zelle dieser Aufspaltungen entspricht einer bestimmten Stufe, und sie umfaßt alle Zweige, die durch einen Verzweigungspunkt dieser Stufe laufen.
Man kann diese Aufspaltungen auch dazu benutzen, das Ausmaß des Einflusses jedes Spielers auf den Ausgang des Spieles darzustellen. Der Einfluß Schulze's kann durch die Aufspaltung $[\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}]$ dargestellt werden, d. h. Schulze kann bestimmen, welche der beiden Fälle der Aufspaltung den Einsatz des Spieles enthalten sollen. Entsprechend kann Müller darüber bestimmen, welche Zelle der Aufspaltung $[\{a_1, a_3\}, \{a_2, a/\}]$ den Einsatz enthalten soll. Die endgültige Aufspaltung ist dann die Queraufspaltung dieser beiden Aufspaltungen.

Beispiel 2. *Kaufverhalten von Verbrauchern.* Im Rahmen verschiedener Verbraucherbefragungen werden Hausfrauen aufgefordert, genau über ihre Einkäufe bestimmter Lebensmittel, wie Kaffee, Brot usw., während einer Zeitspanne von mehreren Jahren zu berichten. Die für jeden solchen Kauf anzugebenden Größen enthalten das Datum, die Menge der jeweils gekauften Güter, die Größe jedes gekauften Gutes und deren Marke. Es kann also im Rahmen einer solchen Befragung für jede Hausfrau eine genaue, reihenfolgemäßige Liste über die gekauften Marken aufgestellt werden.
Nehmen Sie an, wir seien an dem Kaufverhalten der Hausfrauen bezüglich des Orangensaftes der Marke A interessiert. Wir können dann die Klasse U aller Orangensaftkäufe der befragten Personen dadurch aufspalten, daß wir in eine Zelle alle Käufe der Marke A zusammenfassen und in der anderen Zelle die Käufe aller anderen Marken festhalten. Die sich hieraus ergebende Aufspaltung ist $[A, \tilde{A}]$, wobei A die Klasse der Käufe der Marke A ist. Indem wir die Anzahl der Elemente A mit der Zahl der Elemente von U vergleichen und untersuchen, ob sie in ungefähr dem gleichen Verhältnis stehen wie der Marktanteil der Marke A zu dem fraglichen Gesamtmarkt. Können wir dann feststellen, ob die Befragung repräsentativ für den Markt ist, auf dem sie durchgeführt wurde.
Für andere Zwecke können wir U als die Klasse aller in der Verbraucherbefragung erfaßten Hausfrauen definieren, die dann in $[A, B, C, X]$ aufgespalten werden kann. A ist dann die Klasse aller Hausfrauen, die mehr die Marke A als eine andere Marke gekauft haben. Die Klassen B und C werden in Analogie dazu definiert, während die Klasse X aus den Hausfrauen besteht, die mehr von einer anderen Marke als von A, B oder C gekauft haben. Wir können die Klasse aller Hausfrauen auch in $[H, N]$ aufspalten, wobei H die Klasse derer ist, deren Einkommen 20000 DM im Jahr übersteigt, und N die Klasse, deren Einkommen 20000 DM oder weniger im Jahr beträgt. Betrachten wir dann die Queraufspaltung

$$[H \cap A, H \cap B, H \cap C, H \cap X, L \cap A, L \cap B, L \cap C, L \cap X],$$

so sehen wir daraus z. B., daß $H \cap A$ praktisch gleich A ist, während $N \cap B$ praktisch gleich B ist. Das würde bedeuten, daß die Marke A in erster Linie durch Familien mit hohem Einkommen und Marke B durch Familien mit relativ niedrigem Einkommen gekauft wird.

Beispiel 3. *Verhalten kleiner Gruppen.* Einige Soziologen studieren das Verhalten kleiner Personengruppen, denen die Aufgabe gestellt worden ist, gemeinsam ein bestimmtes Problem zu lösen. Ein Beispiel hierfür ist ein Ausschuß, der darüber entscheiden soll, ob ein neues Produkt auf den Markt zu bringen ist oder nicht. Vor der Entscheidungsfällung wird zwischen den Mitgliedern dieses Ausschusses eine umfangreiche Diskussion stattfinden. Es sind Versuche durchgeführt worden, die Rolle jeder der Personen in einer solchen Situation genau zu studieren. Bei diesen Versuchen vermerkt ein Beobachter genau jede gemachte Bemerkung zusammen mit den Namen der Person, die

die Bemerkung machte, und der, an die das Gesagte gerichtet war. Manchmal wird auch die Art der Bemerkung und die Zeit, zu der sie gemacht wurde, festgehalten. Betrachten Sie einen Versuch der eben beschriebenen Art, an dem vier Personen a, b, c, d teilnehmen: U sei die Klasse aller gemachten Äußerungen. Bilden Sie die Aufspaltung $[S_a, S_b, S_c, S_d]$ von U, wobei S_a die Klasse aller durch a gemachten Äußerungen darstelle, S_b die Klasse aller Bemerkungen von b usw. Bilden Sie ferner die Aufspaltung $[T_a, T_b, T_c, T_d]$ von U, wobei T_a die Klasse aller der an a gerichteten Äußerungen sei, T_b die Klasse all der an b gerichteten Bemerkungen usw. Ein Soziologe ist z. B. an der Beantwortung der folgenden Frage interessiert: Erhalten wir die gleiche Reihenfolge, wenn wir die Zellen der S Aufspaltung und die Zellen der T Aufspaltung gemäß der Anzahl der in ihren Zellen enthaltenen Elemente ordnen? Das heißt, werden an die Person, die die meisten Äußerungen macht, auch die meisten Bemerkungen gerichtet? Als zweites interessiere das folgende Problem: Nehmen Sie an, es werde U in $[U_1, U_2, U_3]$ aufgespalten, wobei U_1 die Klasse aller Bemerkungen, die im ersten Zeitintervall gemacht werden, U_2 die Klasse derer im zweiten Zeitintervall und U_3 die Klasse derer im dritten Zeitintervall darstelle. Bilden wir nun die Queraufspaltung dieser Aufspaltung mit jeder der zuerst genannten, so erhalten wir eine feinere Analyse, die uns zeigt, wie sich der Diskussionsablauf im Laufe der Zeit geändert hat. Wir mögen daraus z. B. ersehen, daß die Diskussion sich aus einer dreispurigen in eine zweispurige verwandelt hat. Es könnte genauso gut passiert sein, daß eine Person sehr viele Äußerungen gemacht hat, jedoch nur sehr wenige Bemerkungen an sie adressiert worden sind. Natürlich wird die Art der Aufspaltung von der jeweiligen Begriffegruppe und der jeweiligen Art des Experimentes abhängen.

Beispiel 4. *Bewertungstechniken.* Eine der auf dem Gebiet der Marktforschung manchmal benutzten Bewertungstechniken kann mit Hilfe der Aufspaltung erklärt werden. Ehe wir jedoch ihren Gebrauch durch den Marktforscher beschreiben, wollen wir zunächst die Methode an Hand eines einfachen Beispiels, der Prüfung einer Gruppe von Personen auf eine bestimmte Eigenschaft hin, betrachten:

U sei die Klasse der Personen, mit denen ein Zweifragentest durchgeführt werden soll. Wir können dann die Aufspaltung $[R_1, W_1]$ bilden, bei der R_1 die Klasse derer darstellt, die die erste Frage richtig beantworteten, und W_1 die Klasse derer, deren Antwort auf die erste Frage falsch war. In ähnlicher Weise können wir die Aufspaltung $[R_2, W_2]$ bilden, wobei die 2 im Index auf die zweite Frage hinweist. Als nächstes untersuchen wir dann die Queraufspaltung

$$[R_1 \cap R_2,\ R_1 \cap W_2,\ W_1 \cap R_2,\ W_1 \cap W_2].$$

Sicherlich wird man nun Mitglieder der Zelle $R_1 \cap R_2$, die beide Fragen richtig beantworteten, in die oberste Stufe eingruppieren, Mitglieder der Zelle $W_1 \cap W_2$ in die unterste Stufe und den Rest in die mittlere Gruppe. Es entsteht jedoch die Frage, ob alle diejenigen, die nur eine Frage richtig und die andere falsch beantwortet haben, unabhängig davon welche Frage sie richtig beantworteten, in einer Klasse zusammengefaßt werden sollten.

Ein Weg, dieses Problem zu umgehen, ist, die Fragen so zu stellen, daß eine oder zwei der zweifelhaften Zellen der Queraufspaltung leer oder nahezu leer sind. Hat z. B. der Test den Sinn, die Fähigkeit der einzelnen Personen, ein Wort zu buchstabieren, zu messen, so mögen wir als buchstabierende Worte „Rat" und „Katalysator" wählen. Wir können dann erwarten, daß diejenigen, die nur ein Wort richtig buchstabieren, Fehler beim Buchstabieren des Wortes Katalysator machen, d. h. daß die Zelle $W_1 \cap R_2$ leer ist. Mit anderen Worten, man könnte erwarten, daß die Klasse derer, die beide Worte richtig buchstabieren, eine echte Unterklasse der Klasse ist, die all die Personen umfaßt, die das Wort Rat richtig buchstabierten. Man kann ferner erwarten,

daß diese Klasse identisch mit der Klasse derer ist, die „Katalysator" richtig buchstabierten. Offensichtlich kann man dieses Konzept auch auf Versuche ausdehnen, die mehr als zwei Fragen umfassen.

Man benutzt diese Methode manchmal auf dem Gebiete der Marktforschung, um das Konsumentenverhalten zu erforschen. Nehmen Sie z. B. an, ein Kaffeehändler sende an eine Reihe von Hausfrauen Fragebogen, durch die er, neben einer Anzahl von anderen Dingen, gern erfahren möchte, wie stark die Vorliebe der einzelnen Antwortenden für Kaffee ist. Dies kann er dadurch erreichen, daß er eine einfache Frage stellt, bei der sich der Beantworter selbst einzustufen hat. So mag z. B. der Fragebogen die Frage enthalten, ob die Hausfrau Kaffee „sehr liebt", „liebt", „weniger liebt" oder „gar nicht mag". Das mit dieser Technik verbundene Problem ist, daß verschiedene Beantworter des Fragebogens, die dem Kaffee in etwa gleich gegenüberstehen, sich selbst einfach darum verschieden einstufen, weil sie die möglichen Antworten verschieden interpretieren. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, können wir einen aus mehreren Fragen bestehenden Bewertungstest verwenden, der unserem „Buchstabiertest" sehr ähnlich ist. Wir könnten z. B. folgende zwei Fragen stellen:

1. Ziehen Sie Kaffee dem Tee vor? Ja _____ Nein _____

2. Trinken Sie, abgesehen vom Frühstück, bei heißem Wetter heißen Kaffee?
Ja _____ Nein _____

Spalten wir die Klasse der Antwortenden in $[J, N]$ auf, wobei J die Klasse derer ist, die eine Frage mit „Ja" beantworten, und N die Klasse derer, die sie mit „Nein" beantworten, so werden wir erfahrungsgemäß finden, daß eine der beiden Zellen $J_1 \cap N_2$ oder $N_1 \cap J_2$ nahezu leer ist. Nehmen wir an, in unserem Fall sei $N_1 \cap J_2$ praktisch leer. In diesem Falle können die zwei Fragen als gute Determinanten für die Haltung der befragten Personen gegenüber Kaffee angesehen werden: Die befragten Personen können entsprechend ihrer Angehörigkeit zu den Zellen $J_1 \cap J_2$, $J_1 \cap N_2$ oder $N_1 \cap N_2$ in fallender Reihenfolge eingeordnet werden.

ÜBUNGEN

1. Johann habe zwei und Heinrich einen Pfennig. Sie kommen darin überein, dreimal, oder bis einer von ihnen keinen Pfennig mehr besitzt, zu knobeln. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das die möglichen Verläufe des Spieles darstellt. Zeigen Sie den Spielfortschritt durch eine Reihe von Aufspaltungen. [Lös.: Es gibt vier Wege.]

2. Welche Information gibt uns in Übung 2 die Queraufspaltung der Aufspaltungen $[A, \tilde{A}]$ und $[H, N]$?

3. Spalten Sie in Kapitel 1, Abschnitt 6, Beispiel 1 die Klasse U_t der möglichen Verhaltensweisen im i-ten Monat in $[A_i, K_i, V_i]$ auf. Hierbei stelle A_t die Klasse der mit „Abwarten" bezeichneten Verhaltensweisen im i-ten Monat und entsprechend V und K „Verkaufen" und „Kaufen" dar. Was können wir über die Zellen $K_i \cap K_{i+1}$ und $V_t \cap V_{i+1}$ bei der Betrachtung der Klasse $U = U_1 \cup U_{i+1}$ sagen.

4. In Übung 3 sei U_i die Klasse der möglichen Verhaltensweisen im i-ten Monat. Spalten Sie diese Klassen in $[L_t, F_i]$ auf, wobei L_t die Klasse der Verhaltensweisen sei, die das Kaufhaus am Ende des i-ten Monats leeren, und V_i die Klasse derer, die es füllen. Was kann über die Zellen $F_i \cap V_t$ und $L_i \cap K_i$ der Queraufspaltung der Aufspaltungen $[A_i, K_i, V_i]$ und $[L_i, F_i]$ gesagt werden?

5. Nehmen Sie an, daß in den Übungen 3 und 4 $L_{i+1} \cap H_{i+1} = E$ sei. Was kann man über die Zellen der Aufspaltung L_i, F_t sagen?

6. Welche Informationen erhält man im Beispiel 3 durch die Queraufspaltung von $[S_a, S_b, S_c, S_d]$ und $[T_a, T_b, T_c, T_d]$?
7. Nehmen Sie an, daß in Übung 3 U in $[V, \tilde{V}]$ aufgespalten werde, wobei V die Klasse all der Bemerkungen sei, die in Form einer Frage gestellt worden sind. Welche Information kann man durch die Queraufspaltung von $[V, \tilde{V}]$ und $[S_a, S_b, S_c, S_d]$ erlangen? Welche aus der Queraufspaltung von $[V, \tilde{V}]$ und $[U_1, U_2, U_3]$?
8. Teilen Sie in Beispiel 2 die i-ten Orangensaftkäufe durch eine Hausfrau danach auf, ob es Marke A war oder nicht, d. h. bilden Sie die Aufspaltung $[A_i, \tilde{A}_i]$. Welche Information erlangen wir durch die Queraufspaltung der Aufspaltungen
$$[A_i, \tilde{A}_i] \text{ und } [A_{i+1}, \tilde{A}_{i+1}]?$$
9. Nehmen Sie an, man mache in Beispiel 2 die folgenden Annahmen bezüglich des Verhaltens von Hausfrauen bei Orangensaftkäufen: Jede Hausfrau kaufe nach einem Kauf der Marke A bei 60% der Käufe wiederum Marke A und bei 40% der Käufe eine andere Marke. Nach dem Kauf einer anderen Marke kaufe sie in 20% aller Fälle Marke A und in 80% aller Fälle eine andere Marke.
   a) Welchen Anteil der Marke A an den nächsten Käufen können wir erwarten, wenn die Hälfte der Hausfrauen zuletzt Marke A kaufte? Welchen Anteil von A können wir beim zweiten und beim dritten Kauf erwarten?
   b) Welchen Anteil von A können wir beim nächsten Kauf erwarten, wenn ein Drittel der Hausfrauen das letzte Mal Marke A kaufte? Welchen Anteil können wir beim zweiten und beim hundertsten Kauf erwarten?
10. Bei einem Buchstabiertest mit drei Worten (siehe Beispiel 4) werden die Prüflinge, je nachdem sie das i-te Wort ($i = 1, 2, 3$) richtig buchstabiert haben oder nicht, den Klassen $[R_i, W_i]$ zugeteilt. Welche Zellen der Queraufspaltung von $[R_1, W_1]$, $[R_2, W_2]$ und $[R_3, W_3]$ müssen leer sein, wenn der Test eine eindeutige Bewertungsmethode der Prüflinge darstellen soll und wenn das erste Wort am schwersten und das dritte Wort am einfachsten zu buchstabieren ist?

3. Die Anzahl der Elemente einer Klasse

Der Rest dieses Kapitels soll bestimmten Zählproblemen gewidmet werden. Wir wollen die Anzahl der Elemente einer Klasse X mit $n(X)$ bezeichnen. Nehmen Sie nun an, wir wüßten die Anzahl der Elemente bestimmter gegebener Klassen und suchten nach der Anzahl der in anderen, dazu in Beziehung stehenden Klassen enthaltenen Elemente. Als Beispiel wollen wir das folgende Problem betrachten: Uns werde gesagt, daß dem Vorstand der Gesellschaft ABC zehn Personen und dem Vorstand der Gesellschaft XYZ fünfzehn Personen angehören. Können wir nun sagen, wie viele entweder dem Vorstand der Gesellschaft

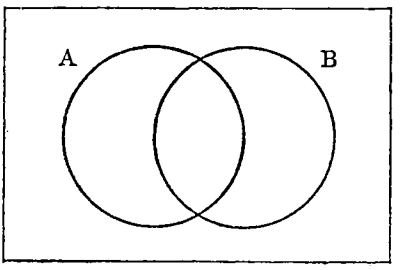


Abb. 3

ABC oder dem der Gesellschaft XYZ angehören ? Diese Frage kann nur mit einem Nein beantwortet werden, da wir nicht wissen, wie viele Personen Mitglieder beider Vorstände sind. Wüßten wir, daß keiner der Direktoren beiden Vorständen zugleich angehört, d. h. wüßten wir, daß beide Klassen der Direktoren voneinander unabhängig sind, dann wäre die Antwort: Die Summe beider Vorstände oder 25 Direktoren. Im allgemeinen gilt $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, wenn uns zwei voneinander unabhängige Klassen A und B gegeben werden. Nehmen Sie nun an, daß die beiden Klassen A und B wie in Abb. 3 gezeigt wird, gemeinsame Elemente enthalten. Wir können die Klasse A in die voneinander unabhängigen Klassen $A \cap \tilde{B}$ und $A \cap B$ spalten. Desgleichen können wir auch B in die voneinander unabhängigen Klassen $\tilde{A} \cap B$ und $A \cap B$ aufspalten. Es ist also

$$n(A) = n(A \cap \tilde{B}) + n(A \cap B)$$
$$n(B) = n(\tilde{A} \cap B) + n(A \cap B).$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$n(A) + n(B) = n(A \cap \tilde{B}) + n(\tilde{A} \cap B) + 2n(A \cap B).$$

Da die Klassen $A \cap \tilde{B}$, $\tilde{A} \cap B$ und $A \cap B$ voneinander unabhängig sind und ihre Vereinigung $A \cup B$ ist, erhalten wir die Gleichung

$$n(A \cup B) = (A) + n(B) - n(A \cap B),$$

die ganz allgemein für zwei Klassen, A und B, gilt.

Beispiel 1. Es seien p und q zwei Sätze bezüglich der Klasse U logischer Möglichkeiten. Bezeichnen Sie die Wahrheitsklassen dieser Sätze mit P und Q. Die Wahrheitsklasse von $p \vee q$ ist dann $P \cup Q$, und die Wahrheitsklasse von $p \wedge q$ ist $P \cap Q$. Die oben angegebene Gleichung ermöglicht es uns nun, die Anzahl der Fälle zu ermitteln, bei denen $p \wedge q$ wahr ist, wenn wir die Anzahl der Fälle wissen, für die p, q und $p \wedge q$ wahr ist.

Beispiel 2. *Mehr als zwei Klassen.* Es ist grundsätzlich möglich, Formeln für die Ermittlung der Anzahl der Elemente einer Klasse, die aus der Vereinigung von mehr als zwei Klassen (siehe Übung 8) besteht, abzuleiten. Gewöhnlich ist es jedoch bei diesen Fällen einfacher, mit Venn Diagrammen zu arbeiten. Nehmen Sie z. B. an, es sei die folgende Statistik über eine Gruppe von 30 Direktoren aufgestellt worden:

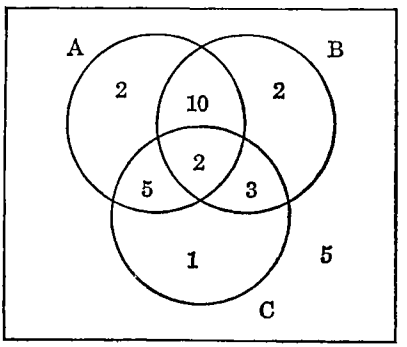


Abb. 4

19 sind Direktoren der Gesellschaft A.
17 sind Direktoren der Gesellschaft B.
11 sind Direktoren der Gesellschaft C.
12 sind Direktoren von A und B.
7 sind Direktoren von A und C.
5 sind Direktoren von B und C.
2 sind Direktoren von A, B und C.

Wir zeichnen zunächst das in Abb. 4 gezeigte Venn Diagramm und setzen dann die Anzahl der Elemente jeder Unterklasse in das Diagramm ein, indem wir bei der letzten Position unserer Statistik anfangen und dies bis zur ersten Zeile fortsetzen. Drei Herren sind also Direktoren der Gesellschaften B und C, jedoch nicht der Gesellschaft A, da 2 Personen Direktor aller drei Gesellschaften und 5 Personen Direktoren der Gesellschaften B und C sind. Sobald wir das Diagramm vervollständigt haben, können wir daraus die Anzahl der Direktoren für jede Gesellschaftskombination ablesen. So ist z. B. die Anzahl der Personen, die Direktoren der Gesellschaft C, jedoch nicht der Gesellschaft A sind, $3 + 1 = 4$.

Beispiel 3. *Implikationen der Testinformationen.* Betrachten Sie noch einmal das Beispiel 2 des ersten Kapitels, Abschnitt 6. Wir wollen uns jedoch dabei auf die Fälle beschränken, bei denen zwar eine seismographische Aufnahme durchgeführt wurde, bei denen jedoch, unabhängig vom Ergebnis dieser Aufnahme, die Entscheidung gefällt wurde zu bohren. Wir können nun die Klasse U der unter diesen Bedingungen gebohrten Löcher in $[S, \tilde{S}]$ aufspalten, wobei S die Klasse der Löcher darstellt, die auf Grund positiver seismographischer Aufnahmen durchgeführt wurden. Wir können ferner die Klasse der gebohrten Löcher in $[O, D]$ aufspalten, wobei O die Klasse all der Löcher ist, die ölträchtig wurden, währenddessen D die Klasse der Löcher darstellt, bei denen kein Öl gefunden wurde. Wir wollen uns dann die Queraufspaltung

$$[S \cap O, S \cap D, \tilde{S} \cap O, \tilde{S} \cap D]$$

dieser Aufspaltungen ansehen.

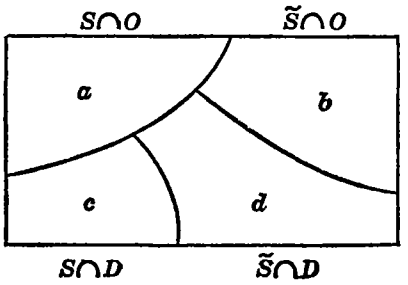


Abb. 5

Nehmen Sie nun an, eine Studie habe ergeben, daß der Anteil der Löcher, für die positive seismographische Ergebnisse erreicht wurden, größer bei den Löchern ist, bei denen man auf Öl stieß, als bei den Löchern, bei denen man kein Öl fand. Es wird dann behauptet, daß die Information seismographischer Aufnahmen relevant für das Finden von Öl ist, d. h., daß der Anteil der Löcher, bei denen Öl gefunden wird, größer bei den seismographisch positiv beurteilten Bohrungen ist als bei den anderen.

Es sei nun $a = n(S \cap O)$, $b = n(\tilde{S} \cap O)$, $c = n(S \cap D)$ und $d = n(\tilde{S} \cap D)$, wie wir es aus Abb. 5 ersehen können. Die nun interessierenden Verhältnisse sind dann

$$p_1 = \frac{a}{a+b}, \quad p_2 = \frac{c}{c+d}, \quad p_3 = \frac{a}{a+c}, \quad p_4 = \frac{b}{b+d},$$

wobei p_1 den Anteil der Löcher darstellt, bei dem man auf Öl stieß, nachdem seismographische Aufnahmen darauf hingewiesen hatten, p_2 den Anteil der Löcher, bei denen kein Öl gefunden wurde, obwohl die seismographischen Aufnahmen darauf hatten schließen lassen, p_3 der Anteil der Löcher, bei denen man auf Öl stieß und bei denen die seismographischen Aufnahmen auf Öl hingewiesen hatten, und p_4 schließlich der Anteil der Löcher, bei denen man auf Öl stieß, obwohl die seismographischen Ergebnisse negativ gewesen waren.

Aus dem Obigen ergibt sich also, daß dann $p_3 > p_4$, wenn $p_1 > p_2$. Die Hypothese

$$\frac{a}{a+b} > \frac{c}{c+d},$$

ist dann und nur dann wahr, wenn $ac + ad > ac + bc$, d. h. wenn und nur wenn $ad > bc$. Der Schluß

$$\frac{a}{a+c} > \frac{b}{b+d},$$

ist dann und nur dann wahr, wenn $ab + ad > ab + bc$, d. h. dann und nur dann, wenn $ad > bc$. Die zwei Sätze $p_1 > p_2$ und $p_3 > p_4$ sind also in Wirklichkeit äquivalente Sätze, so daß die obige Begründung gilt.

ÜBUNGEN

1. Bestimmen Sie in Beispiel 2
   a) die Anzahl der Personen, die sowohl Direktor der Gesellschaft A als auch der Gesellschaft C sind,
   b) die Anzahl derer, die Direktor zweier Gesellschaften sind,
   c) die Anzahl derer, die Direktor einer oder keiner Gesellschaft sind. [Lös. b) 18.]

2. Eine Rundfunkstation sende um 10 Uhr und um 11 Uhr gleiche kommerzielle Werbesendungen aus. Eine Stichprobenbefragung weise darauf hin, daß der Sendung um 10 Uhr 10700 und um 11 Uhr 12400 Personen zuhören. Wie viele verschiedene Personen empfangen die Werbesendung, wenn:
   a) keine der Personen eine ganze Stunde lang zuhört?
   b) 2300 der Personen, die um 10 Uhr zuhören auch um 11 Uhr der Sendung lauschen?

3. Die Wahrheitsklasse des Satzes p bestehe aus 10 Elementen und die Wahrheitsklasse q aus 20 Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Wahrheitsklasse von $p \vee q$, wenn
   a) p und q unabhängig voneinander sind,
   b) p und q einen nicht leeren Durchschnitt haben und die Wahrheitsklasse von $p \wedge q$ zwei Elemente enthält. [Lös. b) 28.]

4. Bestimmen Sie die Anzahl der Fälle, in denen sowohl p als auch q wahr ist; $p \vee q$ in 10 Fällen wahr ist; der Satz p in 15 Fällen wahr ist; und der Satz q in 5 Fällen wahr ist. Welches Verhältnis besteht zwischen p und q?

5. Nehmen Sie an, ein bestimmter Ölsucher habe festgestellt, daß man bei 30% der Löcher, die gebohrt wurden, ohne daß seismographische Aufnahmen auf Öl hingewiesen hatten, Öl ergaben. Nehmen Sie weiterhin an, daß die Hälfte der Löcher, bei denen seismographische Aufnahmen auf Öl hingewiesen hatten, Fehlschläge waren und 4/4 der Löcher, bei denen seismographische Aufnahmen auf kein Öl hingewiesen hatten, auch ohne Öl blieben. Bestimmen Sie den Anteil der Löcher, bei denen seismographische Aufnahmen auf Öl hatten schließen lassen und die dann auch Öl ergaben, und den Prozentsatz derer, die Öl ergaben, obwohl die seismographischen Aufnahmen dies nicht hatten vermuten lassen.

6. Bei einer Erhebung bezüglich erwarteter Verbraucherausgaben erfuhr man, daß sich 35% aller Familien innerhalb eines Jahres einen neuen Wagen kaufen wollten. Bei einer späteren Nachprüfung ergab sich, daß 80% derer, die wirklich einen Wagen innerhalb eines Jahres gekauft hatten, diese Absicht auch beim ersten Interview geäußert hatten, während 20% derer, die sich ein Auto hatten kaufen wollen, keines gekauft hatten.
   a) Welcher Prozentsatz der befragten Gruppe kaufte wirklich Wagen?
   b) Welcher Prozentsatz der Gesamtgruppe reagierte anders als zu erwarten war?
   c) Kommentieren Sie die Brauchbarkeit von Interviews bezüglich der erwarteten Ausgaben als Grundlage zur Voraussage effektiver Ausgaben.

7. Eine automatische Prüfanlage prüfte 10000 Teile zweimal und klassifizierte davon 8100 beide Male als gut, 100 beide Male als schlecht und 900 einmal als gut und das zweite Mal als schlecht. Kommentieren Sie die Sicherheit der Prüfanlage.
8. A, B und C seien drei Unterklassen einer Universalklasse U. Zeichnen Sie ein Venn Diagramm und zeigen Sie, daß
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$
9. Wir groß ist $n(P \cup Q$, wenn p und q äquivalente Sätze sind und $n(P) = 10$ ist?
10. Beweisen Sie, daß $n(P \cup \tilde{Q}) = n(P) + n(\tilde{Q})$, wenn q durch p impliziert wird?
11. In einem Flugzeug befinden sich neun Knaben, fünf amerikanische Kinder, neun Männer, sieben ausländische Knaben, 14 Amerikaner, sechs männliche Amerikaner und sieben Ausländer weiblichen Geschlechts. Wieviel Personen befinden sich insgesamt im Flugzeug? [Lös.: 33.]

4. Permutationen

Wir wollen nun untersuchen, auf welche Weisen eine Gruppe von n verschiedenen Elementen geordnet werden kann. Wir nennen eine Anordnung von n verschiedenen Elementen in *einer gegebenen Reihenfolge* eine *Permutation* der n Elemente. Zunächst wollen wir den Fall dreier Elemente a, b und c betrachten. Alle möglichen Permutationen dieser drei Elemente können als Wege des in Abb. 6 gezeigten Baumes dargestellt werden. Jeder Weg stellt eine mögliche Permutation dar, so daß wir in diesem Fall von sechs möglichen Permutationen sprechen können. Wir könnten sie auch wie folgt darstellen:

abc, bca,
acb, cab,
bac, cba.

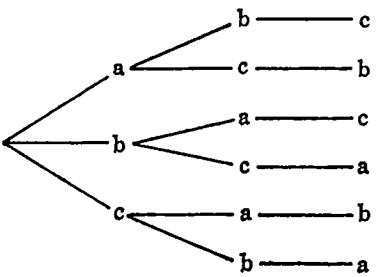


Abb. 6

Hätten wir einen ähnlichen Baum für n Elemente zu konstruieren, so würden wir finden, daß die Anzahl der Wege das Produkt der Zahlen n, $n-1$, $n-2$ usw. bis zur Zahl 1 ist. Zahlen, die in dieser Weise ermittelt worden sind, tauchen sehr oft auf. Man hat ihnen deshalb ein besonderes Symbol, nämlich $n!$ gegeben und liest dies „n Fakultät". So ist z. B.

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \quad \text{usw.}$$

Aus Gründen, die wir später noch klarer sehen werden, definieren wir: $0! = 1$. *Für n verschiedene Elemente gibt es also $n!$ verschiedene Permutationen.*

Beispiel 1. Zur Herstellung eines Teiles seien sieben verschiedene Arbeitsgänge nötig, für die es keine festgelegte Reihenfolge gäbe. Die Arbeitsgänge können also in $7! = 5040$ verschiedenen Reihenfolgen ausgeführt werden.

Beispiel 2. Zehn verschiedene Arbeiten seien zehn Arbeitskräften zuzuweisen. Auf wievielerlei Weise kann das geschehen? Der erste Arbeiter kann zehn verschiedene Arbeiten bekommen, der zweite neun, der dritte acht usf.: Es gibt also $10! = 3628800$ mögliche Weisen, den Arbeitern die einzelnen Arbeiten zuzuweisen.

Beispiel 3. In einer Gesellschaft gäbe es n Direktoren. Auf wie viele Weisen können sie an einem runden Tisch sitzen, wenn zwei Anordnungen dann als voneinander verschieden betrachtet werden, wenn wenigstens eine Person bei den zwei Anordnungen verschiedene rechte Nachbarn hat? Um dieses Problem zu lösen, nehmen Sie an, einer der Direktoren verändere seinen Platz nicht. Es gibt dann $(n - 1)$ Wege, die anderen Personen zu setzen. Wir haben damit alle die Anordnungen erfaßt, die wir als voneinander verschieden betrachten wollen. Damit gibt es also $(n - 1)!$ mögliche Sitzordnungen.

Ein allgemeines Prinzip. Es gibt viele Zählprobleme, bei denen es nicht möglich ist, eine einfache Formel zur Ermittlung der Anzahl der möglichen Fälle anzugeben. Sehr oft ist dann der einzige Weg, die Anzahl der Fälle zu ermitteln, einen Baum zu zeichnen und dessen Zweige zu zählen (siehe Übung 4). Manchmal erweist sich auch das folgende, allgemeine Prinzip als nützlich:

Nehmen Sie an, etwas könne auf genau r verschiedene Weisen ausgeführt werden. Für jeden dieser Wege könne wiederum eine zweite Handlung auf genau s verschiedene Weisen ausgeführt werden. Kann nun für jede der zwei ersten Möglichkeiten eine dritte Handlung auf genau t verschiedenen Weisen durchgeführt werden usw., so kann man die Gesamtheit der Handlung auf $r \cdot s \cdot t \ldots$ verschiedene Weisen ausführen.

Um zu verstehen, daß das obengenannte Prinzip allgemein gilt, stelle man sich ein Baumdiagramm vor, das all die Wege zeigt, auf denen eine bestimmte Anzahl von Handlungen ausgeführt werden kann. Im Ausgangspunkt hätten dann r Zweige ihren Ursprung, an deren Endpunkten jeweils wiederum s neue Zweige beginnen würden. An den Endpunkten dieser s Zweige setzten wiederum t weitere Zweige an, usw. Die Anzahl der Wege des Baumdiagramms wäre dann durch das Produkt $r \cdot s \cdot t$ gegeben.

Beispiel 4. Ein spezieller Fall dieses Prinzipes ist die Auswahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen. Wollten wir alle möglichen Permutationen aufführen, so gäbe es n Möglichkeiten für das erste, für jede dieser Möglichkeiten $n - 1$ Wege für das zweite usw., bis wir zum letzten Element kommen, für das nur noch eine Möglichkeit besteht. Es bestünden somit insgesamt $n(n - 1) \ldots 1 = n!$ Möglichkeiten.

Beispiel 5. Ein Automobilfabrikant produziere vier verschiedene Modelle. Die Modelle A und B sollen in den verschiedenen Ausführungen — Limusine, Hardtop, Cabriolet

und Kombiwagen — hergestellt werden, während die Modelle C und D lediglich als Limousine und Hardtop fabriziert werden sollen. Jeder Wagen könne eine von neun verschiedenen Farben haben. Es gäbe somit $4 \cdot 9 = 36$ verschiedene Typen der Modelle A und B und $2 \cdot 9 = 18$ Typen der Modelle C und D. Insgesamt würden also durch den Produzenten

$$2 \cdot 36 + 2 \cdot 18 = 108$$

verschiedene Wagentypen hergestellt werden.

Beispiel 6. Nehmen Sie an, es seien n Bewerber für eine bestimmte Position vorhanden. Die Bewerber würden durch drei Prüfer unabhängig voneinander geprüft und, entsprechend ihrer Eignung für die Position, eingestuft. Man entscheide, einen Bewerber dann einzustellen, wenn er von wenigstens zweien der Prüfer als der beste bezeichnet würde. Welcher Bruchteil der möglichen Prüfungsergebnisse würde zur Einstellung des Kandidaten führen?
Wir wollen dies Problem dadurch lösen, daß wir den Bruchteil der Ergebnisse ermitteln, die nicht zu einer Einstellung führen, und diesen dann von 1 abziehen. Gewöhnlich findet man die Lösung auf diesem indirekten Wege leichter als auf dem direkten. Die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse ist $(n!)^3$, da jeder der Prüfer die Prüflinge in $n!$ verschiedenen Weisen beurteilen kann. Eine bestimmte Beurteilungsweise führt dann nicht zur Einstellung eines Bewerbers, wenn jeder der Prüfer einen anderen Bewerber an die erste Stelle gesetzt hat. Dies kann nach dem allgemeinen Prinzip auf $n(n-1)(n-2)$ verschiedene Arten erfolgen. Für jede mögliche Erstplazierung gibt es $[(n-1)!]^3$ Arten, auf die die verbleibenden Bewerber durch die Prüfer eingestuft werden können. Die Anzahl der Bewertungsarten, die nicht zu einer Einstellung führen, ist daher

$$n(n-1)(n-2)[(n-1)!]^3.$$

Dividieren wir diese Zahl durch $(n!)^3$, so erhalten wir

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

als den Anteil der Bewertungsweisen, die nicht zur Einstellung eines Bewerbers führen. Der Anteil derer, die zu einer Einstellung führen, ergibt sich, wenn wir den zuerst genannten Anteil von 1 subtrahieren; wir erhalten dann

$$\frac{3n-2}{n^2}.$$

Wir sehen also, daß im Falle dreier Bewerber 7/9 der Möglichkeiten zur Einstellung eines Bewerbers führen. Man mag die Vorgehensweise in diesem Fall kritisieren, weil selbst dann, wenn die Prüfer vollkommen unfähig sind und sie die Auswahl im wesentlichen durch Zufall treffen, noch eine große Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß einer der Bewerber auf Grund der Bewertungen eingestellt wird. Ist n jedoch 10, so ist der Anteil der zur Einstellung führenden Beurteilungsweisen nur 0,28, so daß man den Beurteilungen der Prüfer dann wesentlich mehr Gewicht beimessen kann.

ÜBUNGEN

1. Ein Vertreter solle fünf Kunden besuchen. Auf wievielerlei Weise ist dies möglich, wenn
   a) er alle fünf an einem Tag besucht,
   b) drei am ersten und zwei am zweiten Tag besucht. [Lös.: 120; 120.]

2. In einer Werkstatt stehen zwei Fräsmaschinen, vier Drehbänke, sieben Bohrmaschinen und drei Schleifmaschinen. Auf wievielerlei Weisen kann ein bestimmtes Teil bearbeitet werden, das erst geschliffen, dann gefräst, dann gedreht und dann gebohrt werden muß? Welche Wege kann das Teil dann laufen, wenn die vier Operationen in jeder möglichen Reihenfolge durchgeführt werden können?

3. Zeigen Sie die möglichen Anordnungen der Maschinen A, B, C und D in einem Kreis. Wie viele Anordnungen gibt es?

4. Auf wievielerlei Weisen können sechs Personen, A, B, C, D, E und F um einen runden Tisch sitzen, wenn
   a) B immer zur Rechten von A sitzen muß? [Lös.: 24.]
   b) immer B oder C zur Rechten von A sitzen muß? [Lös.: 48.]
   c) B oder C immer zur Rechten von A und C oder D immer zur Rechten von B sitzen muß? [Lös.: 18.]

5. Nehmen Sie an, wir unterscheiden nur dann zwischen zwei verschiedenen Sitzordnungen von n Personen an einem runden Tisch, wenn wenigstens eine Person bei den beiden Anordnungen einen anderen Nachbarn hat. D. h. wir betrachten zwei Anordnungen dann nicht als voneinander verschieden, wenn lediglich der rechte und der linke Nachbar einer Person ausgetauscht wurde. Vieviel voneinander verschiedene Sitzordnungen gibt es nun?

6. Auf wie viele Weisen können sechs Personen auf Büros verteilt werden, wenn
   a) sechs Büros bestehen und in jedem Büro eine Person sitzen soll?
   b) drei Büros vorhanden sind und in jedes Büro zwei Personen kommen sollen?
   c) vier Büros vorhanden sind, von denen zwei für zwei Personen und zwei für jeweils eine Person gedacht sind?

7. In einer Gesellschaft arbeiten u. a. sechs Ingenieure und sechs Direktoren. Zwei der Direktoren sind Ingenieure. Geben Sie die mögliche Zusammensetzung eines Ausschusses an, der aus vier Personen besteht, die entweder Ingenieur oder Direktor sind. Wie viele der Mitglieder sind a) nur Ingenieure, b) nur Direktor, c) sowohl Ingenieur als auch Direktor?

8. Wie viele Möglichkeiten gibt es in Übung 7, einen Ausschuß von vier Personen zu bilden, bei dem
   a) zwei der Mitglieder nur Ingenieure sind, eines nur Direktor ist und eines sowohl Ingenieur als auch Direktor ist? [Lös.: 48.]
   b) bei dem zwei nur Ingenieure sind und zwei sowohl Ingenieur als auch Direktor? [Lös.: 6]
   c) bei dem zwei nur Ingenieure und zwei nur Direktor sind? [Lös.: 36.]

9. Nehmen Sie an, daß der in Übung 7 genannte Ausschuß aus vier Personen zu bestehen habe, von denen wenigstens zwei Ingenieure und wenigstens zwei Direktoren sind, wobei eine Person, die sowohl Ingenieur als auch Direktor ist, auf beide Quoten angerechnet werden könne. Auf wievielerlei Weise kann ein solcher Ausschuß gebildet werden?

10. Ändern Sie das Beispiel 6 so ab, daß ein Bewerber, wenn er eingestellt werden soll, von zweien der Prüfer als Bester und vom dritten der Prüfer entweder als Bester oder Zweitbester bezeichnet werden muß! Welcher Bruchteil der möglichen Beurteilungen führt im Falle von drei vorhandenen Bewerbern zur Einstellung? Im Falle von n Bewerbern? [Lös.: $4/9$; $4/n^2$.]

11. Ermitteln Sie die Anzahl der jeweils möglichen unterscheidbaren Anordnungen der folgenden Buchstabenkombinationen: (Die gleichen Buchstaben mit verschiedenen Indizes sollen als unterscheidbare Elemente angesehen werden.)
    a) A_1, A_2, B_1, B_2, B_3. [Lös.: 120.]
    b) A, A, B_1, B_2, B_3. [Lös.: 60.]
    c) A, A, B, B, B. [Lös.: 10.]

12. Zeigen Sie, daß die Anzahl der unterschiedlichen Anordnungen, von n Elementen, von denen n_1 dem Typ 1, n_2 dem Typ 2 usw. angehören (bei r verschiedenen Typen)

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

ist.

5. Anzahl möglicher Aufspaltungen

Bis jetzt hatten wir nicht die Gelegenheit, die Aufspaltungen [(1,2), (3,4)] und [(3,4), (1,2)] der ganzen Zahlen von 1 bis 4 als voneinander verschiedene Aufspaltungen zu betrachten. Es wird sich jedoch nützlich erweisen, dies an dieser Stelle zu tun. Um diese Unterscheidung vornehmen zu können, wollen wir den Begriff der geordneten Aufspaltung einführen. Bei einer *geordneten Aufspaltung mit r Zellen* ist für die r Zellen (von denen manche leer sein mögen) eine spezielle Reihenfolge festgelegt.

Uns interessiert nun die Anzahl der möglichen geordneten Aufspaltungen mit r Zellen, die aus einer Klasse von n Objekten mit einer vorbestimmten Anzahl von Elementen in jeder Zelle gebildet werden können. Wir wollen zunächst einen speziellen Fall betrachten, um daran das allgemeine Problem zu illustrieren.

Nehmen Sie an, wir hätten acht Kunden, A, B, C, D, E, F, G und H, die wir drei Vertretern so zuordnen wollen, daß Vertreter 1 für drei, Vertreter 2 für drei und Vertreter 3 für zwei Kunden zuständig ist. Auf wievielerlei Weise kann dies geschehen? Ein Weg, die Kunden zuzuordnen ist der, sie auf irgendeine Weise zu numerieren und dann die ersten drei dem Vertreter 1, die nächsten drei dem Vertreter 2 und die letzten zwei dem Vertreter 3 zuzuordnen. Nun gibt es 8! Arten, auf die man Kunden numerieren kann, wobei jedoch nicht alle zu verschiedenen Zuordnungen führen. Die einer bestimmten Numerierung entsprechende Zuordnung können wir wie folgt darstellen:

$$|\mathrm{BCA}|\mathrm{DFE}|\mathrm{HG}|.$$

In diesem Fall werden B, C und A dem Vertreter 1, D, F und E dem Vertreter 2 und H und G dem Vertreter 3 zugeordnet. Beachten Sie, daß Numerierungen, die lediglich die Reihenfolge der Kunden eines bestimmten

Vertreters ändern, zur gleichen Zuordnung führen. Die Anzahl der verschiedenen Numerierungen, die zur gleichen Zuordnung wie die oben gezeigte führen, ist gleich der Anzahl der Numerierungen, die lediglich darin von der gegebenen abweichen, daß sie die Reihenfolge der Kunden eines speziellen Vertreters variieren. Da wir die drei Kunden des Vertreters 1 auf 3! verschiedene Weisen anordnen können, die Kunden des Vertreters 2 ebenfalls auf 3! Arten und die Kunden des Vertreters 3 auf 2! verschiedene Weisen, gibt es $3! \cdot 3! \cdot 2!$ solcher Numerierungen. Wir können die 8! verschiedenen Reihenfolgen also in Gruppen zu $3! \cdot 3! \cdot 2!$ verschiedenen Reihenfolgen so aufteilen, daß die Reihenfolgen einer einzelnen Gruppe zur gleichen Zuordnung der Kunden führen. Da jede Gruppe $3! \cdot 3! \cdot 2!$ Elemente enthält und insgesamt 8! Elemente vorhanden sind, gibt es $8!/(3!3!2!)$ Gruppen und ebensoviel verschiedene Kundenzuordnungen.

Wir könnten die gleiche Beweisführung auch für r Vertreter und n Kunden durchführen, wobei n_1 Kunden dem ersten Vertreter, n_2 Kunden dem zweiten Vertreter usw. zugeordnet werden sollten. Dies führt zu dem folgenden Resultat: Es seien $n_1, n_2, \ldots, n_r$ positive ganze Zahlen, für die

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

gilt.

In diesem Fall ist die Anzahl der geordneten Aufspaltungen mit r Zellen $[A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r]$ einer Klasse von n Elementen, von denen sich n_1 in der ersten Zelle, n_2 in der zweiten Zelle usw. befinden,

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

Wir wollen diese Zahl durch das Symbol

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

bezeichnen[1].

Besonders wichtig ist der spezielle Fall zweier Zellen. In diesem Fall kann das Problem auch als die Bestimmung der Anzahl der Unterklassen mit je r Elementen, die aus einer Klasse mit n Elementen gebildet werden können, definiert werden. Dies ergibt sich daraus, daß bei jeder Auswahl bestimmter Elemente eine Aufspaltung $[A, \tilde{A}]$ definiert wird, bei der A die Klasse der gewählten Elemente und $\tilde{A}$ die Klasse der verbleibenden Elemente ist. Da die Anzahl der möglichen Aufspaltungen dieser Art $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ ist, entspricht dies auch der Anzahl der Unterklassen mit r Elementen. Unsere

---

[1] Man liest dies als „n über $n_1, n_2, \ldots, n_r$". [Der Übersetzer.]

Ausgangsformel $\binom{n}{r, n-r}$ wird für diesen Fall auf $\binom{n}{r}$ reduziert. Man bezeichnet diese Zahlen gewöhnlich als *Binominalkoeffizienten.*

Beachten Sie, daß $\binom{n}{n-r}$ die Anzahl der Unterklassen mit $n - r$ Elementen ist, die aus n Elementen gebildet werden können. Das entspricht auch der Anzahl der möglichen Aufspaltungen der oben gegebenen Form $[\tilde{A}, A]$. Da dies offensichtlich gleich der Anzahl der möglichen Aufspaltungen $[A, \tilde{A}]$ ist, gilt

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Beispiel 1. Eine Gesellschaft beziehe ein bestimmtes elektronisches Bauteil von drei verschiedenen Lieferanten. Auf wieviel verschiedene Weisen kann sie sechs Aufträge, davon zwei an A, drei an B und einen an C vergeben? Aus jeder möglichen Reihenfolge der sechs Käufe bilden wir eine Aufspaltung mit drei Zellen: Die erste Zelle enthält die Käufe bei A, die zweite die bei B und die dritte die bei C. Es gibt $\binom{6}{2, 3, 1} = 60$ solcher Aufspaltungen und damit 60 Arten, auf die zwei Aufträge an A, drei an B und einer an C vergeben werden können.

Beispiel 2. Am 14. Juli 1961 wurden 1257 verschiedene Aktien an der New Yorker Börse gehandelt. Beim Schluß der Börse am vorangehenden Tag zeigten 576 Aktien steigende Tendenz, 429 zeigten fallende Tendenz und 252 waren gleichbleibend. Wir erhalten also eine Aufspaltung der 1257 Aktien in drei Zellen mit 576, 429 und 252 Elementen. Nach dem oben Gesagten gibt es $\frac{1257!}{576!\,429!\,252!}$ verschiedene Wege, auf denen diese spezielle Situation entstehen konnte. Diese Zahl entspricht ungefähr $2 \cdot 10^{568}$.

Beispiel 3. Das folgende Beispiel ist für die im nächsten Kapitel behandelte Wahrscheinlichkeitstheorie wichtig. Werfen wir eine Münze sechsmal, so gibt es 2^6 Möglichkeiten verschiedener Ergebnisse, da bei jedem Wurf entweder die Zahl oder der Kopf erscheinen kann. Bei wie vielen dieser Möglichkeiten erscheint nun das Wappen viermal und die Zahl zweimal?

Jede Folge von sechs Wappen und Zahlen bildet auf die folgende Weise eine zweizellige Aufspaltung der Zahlen von 1 bis 6: In der ersten Zelle befinden sich die Zahlen, die Würfen entsprechen, bei denen ein Wappen auftauchte, und die zweite Zelle enthält die Zahlen, die den Würfen entsprechen, die die Zahl ergaben. Wir wollen fordern, daß die erste Zelle vier Elemente und die zweite zwei Elemente enthalten soll. Die Anzahl der 2^6 Möglichkeiten, die zu vier Wappen und zwei Zahlen führen, ist daher gleich der Zahl der zweizelligen Aufspaltungen von sechs Elementen, bei denen die erste Zelle vier Elemente und die zweite Zelle zwei Elemente enthält. Die Antwort ist also $\binom{6}{4} = 15$.

Eine gleichartige Analyse für n Würfe einer Münze zeigt, daß es $\binom{n}{r}$ verschiedene Reihenfolgen der Wappen und Zahlen gibt, bei denen genau r-mal das Wappen und $n-r$-mal die Zahl auftaucht.

ÜBUNGEN

1. Errechnen Sie folgende Werte:

(a) $\binom{7}{5}$ [Lös.: 21.] (e) $\binom{5}{0}$

(b) $\binom{3}{2}$ (f) $\binom{5}{1,2,2}$

(c) $\binom{7}{2}$ (g) $\binom{4}{2,0,2}$ [Lös.: 6.]

(d) $\binom{250}{249}$ [Lös.: 250.] (h) $\binom{2}{1,1,1}$

2. Interpretieren Sie $\binom{n}{o}$ und $\binom{n}{n}$. Können Sie Gründe für die Definition $O! = 1$ angeben?

3. Auf wievielerlei Arten können neun Konten drei verschiedenen Vertretern so zugeordnet werden, daß jeder drei erhält? Auf wie viele Weisen kann dies geschehen, wenn ein bestimmtes Kontenpaar nicht dem gleichen Vertreter zugeordnet werden kann? {Lös.: 1680; 1260.]

4. Eine Gruppe von sieben Arbeitern sei sieben von zehn zur Verfügung stehenden Arbeiten zuzuordnen. Auf wie viele Weisen kann jedem Arbeiter eine Arbeit zugeordnet werden? Wie viele Möglichkeiten bestehen für die nicht zugeordneten Arbeiten, wenn drei der Arbeiten sicherlich zugeordnet werden?

5. Die Kunden der Gesellschaft ABC erhalten ihre Lieferungen von einem der drei vorhandenen Lager. Es liegen 15 Kundenaufträge vor.
   a) Wie viele Möglichkeiten bestehen dann für die Zuordnung der Lagerhäuser zu den Aufträgen? [Lös.: 3^{15}.]
   b) Wie viele Möglichkeiten bestünden dann für die Zuordnung, wenn von jedem der Lagerhäuser die gleiche Anzahl von Aufträgen ausgeliefert werden soll? [Lös.: 756756.]

6. Eine Brauerei schließt mit einer Fernsehgesellschaft einen Vertrag ab, 35 Wochen lang drei Werbesendungen pro Woche zu senden. Die Werbesendungen bestehen aus einer Reihe von Trickfilmen. Man sei sich darüber im klaren, daß innerhalb von zwei Wochen niemals die gleichen drei Trickfilme gezeigt werden sollen. Wie viele Trickfilme müßten mindestens vorliegen, um dies durchzuführen? Wie viele müßten mindestens vorliegen, um keine der Werbesendungen zweimal innerhalb der 35 Wochen senden zu müssen?

7. Auf wie viele Weisen kann eine Maschine zehn Werkstücke herstellen, von denen die Hälfte gut und die andere Hälfte fehlerhaft ist? Auf wie viele Arten kann dies geschehen, wenn nie zwei aufeinanderfolgende Teile entweder gut oder fehlerhaft sind?

8. Aus einem aus drei guten und drei fehlerhaften Teilen bestehenden Los werden nacheinander drei Stücke als Stichprobe entnommen. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Reihenfolgen, wenn alle Teile voneinander zu unterscheiden sind und
   a) keine weiteren Beschränkungen bestehen. [Lös.: 20.]
   b) drei gute und keine fehlerhaften entnommen werden. [Lös.: 1.]
   c) zwei gute und ein fehlerhaftes entnommen werden. [Lös.: 9.]
   d) ein gutes und zwei fehlerhafte entnommen werden. [Lös.: 9.]
   e) kein gutes und drei fehlerhafte entnommen werden. [Lös.: 1.]

Welche Beziehungen bestehen zwischen Ihrer Antwort auf Teil a) und den Antworten auf die anderen Teilfragen?

9. Nach Übung 8 sollten die folgenden Zusammenhänge gelten:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$
$$= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Zeigen Sie, daß dies wahr ist.

10. Zeigen Sie, daß

$$\binom{a}{b} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot (a-b+2) \cdot (a-b+1)}{b \cdot (b-1) \cdot (b-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

wobei sowohl der Zähler als auch der Nenner aus genau b Faktoren besteht.

6. Zweizellige Aufspaltungen zweiwertiger Klassen

In diesem Abschnitt wollen wir ein spezielles Aufspaltungsproblem besprechen, das besonders relevant für die stichprobenmäßige Untersuchung endlicher zweiwertiger Bevölkerungsteile ist, die wir in Kapitel IV behandeln werden. Wir werden uns darauf beschränken, die Anzahl von Aufspaltungen einer bestimmten Art zu bestimmen.

Wir wollen zweiwertige Klassen, d. h. Klassen, die in genau zwei Zellen $[A, \tilde{A}]$ aufgespalten werden können, betrachten. So kann z. B. U ein aus 1000 Stücken bestehendes Los, das in G, F aufgespalten wird, sein, wobei G die Unterklasse der guten Stücke und F die Unterklasse der fehlerhaften Stücke ist. Desgleichen kann U die Klasse der Einwohner einer Stadt sein, die in $[F, \tilde{F}]$ aufgespalten wird, wobei F die Unterklasse der Einwohner ist, die einen Fernsehapparat besitzen. U kann auch die Klasse der Beschäftigten einer bestimmten Gesellschaft sein, die in $[G, \tilde{G}]$ aufgeteilt wird, wobei G die Klasse all derer sein mag, die der Gewerkschaft abgehören.

Nehmen Sie nun an, wir bildeten eine neue zweizeilige Aufspaltung $[S, \tilde{S}]$ der Klasse U. U sei z. B. ein aus 1000 Stücken bestehendes Los, das in eine bereits geprüfte Unterklasse und eine Unterklasse, die noch nicht geprüft worden ist, aufgeteilt wird. Die bereits geprüfte Unterklasse wird dabei gewöhnlich „Stichprobe" genannt. Ist U die Klasse der Einwohner einer Stadt, so können wir eine Aufspaltung danach durchführen, ob einem bestimmten Einwohner ein Fragebogen zugesandt wurde oder nicht; die Unterklasse derer, die einen Fragebogen erhielt, wird dann wiederum gewöhnlich als „Stichprobe" bezeichnet.

Wir wollen nun das folgende Problem betrachten: Gegeben sei die Klasse U mit N Elementen, die in $[A, \tilde{A}]$ aufgespalten wird. Dabei enthalte A R Elemente. Auf wie viele Weisen können wir die Aufspaltung $[S, \tilde{S}]$ von U bilden, bei der S n Elemente und $A \cap S$ r Elemente enthält? Mit einem Blick auf Abb. 7 können wir die bestehenden Abhängigkeiten leicht überblicken. Die Buchstaben in der Mitte der Tabelle geben dabei die Anzahl der Elemente jeder der Zellen der Queraufspaltung an, während die Buchstaben am Rande die Anzahl der Elemente der Zellen der entsprechenden Aufspaltungen darstellen. Da

$$n(A \cap S) + n(A \cap \tilde{S}) = n(A), n(A \cap S) + n(\tilde{A} \cap S) = n(S) \text{ usw.},$$

muß die Summe der Zahlen einer Zeile gleich der am Rande gezeigten Zahl und entsprechend die Summe der Zahlen einer Spalte gleich der am Ende dieser Spalte gezeigten Zahl sein.

	S	$\tilde{S}$	
A	r	$R - r$	R
$\tilde{A}$	$n - r$	$N - R - n + r$	$N - R$
	n	$N - n$	N

Abb. 7

Wir können daher leicht die Anzahl der Elemente einer Zelle der Queraufspaltung ermitteln, wenn die Spaltensummen, Zeilensummen und die Tatsache gegeben ist, daß $n(A \cap S) = r$. Aus der Tatsache, daß alle Werte der Tabelle ganze positive Zahlen oder 0 sein müssen, können wir die folgenden Einschränkungen ableiten:

1) $0 \leqq r \leqq n \leqq N,\ 0 \leqq r \leqq R \leqq N,\ 0 \leqq R - r \leqq N - n \leqq N.$

Beispiel. Die Klasse U stelle ein aus drei guten und drei fehlerhaften Stücken bestehendes Los dar (siehe Übung 8, Abschnitt 5). Wir möchten wissen, auf wie viele Arten wir eine aus drei Stücken bestehende Stichprobe entnehmen können, die zwei fehlerhafte Teile enthält. Die Klasse U wird also in $[F, G]$ und $[S, \tilde{S}]$ aufgespalten, wobei $N = n(U)$, $R = n(D) = 3$, $N - R = n(G) = 3$, $n = n(S) = 3$ und $N - n = n(\tilde{S}) = 3$ ist. Wir möchten wissen, auf wie viele Weisen wir die Aufspaltung $[S, \tilde{S}]$ so bilden können, daß $r = n(F \cap S) = 2$ ist. Das Problem wird in Abb. 8 in zusammengefaßter Form dargestellt. Sie sollten sich über die Bedeutung jedes Wertes dieser Tabelle klar sein.

	S	$\tilde{S}$	
F	2	1	3
G	1	2	3
	3	3	6

Abb. 8

Das Problem des Zählens ist nun sehr einfach. Uns interessiert die Anzahl der Arten auf die die Aufspaltung $[S, \tilde{S}]$ so gebildet werden kann, daß $n(S) = n$ und $(A \cap S) = r$ ist. Beachten Sie, daß diese Bedingungen

$$n(\tilde{S}) = N - n,\ n(\tilde{A} \cap S) = n - r, \text{ usw. implizieren.}$$

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß es $\binom{R}{r}$ Unterklassen mit r Elementen gibt, die aus R ausgewählt werden können. Entsprechend gibt es $\binom{N-R}{n-r}$ Unterklassen mit $n - r$ Elementen, die aus $N - R$ Elementen gebildet werden können. Für jede dieser $\binom{R}{r}$ Unterklassen, bei denen die Zelle $A \cap S$ r Elemente enthält, gibt es $\binom{N-R}{n-r}$ Unterklassen, mit $n - r$ Elementen in der Zelle $\tilde{A} \cap S$. Demnach gibt es gemäß dem in Abschnitt 4 erwähnten Prinzip $\binom{R}{r} \cdot \binom{N-R}{n-r}$ Wege, U so in $[S, \tilde{S}]$ aufzuspalten, daß

$$n(S) = n \text{ und } n(A \cap S) = r.$$

Bei dem in Abb. 8 dargestellten Problem sei $N = 6$ und $R = 3$, $n = 3$ und $r = 2$, so daß es $\binom{3}{2} \cdot \binom{6-3}{3-2} = 9$ Wege gibt, auf denen die Aufspaltung gebildet werden kann. Es sei

$$U = \{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\},$$

wobei f_i ein Element von F für $i = 1, 2, 3$ ist und g_j ein Element von G für $j = 1, 2, 3$. Wir können dann auf den in Abb. 9 gezeigten Wegen U so in $[S, \tilde{S}]$ aufspalten, daß $n(S) = 3$ und $n(S) = 3$ ist und daß die erste Zelle zwei Elemente von F enthält.

$\{f_1, f_2, g_1 \mid f_3, g_2, g_3\}$ $\{f_1, f_2, g_2 \mid f_3, g_1, g_3\}$ $\{f_1, f_2, g_3 \mid f_3, g_1, g_2\}$
$\{f_1, f_3, g_1 \mid f_2, g_2, g_3\}$ $\{f_1, f_3, g_2 \mid f_2, g_1, g_3\}$ $\{f_1, f_3, g_3 \mid f_2, g_1, g_2\}$
$\{f_2, f_3, g_1 \mid f_1, g_2, g_3\}$ $\{f_2, f_3, g_2 \mid f_1, g_1, g_3\}$ $\{f_2, f_3, g_3 \mid f_1, g_1, g_2\}$

Abb. 9

ÜBUNGEN

1. Ein aus N Teilen bestehendes Los enthalte R fehlerhafte Stücke. Es werde eine Stichprobe von n Stücken entnommen und die darin enthaltene Anzahl r der fehlerhaften Teile festgestellt. Welche möglichen Werte für r gibt es, wenn

   (a) $n = 10,\ R = 5,\ N = 100$?
   (b) $n = 10,\ R = 5,\ N = 12$?
   (c) $n = 5,\ R = 10,\ N = 100$?
   (d) $n = 5,\ R = 10,\ N = 12$?

2. Interpretieren Sie im Zusammenhang mit Übung 1 die durch die Ungleichung (1) gegebenen Einschränkungen. [Z. B. bedeutet $r \leqq R$, daß in der Stichprobe nicht mehr fehlerhafte Teile enthalten sein können als in dem Los.]

3. Ein Ausschuß bestehe aus fünf Gewerkschaftsmitgliedern und vier gewerkschaftlich nicht organisierten Personen. Auf wie viele Weisen könnte ein aus drei Gewerkschaftsmitgliedern und zwei nicht organisierten Mitgliedern bestehender Unterausschuß gebildet werden? [Lös.: 60.]

4. Beantworten Sie die Übung 3 für Unterausschüsse, bestehend aus
   a) fünf Gewerkschaftsmitgliedern.
   b) vier Gewerkschaftsmitgliedern und einem anderen.
   c) zwei Gewerkschaftsmitgliedern und drei anderen.
   d) einem Gewerkschaftsmitglied und vier anderen.
   e) einem Gewerkschaftsmitglied und fünf anderen.

   Warum können Sie die Formel nicht zur Beantwortung des Teiles e) benutzen?

5. Auf wie viele Weisen kann aus einem aus neun Mitgliedern bestehenden Ausschuß ein Unterausschuß gebildet werden, der über fünf Mitglieder verfügt? In welcher Beziehung steht diese Antwort zu den Antworten in Übung 3 und 4?

6. Es sei
$$f(r; n, R, N) = \binom{R}{r} \cdot \binom{N-R}{n-r}.$$
   Zeigen Sie, daß
$$f(r+1; n, R, N) = \frac{(n-r)(R-r)}{(r+1)[(N-R)-(n-r-1)]} f(r; n, R, N).$$
   Zeigen Sie, daß
$$f(O; n, R, N) = \binom{N-R}{n},$$
   wenn $n \leqq N - R$ und
$$f(n; n, R, N) = \binom{R}{n},$$
   wenn $n \leqq R$ ist.

   Benutzen Sie diese Zusammenhänge, um die Übungen 3 und 4 zu beantworten.

7. Ein aus sechs Stücken bestehendes Los enthalte drei gute und drei fehlerhafte Teile. Auf wie viele Arten kann dem Los eine Stichprobe entnommen werden, die aus einem guten und einem fehlerhaften Stück besteht? Geben Sie die Aufspaltungen an, die diese Kriterien erfüllen. [Teillös.: 9.]

8. Wir können in Übung 7 jedes Stück danach bezeichnen, ob es ein Element der Stichprobe S oder $\tilde{S}$ ist. Ist also s_i bei $i = 1, 2$ ein Element von S und s'_j für $j = 1, 2, 3, 4$ ein Element von $\tilde{S}$, so ist
$$U = \{s_1, s_2, s'_1, s'_2, s'_3, s'_4\}.$$
   Wir können nun die Elemente von U danach aufspalten, ob sie gut oder fehlerhaft sind. Es ist also
$$[F, G] = \{s_1, s'_1, s'_2 \mid s_2, s'_3, s'_4\}$$
   eine geordnete Aufspaltung, die die Kriterien der Übung 7 erfüllt. (Eins der fehlerhaften Teile ist ein Element von S, zwei der fehlerhaften Teile sind Elemente von $\tilde{S}$, während ein gutes Teil ein Element von S und zwei gute Teile Elemente von $\tilde{S}$ sind.) Wie viele solcher Aufpaltungen gibt es? Nennen Sie sie.

9. In Übung 7 haben wir die Aufspaltung nicht nach den Reihenfolgen ihrer Elemente unterschieden. Wir betrachten z. B.
$$\{f_1, g_1 \mid f_2, f_3, g_2, g_3\} \text{ und } \{g_1, f_1 \mid g_2, g_3, f_2, f_3\}$$
   als gleiche Aufspaltungen. Es soll nun die Anzahl der Wege errechnet werden, auf denen eine Stichprobe, bestehend aus einem guten und einem fehlerhaften Stück, entnommen werden kann, wobei man zwischen verschiedenen Reihenfolgen innerhalb der Zellen der Aufspaltung unterteilt. Zeigen Sie

a) daß die Anzahl der Wege, auf denen man eine festgelegte Reihenfolge innerhalb der Zellen erhalten kann — z. B. $\{gf \mid ggff\}$ — $3.3.2.1.2.1 = 3! \cdot 3! = 36$ ist.
b) daß die Anzahl der Wege, auf denen man irgendeine andere festgelegte Reihenfolge erreichen kann, auch $3!\,3! = 36$ ist.
c) daß die Anzahl der Reihenfolgen, in denen ein g und ein f in der ersten Zelle und zwei gs und zwei fs in der zweiten Zelle auftauchen, $\binom{2}{1}\binom{4}{2} = 12$ ist.
d) daß die Gesamtzahl der Wege, auf denen man ein f und g in der ersten Zelle und zwei fs und zwei gs in der zweiten Zelle erhalten kann, $36 \cdot 12 = 432$ ist.

10. Auf wie viele Weisen kann man aus einem Los von sechs Stück eine aus zwei Stück bestehende Stichprobe ziehen? [Lös.: 15.]

11. Bestimmen Sie das Verhältnis der Zahl der Wege, auf denen die Stichprobe der Übung 7 entnommen werden kann, zu der Zahl der Wege, auf denen eine Stichprobe aus einem aus sieben Stück bestehenden Los gezogen werden kann. Bestimmen Sie ferner das Verhältnis der Zahl der Wege, auf denen man ein f und ein g in der ersten Zelle und zwei fs und zwei gs in der zweiten Zelle erhält, zu der Zahl der Wege, auf denen man sechs sich voneinander unterscheidende Dinge anordnen kann. Zeigen Sie, daß diese beiden Verhältnisse gleich sind.

12. Es sei $n = 5$ und $R/N = 0{,}8$. Errechnen Sie das Verhältnis der Anzahl möglicher Stichproben mit $r = 3$ zur Gesamtzahl der möglichen Stichproben mit $n = 5$, wenn
a) $N = 5$. [Lös.: 0.]
b) $N = 10$. [Lös.: $\frac{2}{9} = 0{,}2222$.]
c) $N = 50$. [Lös.: $\frac{1{,}067{,}040}{5{,}085{,}024} = 0{,}20984$.]
d) $N = 1000$. [Lös.: 0,205056.]
e) Welchem Wert nähert sich das Verhältnis, wenn N sehr groß wird? [Lös.: 0,2048.]

7. Einige Eigenschaften binomialer Koeffizienten

Da die in Abschnitt 5 eingeführten binomialen Koeffizienten $\binom{n}{j}$ in späteren Teilen des Buches eine wichtige Rolle spielen werden, wollen wir an dieser Stelle auf einige der wichtigeren Eigenschaften dieser Zahlen eingehen. Ein Hilfsmittel, mit dem diese Zahlen bequem zu ermitteln sind, ist das berühmte, in Abb. 10 gezeigte, Pascalsche Dreieck. Zur Aufstellung dieses Dreiecks schreiben wir zunächst die dieses Dreieck auf beiden Seiten begrenzenden Einsen. Jede der anderen Zahlen erhalten wir, wenn wir die beiden schräg über ihr stehenden Zahlen zusammenzählen. Die nächste Zeile in Abb. 10 hieße also 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Um den binomialen Koeffizienten $\binom{n}{j}$ zu ermitteln, suchen wir lediglich die n entsprechende Zeile und ermitteln ihren Schnittpunkt mit der j entsprechenden Diagonale. So finden wir z. B. für $\binom{4}{2} = 6$. Dieser Wert ist der Schnittpunkt der Zeile $n = 4$ mit der Diagonale $j = 2$.

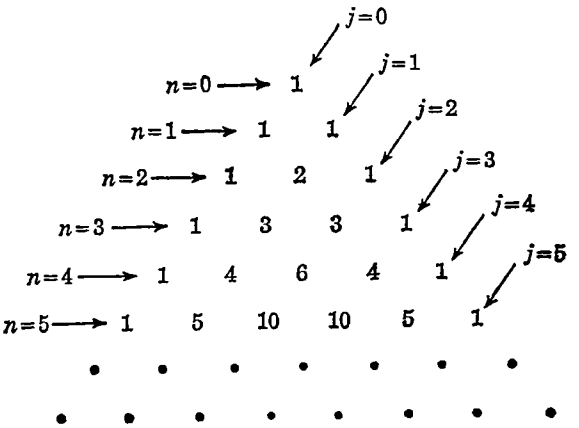


Abb. 10

Das Dreieck wurde auf der Eigenschaft der binomialen Koeffizienten aufgebaut, die durch

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}.$$

ausgedrückt werden kann.

Obwohl wir diesen Zusammenhang direkt ableiten können (siehe Übung 6), ist die folgende Beweisführung so interessant, daß wir sie uns trotzdem ansehen wollen: Die Zahl $\binom{n+1}{j}$ ist die Anzahl der Unterklassen mit j Elementen, die aus einer Klasse von $(n+1)$ Elementen gebildet werden können. Wir wollen aus der $n+1$ Elemente, nämlich x, auswählen. Die $\binom{n+1}{j}$ Unterklassen können in solche aufgespalten werden, die x enthalten und solche, die es nicht enthalten. Die letztere Gruppe besteht also aus Unterklassen von je j Elementen, die aus insgesamt n Elementen gebildet wurden, d. h. es sind $\binom{n}{j}$ solcher Unterklassen vorhanden. Die erste Gruppe besteht aus Unterklassen von jeweils $j-1$ Elementen, denen x hinzugefügt wurde und die ebenfalls aus insgesamt n Elementen gebildet wurden. Davon gibt es also $\binom{n}{j-1}$ Unterklassen. Es ist also

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}.$$

Betrachten wir nun eine Zeile des Pascalschen Dreiecks, so stellen wir fest, daß die Zahlen zunächst ansteigen und dann wieder abfallen. Wir können diese Tatsache durch die Betrachtung des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Zahlen beweisen:

$$\frac{\binom{n}{j+1}}{\binom{n}{j}} = \frac{n!}{(j+1)!\,(n-j-1)!} \cdot \frac{j!\,(n-j)!}{n!} = \frac{n-j}{j+1}.$$

Die Zahlen steigen so lange an, wie das Verhältnis größer als 1 ist, d. h. $n - j > j + 1$. Das bedeutet $j < 1/2(n-1)$. Hierbei müssen wir zwischen geraden und ungeraden n unterscheiden. Ist z. B. n ungleich 10, so muß j kleiner als $1/2(10-1) = 4{,}5$ sein. Der letzte Anstieg besteht also aus dem Schritt von $j = 4$ zu $j = 5$. $\binom{10}{5}$ ist damit der größte zu erreichende Wert, und von $j = 5$ an fallen die Werte wiederum. Für $n = 11$ muß j kleiner sein als $1/2(11-1) = 5$. Für $j = 5$ ist $(n-j)/(j+1) = 1$. Die Werte steigen also bis $j = 5$ an, dann ist $\binom{11}{5} = \binom{11}{6}$, und fallen dann wieder ab.

ÜBUNGEN

1. Führen Sie das Pascalsche Dreieck bis $n = 16$ fort. Heben Sie sich das Ergebnis für spätere Fälle auf.
2. Beweisen Sie unter Benutzung der Tatsache, daß eine Klasse mit n Elementen 2^n Unterklassen hat,
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$
3. Beweisen Sie für eine aus zehn Elementen bestehende Klasse, daß es für sie mehr Unterklassen mit fünf Elementen gibt als mit irgendeiner anderen festgelegten Anzahl von Elementen.
4. Errechnen Sie $\binom{30}{s}$ für $s = 1, 2, 3, 4$ unter Benutzung der Tatsache, daß $\binom{30}{0} = 1$ und daß
$$\binom{n}{j+1} = \frac{n-j}{j+1} \cdot \binom{n}{j}.$$
[Lös.: 30; 435; 4060; 27405.]
5. Es gibt $\binom{52}{13}$ verschiedene Bridgekartenkombinationen. Nehmen Sie an, es werde eine Aufstellung aller dieser Kombinationen gemacht und die erste Karte jeder dieser Kombinationen werde gestrichen. Wir erhalten also eine Zusammenstellung mit jeweils aus 12 Karten bestehenden Kombinationen. Beweisen Sie, daß wenigstens zwei Kombinationen der letzteren Aufstellung genau die gleichen Karten enthalten.
6. Beweisen Sie, lediglich unter Benutzung der Tatsache, daß
$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!},$$
daß
$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}.$$
7. Stellen Sie auf die gleiche Weise wie das Pascalsche Dreieck ein Dreieck auf, das anstatt der Zahlen des Pascalschen Dreiecks lediglich die Begriffe gerade und un-

gerade enthält. Führen Sie dieses Dreieck bis zur sechzehnten Zeile aus. Was sagt dieses Dreieck über die Zahlen des Bascalschen Dreiecks aus? Prüfen Sie unter Benutzung dieses Ergebnisses Ihr in Übung 1 konstruiertes Dreieck.

8. Welche gemeinsamen Eigenschaften haben die Zeilen 1, 2, 4, 8 und 16 in dem in Übung 7 aufgestellten Dreieck? Was sagt dies über die entsprechenden Zahlen der Zeilen des Pascalschen Dreiecks aus? Was würden Sie für die Zahlen der 32. Zeile des Pascalschen Dreiecks daraufhin voraussagen?

9. Bestimmen Sie, auf welche Weise in der folgenden Tabelle eine Zeile aus der vorhergehenden entwickelt wurde, und geben Sie dann an, welche Beziehungen zwischen dieser Tabelle und dem Pascalschen Dreieck bestehen.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

10. Numerieren Sie die Spalten der in Übung 9 gezeigten Tabelle mit den Zahlen 0, 1, 2, ... und die Zeilen mit den Zahlen 1, 2, 3, ... Es sei $f(n, r)$ das Element der n-ten Spalte und r-ten Zeile. Die Tabelle wurde unter Zugrundelegung der Funktion

$$f(n, r) = f(n - 1, r) + f(n, r - 1)$$

für $n > 0$ und $r > 1$ und $f(n, 1) = f(0, r) = 1$ für alle n und r aufgestellt. Zeigen Sie, daß

$$f(n, r) = \binom{n + r - 1}{n}$$

diese Bedingungen erfüllt und daß dieser Ausdruck für $f(n, r)$ der einzige Wert ist, der alle Bedingungen erfüllt.

11. Unter einer geordneten Aufspaltung von r aus n Elementen verstehen wir eine Folge von r positiven, ganzen Zahlen, von denen möglicherweise einige 0 sind, die in einer bestimmten Reihenfolge geschrieben wurden und deren Summe n ist. So sind z. B. $\{1, 0, 3\}$ und $\{3, 0, 1\}$ zwei verschiedene, geordnete Aufspaltungen mit drei von vier Elementen. Zeigen Sie, daß die Anzahl der geordneten Aufspaltungen mit r von n Elementen

$$\binom{n + r - 1}{n}$$

ist.

8. Binomialer und polynomischer Lehrsatz

Manchmal ergibt sich die Notwendigkeit, Produkte der Form $(x + Y)^3$, $(x + 2y + 11z)^5$ usw. auszurechnen. Wir wollen in diesem Abschnitt systematische Wege für die Ausführung solcher Ausrechnungen betrachten.

Wir wollen dabei von dem speziellen Fall $(x + y)^3$ ausgehen. Wir schreiben ihn in der Form

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)\,(x + y).$$

Um die Multiplikation auszuführen, wählen wir entweder je ein x oder ein y aus jedem der drei Faktoren und multiplizieren sie miteinander. Dies führen wir für alle möglichen Kombinationen aus und addieren dann die Resultate. Eine besondere Klasse dieser Kombinationen stellen wir durch eine zweizellige Aufspaltung der Zahlen 1, 2 und 3 dar. In der ersten Zelle fassen wir die Zahlen zusammen, die den Faktoren entsprechen, aus denen wir ein x ausgewählt haben. In die zweite Zelle gehören all die Zahlen, die den Faktoren entsprechen, aus denen wir ein y gewählt haben. So entspricht die Aufspaltung $[\{1, 3\}, \{2\}]$ z. B. der Kombination, bei der wir ein x aus dem ersten und dritten Faktor und ein y aus dem zweiten Faktor ausgewählt haben. Das so erhaltene Produkt ist $xyz = x^2y$. Der Koeffizient von x^2y bei der Ausrechnung von $(x + y)^3$ wird die Zahl der Aufspaltungen sein, die zu einer Kombination von zwei x und einem y führen. Das ist jedoch die Anzahl der zweizelligen Aufspaltungen dreier Elemente, von denen zwei Elemente in der ersten Zelle und ein Element in der zweiten Zelle ist. In diesem Fall ist das $\binom{3}{2} = 3$. Allgemein ist der Koeffizient eines Ausdrucks der Form x^jy^{3-j} für $j = 0, 1, 2, 3$ $\binom{3}{j}$. Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= \binom{3}{3}x^3 + \binom{3}{2}x^2y + \binom{3}{1}xy^2 + \binom{3}{0}y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Führen wir dasselbe für den Ausdruck $(x + y)^n$ durch, so erhalten wir den in der Algebra benutzten binomischen Lehrsatz. Davon ist auch der Begriff *Binomialkoeffizient* abgeleitet.

Binomischer Lehrsatz. Es ist

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{1}xy^{n-1} + y^n.$$

Beispiel 1. Wir wollen den Begriff $(a - 2b)^3$ ausrechnen. Um dies unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes tun zu können, setzen wir a für x und $-2b$ für y. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}(a - 2b)^3 &= a^3 + 3a^2(-2b) + 3a(-2b)^2 + (-2b)^3\\ &= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3.\end{aligned}$$

Wir wollen uns nun dem Ausdruck $(x + y + z)^3$ zuwenden. Wir schreiben ihn wieder in der Form

$$(x + y + z)^3 = (x + y + z)\,(x + y \times x)\,(x + y \times z).$$

Dieses Mal wählen wir aus jedem der drei Faktoren ein x, ein y oder ein z aus. Unsere Wahl wird nun durch eine dreizellige Aufspaltung der Klasse

der Zahlen $\{1, 2, 3\}$ dargestellt. Die Zahlen der ersten Zelle entsprechen den Faktoren, aus denen wir x auswählten, die Zahlen der zweiten Zelle den Faktoren, aus denen wir y auswählten und die Zahlen der dritten Zelle denen, aus denen wir z auswählten. So entspricht z. B. die Aufspaltung $[\{1, 3\}, \mathscr{E}, \{2\}]$ einer Wahl von x aus dem ersten und dritten Faktor und keinem y und einem z aus dem zweiten Faktor. Wir erhalten in diesem Fall $xzx = x^2z$. Der Koeffizient von x^2z ist also gleich der Anzahl der dreizelligen Aufspaltungen mit zwei Elementen in der ersten Zelle, keinem in der zweiten und einem Element in der dritten. Es gibt $\binom{3}{2, 0, 1} = 3$ solcher Aufspaltungen. Ganz allgemein ist der Koeffizient eines Ausdruckes der Form $x^a y^b z^c$ bei der Ausrechnung des Ausdruckes $(x + y + z)^3$

$$\binom{3}{a, b, c} = \frac{3!}{a!\, b!\, c!}.$$

Ermitteln wir auf diese Weise die Koeffizienten für jedes mögliche a, b und c, so erhalten wir

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3yz^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3x^2z + 6xyz.$$

Auf dieselbe Methode können wir die Ausrechnungen aller Ausdrücke der Form $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ durchführen. Aus jedem Faktor wählen wir entweder ein x_1, ein x_2, ein x_3 ... oder ein x_r aus, bilden das Produkt und addieren diese Produkte aller möglichen n Kombinationen. Wir werden dann r^n Produkte vorliegen haben, von denen allerdings viele gleich sein werden. Die Auswahl einer bestimmten Größe aus jedem Faktor ergibt eine r-zellige Aufspaltung der Zahlen von 1 bis n. Davon enthält die erste Zelle die Zahlen der Faktoren, aus denen wir x_1 auswählen, die zweie Zelle jene, aus denen wir x_2 auswählen usw. Eine bestimmte Wahl gibt uns also einen Ausdruck der Form $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \ldots, x_r^{n_r}$ mit $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Die ihm entsprechende Aufspaltung enthält n_1 Elemente in der ersten Zelle, n_2 in der zweiten usw. Wir erhalten einen solchen Ausdruck für jede der Aufspaltungen. Die Anzahl dieser Ausdrücke ist daher gleich der Anzahl solcher Aufspaltungen und damit

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}.$$

Damit kommen wir zum polynomischen Lehrsatz:

Polynomischer Lehrsatz. Wir erhalten den Wert von $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$, indem wir alle Ausdrücke der Form

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$$

für $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ addieren.

ÜBUNGEN

1. Errechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die folgenden Ausdrücke:
   a) $(x + y)^4$.
   b) $(1 + x)^5$.
   c) $(x - y)^3$.
   d) $(2x + a)^4$.
   e) $(2x - 3y)^3$.
   f) $(100 - 1)^5$.

2. Errechnen Sie:
   a) $(x + y + z)^4$.
   b) $(2x + y - z)^3$.
   c) $(2 + 2 + 1)^1$. (auszuwerten auf zwei Wegen).

3. a) Bestimmen Sie den bei der Auflösung des Ausdruckes $(x + y + z)^7$ auftretenden Koeffizienten des Ausdruckes $x^2y^3z^3$. [Lös.: 210.]
   b) Bestimmen Sie den Koeffizienten für den bei der Auflösung des Ausdruckes $(x - 2y - 5z)^{11}$ entstehenden Ausdruck $x^6y^3z^2$. [Lös.: −924000.]

4. Beweisen Sie unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes, daß
   a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.
   b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0$.

5. Beweisen Sie, ähnlich wie in Abschnitt 7, daß
$$\binom{n+1}{i,j,k} = \binom{n}{i-1,j,k} + \binom{n}{i,j-1,k} + \binom{n}{i,j,k-1}.$$

6. $f(n, r)$ sei die Anzahl der Summanden des bei der Auflösung des Ausdruckes $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ auftretenden Polynoms. Zeigen Sie, daß
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$$
und
$$f(n, r) = \binom{n + r - 1}{n}.$$
[Hinweis. Beweisen Sie, daß die Bedingungen des Abschnittes 7, Übung 10 erfüllt werden, indem Sie beweisen, daß $f(n, r - 1)$ die Anzahl der Ausdrücke ist, die kein x_r haben, und $f(n - 1, r)$ die Anzahl derer ist, die x_r enthalten. Benutzen Sie alternativ Übung 15 des Abschnittes 7 und zeigen Sie, daß jeder Ausdruck der Auflösung eine geordnete Reihenfolge von r ganzen Zahlen bestimmt, deren Summe n ist.]

7. Wie viele Summanden enthalten die Auflösungspolynome der folgenden Ausdrücke?
   a) $(x + y + z)^6$? [Lös.: 28.]
   b) $(a + 2b + 5c + d)^4$? [Lös.: 35.]
   c) $(r + s + t + u + v)^6$? [Lös.: 210.]

8. Beweisen Sie, daß k^n die Summe aller Zahlen $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ für alle möglichen $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ist, für die $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$ gilt.

9*. Wahlvorgänge

Wir wollen nun zu dem in Kapitel 2, Abschnitt 5 behandelten Problem zurückkehren. Uns interessieren nun aber nicht nur Koalitionen, sondern auch die Gewichtungen individueller Wähler. Wir werden einen numerischen Maßstab für die Stimmkraft, wie er zuerst von L. S. Shapley und M. Shubik vorgeschlagen wurde, entwickeln. Während wir den Maßstab selbst an dieser Stelle im einzelnen erklären werden, sei der Leser bezüglich der Begründung für die Wahl dieses speziellen Maßstabes auf die Originallektüre verwiesen.

Wir müssen uns zunächst klarmachen, daß die Anzahl der Stimmen einer Person allein kein guter Maßstab für deren Stimmkraft ist. Wenn x über drei Stimmen und y über eine Stimme verfügt, so bedeutet das nicht unbedingt, daß x die dreifache Stimmkraft von y hat. Besteht der Ausschuß z. B. nur aus den drei Mitgliedern x, y und z und verfügt z ebenfalls über eine Stimme, dann ist x ein Diktator, und y ist vollkommen machtlos.

Die grundlegende Idee des Stimmkraftindexes liegt in der Betrachtung verschiedener Wahlkonstellationen bei einer Anzahl von Abstimmungen. Die n Mitglieder werden je nach der Wahrscheinlichkeit, mit der sie für eine Maßnahme stimmen, in der Reihenfolge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ geordnet. Soll die Wahl gewonnen werden, so müssen wir x_1, x_2 usw. bis x_i, d. h. so viele Stimmberechtigte wie für eine gewinnende Koalition benötigt werden, dazu überreden, für eine bestimmte Maßnahme zu stimmen. Ist $x_1, x_2, \ldots, x_i$ eine gewinnende Koalition $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$ jedoch noch nicht, so ist x_i das ausschlaggebende Mitglied der Koalition. Dieses Mitglied, das auf jeden Fall überredet werden muß, um die Wahl zu gewinnen, ist am schwierigsten von den i notwendigen Mitgliedern zu überzeugen. Wir wollen x_i den *Pivot* nennen.

Die Ansichten der einzelnen Mitglieder werden bei einer rein mathematischen Messung der Stimmkraft eines Mitgliedes nicht berücksichtigt. Wir betrachten jedoch alle bei einer Wahl möglichen Stimmverteilungen, und wir untersuchen, wie oft ein gegebenes Mitglied Pivot sein kann. Das bedeutet, daß wir alle Permutationen, und zwar bei n Mitgliedern $n!$ Permutationen, zu untersuchen haben. Bei jeder Permutation wird ein Mitglied Pivot sein. Die Häufigkeit, mit der eine Person der Pivot einer Stimmkombination ist, wird dann als ein guter Maßstab für ihre Stimmkraft angesehen.

Definition. Die Stimmkraft eines Ausschußmitgliedes ist die Anzahl der Stimmverteilungen, bei denen er den Pivot darstellt, geteilt durch die Gesamtzahl der möglichen Stimmkombinationen. (Die Gesamtzahl der Stimmkombinationen ist bei einem aus n Mitgliedern bestehenden Ausschuß natürlich $n!$.)

Beispiel 1. Wenn jeder der n Wahlberechtigten über eine Stimme verfügt und eine einfache Mehrheit genügt, um eine Maßnahme durchzuführen, so ist aus Symmetriegründen leicht zu ersehen, daß jeder Wahlberechtigte in n/n der Stimmverteilungen Pivot ist. Jeder Wähler hat also die Stimmkraft von $1/n$. Wir wollen dies für $n = 3$ Personen illustrieren: Es gibt $3! = 6$ verschiedene Stimmkombinationen. Um eine Maßnahme durchführen zu können, müssen zwei Stimmen dafür abgegeben werden, d. h. das zweite Ausschuß-Mitglied ist jeweils der Pivot. Die möglichen Stimmkombinationen sind: **123**, 132, **213**, **231**, 312, **321**. Die Pivots sind jeweils fettgedruckt. Jedes Mitglied ist zweimal Pivot, d. h. seine Stimmkraft ist $2/6 = 1/3$.

Beispiel 2. Betrachten Sie von diesem Standpunkt aus noch einmal das Beispiel 3 in Kapitel 2, Abschnitt 5. Es gibt dort 24 Permutationen der vier Mitglieder. Wir wollen sie hier noch einmal aufführen und den Pivot jeweils fettdrucken:

wxyz	**w**xzy	**w**yxz	**w**yzx	**w**zxy	**w**zyx
x**w**yz	x**w**zy	x**w**yz	x**w**zy	x**w**zy	x**w**zy
yx**w**z	yx**w**z	yx**w**z	yx**w**z	yx**w**z	yx**w**z
zxy**w**	zxy**w**	zxy**w**	zxy**w**	zxy**w**	zxy**w**

Wir sehen, daß z die Stimmkraft 14/24, w 6/24 und x und y eine Stimmkraft von 2/24 haben. (Oder gekürzt: Sie haben eine Stimmkraft von 7/12, 3/12, 1/12 bzw. 1/12.) Wir sehen, daß diese Verhältnisse voneinander wesentlich mehr abweichen als das Verhältnis der Stimmen, das in diesem Fall 3 : 2 : 1 : 1 ist. Hier sind drei Stimmen siebenmal soviel wert wie eine einzelne Stimme und mehr als zweimal soviel wert als zwei Stimmen.

Beispiel 3. Betrachten Sie noch einmal Beispiel 4 des Kapitels 2, Abschnitt 5. Mit Hilfe der oben beschriebenen Analysemethode kann gezeigt werden (siehe Übung 12 und 13), daß im Sicherheitsrat der Vereinten Nationen jeder der großen Fünf eine Stimmkraft von 76/385 oder ungefähr 0,197 hat, während jede der kleinen Nationen über eine Stimmkraft von ungefähr 0,002 verfügt. Hierdurch wird unsere intuitiv begründete Ansicht bestätigt, daß zwar die kleinen Nationen im Sicherheitsrat nicht vollkommen machtlos sind, daß jedoch fast alle Macht in den Händen der großen Fünf liegt.

Beispiel 4. In einem aus fünf Personen bestehenden Ausschuß habe jede Person eine Stimme und der Vorsitzende verfüge über das Vetorecht. Die minimalgewinnenden Koalitionen bestünden also aus drei Mitgliedern einschließlich des Vorsitzenden. Es gäbe insgesamt $5! = 120$ Permutationen. Der Pivot könnte nicht vor dem Vorsitzenden kommen, da ohne den Vorsitzenden keine gewinnende Koalition zustande kommt. Befindet sich also der Vorsitzende auf Platz Nr. 3, 4 oder 5, so ist er der Pivot. Das träfe auf 3/5 aller Permutationen zu. Befindet er sich auf Platz Nr. 1 oder 2, dann wäre die Person auf Platz Nr. 3 Pivot. Die Anzahl der Permutationen, bei denen sich der Vorsitzende auf Platz Nr. 1 oder 2 und eine andere Person auf Platz Nr. 3 befindet, ist $2 \cdot 3! = 12$. Der Vorsitzende hätte also eine Stimmkraft von 3/5 und jedes der anderen Mitglieder eine Stimmkraft von 1/10.

ÜBUNGEN

1. Zur Durchführung einer bestimmten Maßnahme sei der Mehrheitsbeschluß eines aus drei Personen bestehenden Ausschusses notwendig. Bestimmen Sie alle möglichen Permutationen, und errechnen Sie die Stimmkraft jedes der drei Mitglieder, wenn

a) jedes der Mitglieder eine Stimme hat. [Lös.: 1/3, 1/3, 1/3.]
b) zwei der Mitglieder eine Stimme haben und das dritte zwei Stimmen hat. [Lös.: 1/6, 1/6, 2/3.]
c) zwei der Mitglieder eine Stimme haben und das dritte drei Stimmen hat. [Lös.: 0, 0, 1.]
d) die Mitglieder über eine, zwei bzw. drei Stimmen verfügen [Lös.: 1/6, 1/6, 2/3.]
e) zwei Mitglieder je zwei Stimmen haben und das dritte Mitglied drei Stimmen hat. [Lös.: 1/3, 1/3, 1/3.]

2. Beweisen Sie, daß in jeder beschlußfassenden Körperschaft die Summe der Stimmkräfte aller Mitglieder 1 ist.

3. Wir groß ist die Stimmkraft eines Diktators? Was versteht man unter der Stimmkraft eines „machtlosen" Mitgliedes? Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.

4. Eine große Gesellschaft gäbe 100000 Aktien aus. Diese verteilten sich auf drei Aktionäre, die 50000, 49999 bzw. 1 Aktie besäßen. Errechnen Sie die Stimmkraft jedes der drei Aktionäre. [Lös.: 2/3, 2/3, 1/6.]

5. Ein Ausschuß bestehe aus 100 Mitgliedern, von denen jedes über eine Stimme verfüge, und dem Vorsitzenden, dessen Stimme bei Stimmgleichheit den Ausschlag gäbe. Errechnen Sie die Stimmkraftverteilung. (Versuchen Sie *nicht*, alle Permutationen aufzustellen!)

6. In Übung 5 habe der Vorsitzende anstatt der Entscheidungsmacht bei Stimmgleichheit das Vetorecht. Wie ändert dies die Stimmkraftverteilung? [Lös.: Der Vorsitzende hat die Stimmkraft von 50/101.]

7. Wie ändern sich die Kräfteverhältnisse in Übung 1, wenn zur Durchführung einer Maßnahme eine Dreiviertelmehrheit notwendig wäre?

8. Wenn in einem aus fünf Personen bestehenden Ausschuß, der seine Beschlüsse mit einfacher Mehrheit faßt, jedes Mitglied eine Stimme hat, so verfügt jede Person über eine Stimmkraft von 1/5. Wir wollen nun annehmen, daß sich zwei Mitglieder zusammenschlössen und jeweils auf die gleiche Weise abstimmen. Vergrößern sie dadurch ihre Stimmkraft? (Der beste Weg, um dies darzustellen, ist, nur die Permutationen zuzulassen, bei denen diese zwei Mitglieder benachbart sind.) [Lös.: Ja, die Stimmkraft dieser zwei steigt von 0,4 auf 0,5.]

9. Zeigen Sie, daß man die minimalgewinnenden Koalitionen bestimmen kann, wenn der Stimmenanteil jedes Mitgliedes einer entschlußfassenden Körperschaft gegeben ist. Zeigen Sie ferner, daß man die Stimmkraft jedes Mitgliedes, ohne irgend etwas über die von ihm kontrollierten Stimmen zu wissen, bestimmen kann, wenn die minimalgewinnenden Koalitionen bekannt sind.

10. Beantworten Sie die folgenden Fragen für einen aus drei Personen bestehenden Ausschuß:
    a) Bestimmen Sie alle möglichen Klassen der minimalgewinnenden Koalitionen.
    b) Bestimmen Sie für jede Klasse einer minimalgewinnenden Koalition die Verteilung der Stimmkräfte.
    c) Zeigen Sie, daß die verschiedenen Verteilungen der Stimmkräfte, die wir in Übung 7 ermittelten, die einzig möglichen sind.

11. In Übung 1 gilt für die Teile a) und e) und in Übung 4 für die Teile b) und d) jeweils die gleiche Antwort. Nennen Sie, unter Benutzung der Ergebnisse von Übung 9, die Gründe für diese Koinzidenz.

12. Errechnen Sie die Stimmkraft eines der großen Fünf im Sicherheitsrat der Vereinten Nationen in der folgenden Form:
    a) Zeigen Sie, daß sich eine Nation an siebter oder höherer Stelle befinden muß, um als Pivot gelten zu können.
    b) Zeigen Sie, daß es $\binom{6}{2}$ 6! 4! Permutationen gibt, bei denen die Nation auf Platz 7 Pivot ist.
    c) Stellen Sie ähnliche Formeln für die Anzahl der Permutationen auf, bei denen sie auf den Plätzen 8, 9, 10 oder 11 Pivot ist.
    d) Ermitteln Sie, unter Benutzung dieser Information, die Gesamtzahl der Permutationen, in denen sie Pivot ist, und errechnen Sie daraus die Stimmkraft der Nation.
13. Errechnen Sie unter Benutzung des Ergebnisses der Übung 12 die Stimmkraft einer kleinen Nation im Sicherheitsrat.

10*. Flußdiagramme[1]

Ein Flußdiagramm ist ein graphisches Hilfsmittel, das dazu dient, die logische Struktur eines Rechenablaufes darzustellen. Ein gutes Flußdiagramm ermöglicht es jedem, der mit arithmetischen Operationen vertraut ist, eine Rechnung durchzuführen, ohne das Problem selbst verstehen zu müssen, auf Grund dessen die Rechnung durchgeführt werden soll. So kann man z. B. leicht ein Flußdiagramm in ein aus einzelnen Befehlen bestehendes Programm für eine Rechenanlage übersetzen.

Ein Flußdiagramm hat manche Vorteile: Wenn auch ein Satz von Befehlen (Programm), das für eine Rechenanlage aufgestellt wurde, für eine andere Rechenanlage gewöhnlich nicht zu gebrauchen ist, so kann doch das gleiche Flußdiagramm dazu benutzt werden, Programme für verschiedene Rechner aufzustellen. Außerdem setzt es einen Nichtfachmann in die Lage, einen Rechner zu benutzen, da er das Flußdiagramm durch einen Programmierer in ein Programm übertragen lassen kann. Diese Arbeitsteilung — das Aufstellen eines Flußdiagramms durch den Kunden und das Übersetzen in ein Programm durch einen Fachmann — wird im Geschäftsleben sehr oft ausgenutzt.

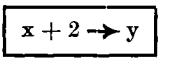
Flußdiagramme erweisen sich jedoch auch dann als äußerst nützlich, wenn keine Rechenanlagen vorhanden sind. Sie stellen einen idealen Weg dar, Rechen- und andere systematische Abläufe zu klären und darzustellen.

Ein Flußdiagramm besteht gewöhnlich aus vier Arten von Symbolen. Das

---

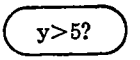
[1] Man pflegt diese Schaubilder auch als „Ablaufdiagramme" zu bezeichnen. Wir wollen hier jedoch den geläufigeren Ausdruck „Flußdiagramm" verwenden. Siehe dazu auch „Was denkt ein Elektronengehirn", Theo Lutz, Frank'sche Verlagsbuchhandlung Stuttgart, 1963. [Der Übersetzer.]

am häufigsten verwandte Symbol ist ein Rechteck, das eine Rechenanweisung oder eine Folge von solchen enthält. So weist z. B. das Rechteck



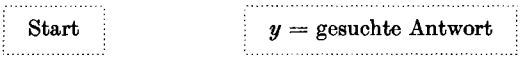
jemanden an, zu x (einer gegebenen oder früher errechneten Größe) 2 zu addieren und diesen Wert mit y zu bezeichnen. Der Wert y kann dabei die gewünschte Antwort oder eine Größe sein, die auf späteren Stufen der Rechnung benötigt wird. Im allgemeinen enthält ein solches Rechteck die Anweisung, eine bestimmte arithmetische Operation mit bekannten Größen auszuführen und dem Ergebnis eine bestimmte Variable zuzuordnen. Beachten Sie, daß ein Ausdruck wie $x + 2 \rightarrow y$ eine Anweisung ist, da er die Ausführung eines Befehls fordert. Hiervon unterscheidet sich der Ausdruck $x + 2 = y$ dadurch, daß er nur *deklarierende* Wirkung hat und darauf hinweist, daß eine bestimmte Beziehung besteht. Diese zwei Aussagen sind voneinander grundverschieden, und sie sollten nicht verwechselt werden.

Der nächste Baustein eines Flußdiagramms ist der *Kreis*, der eine zu beantwortende Frage enthält. Hierbei wird gewöhnlich gefragt, ob zwei bekannte Werte gleich sind oder ob eine bestimmte auf sie bezogene Ungleichung gilt. So fragt z. B. der Kreis



danach, ob die Zahl y größer ist als 5. Das Ergebnis eines Kreises ist ein „Ja" oder ein „Nein", und wir benutzen Kreise dazu, eine Verzweigung im Flußdiagramm zu schaffen. Es besteht dann gewöhnlich eine bestimmte Folge von Befehlen für eine „Ja" Antwort und eine andere Folge von Befehlen für eine „Nein" Antwort.

Wir sind nun fast in der Lage, ein einfaches Flußdiagramm aufzustellen; uns fehlt lediglich noch ein Symbol für den Beginn bzw. das Ende. Wir benutzen dazu *End- und Anfangspunkte*, die durch gestrichelte Rechtecke dargestellt werden können. So sind z. B.



typische Anfangs- bzw. Endpunkte. Der logische Fluß innerhalb des Diagramms wird durch Pfeile dargestellt, die bei einem Anfangspunkt beginnen und bei einem Endpunkt auf der anderen Seite des Diagramms enden müssen.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, wir wollten für einen gegebenen Wert von a den Ausdruck $\sqrt{|a-2|}$ errechnen. Wir wollen ein Flußdiagramm aufstellen, das für jeden gegebenen Wert von a gültig ist. Ein solches Diagramm wird in Abb. 11 gezeigt. Hierbei wird a als gegeben angesehen und die Antwort mit y bezeichnet, d. h. $Y = \sqrt{|a-2|}$.

Aus Bequemlichkeitsgründen haben wir x als Bezeichnung für eine Teilantwort gewählt. Das Flußdiagramm könnte durch die folgenden verbalen Befehle ersetzt werden: „Subtrahiere 2 von a. Ist das Resultat nicht negativ, ziehe die Quadratwurzel, die dann das Ergebnis darstellt. Ist das Resultat negativ, so ersetze es durch seine Negation

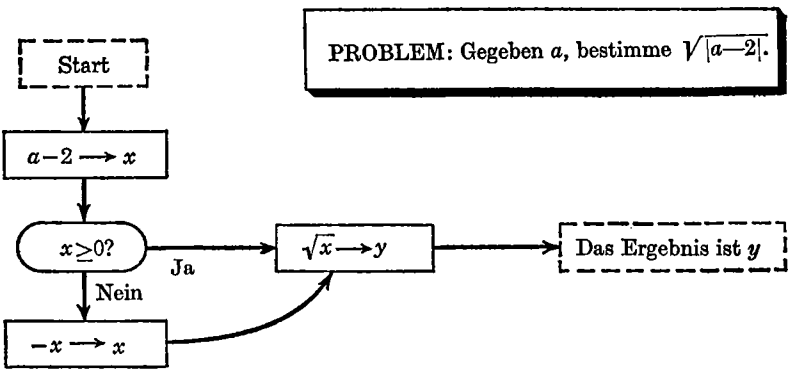


Abb. 11

und ziehe dann die Quadratwurzel." Selbst bei einem so einfachen Problem werden die Vorteile eines Flußdiagrammes klar.

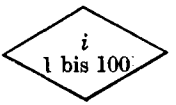
Das obige Beispiel zeigt eine der hauptsächlichen Stärken eines Flußdiagrammes: Die Formel $\sqrt{|a-2|}$ ist statisch. Sie enthält keine Hinweise darauf, wie die Formel ausgerechnet werden soll. Dies wird bei verwickelteren Ausdrücken noch offensichtlicher. Selbst ein Oberschüler wird nicht ohne weiteres wissen, womit er bei der Lösung des Ausdruckes

$$\frac{\sqrt{-(a+3b)(5-7)}}{[(a-2b)^2+3]^3}$$

beginnen soll. Demgegenüber ist das Flußdiagramm dynamisch. Es gibt für jeden Rechenschritt genaue Anweisungen.

Ein Flußdiagramm dieser Art mag zunächst ziemlich ungewohnt erscheinen. Einer der besten Wege, damit vertraut zu werden, ist, die Buchstaben durch Zahlen zu ersetzen und die Befehle des Diagrammes wirklich auszuführen. Durch alternative Wahl solcher Zahlen, die dazu zwingt, jeden der möglichen Zweige zu benutzen, kann die Brauchbarkeit eines Flußdiagrammes überprüft werden. Setzen wir z. B. für $a = 100$. Gemäß Diagramm ist nun $100 - 2 = 98 = x$. Als nächstes wird gefragt: $x = 98 \geqq 0$? Die Antwort hierauf ist „Ja". Also setze $\sqrt{x} = \sqrt{98} = y$. Die gesuchte Antwort ist dann $y = \sqrt{98}$. Führen Sie nun die Rechnung mit den Werten $a = 1/2$ und $a = -17{,}43$ durch.

Der große Vorteil von elektronischen Rechenanlagen ist die unheimliche Geschwindigkeit bei der Ausführung sich wiederholender Prozesse, d. h. bei der Befolgung der gleichen Instruktion in einer großen Anzahl von Fällen. Solche sich wiederholenden Rechenvorgänge oder „Schleifen" werden durch den *Rhombus*, die vierte Art der Symbole, dargestellt. So weist uns der Rhombus



z. B. an, $i = 1$ zu setzen und alle darauffolgenden Befehle solange auszuführen, bis sie uns wieder zu dem Rhombus zurückführen. Danach soll $i = 2$ gesetzt werden, und die gleichen Befehle sollen noch einmal ausgeführt werden. Diese Vorgehensweise setzen wir solange fort, bis wir die Befehle für $i = 100$ ausgeführt haben, um dann zu dem rechts vom Rhombus angegebenen Befehl fortzuschreiten. Der Buchstabe i im Rhombus wird gewöhnlich als *Index* bezeichnet.

Beispiel 2. Wir wollen dies an Hand der Summierung von 100 gegebenen Zahlen illustrieren. Das Flußdiagramm hierfür wird in Abb. 12 dargestellt. Wir beginnen mit 0 und fahren fort, die 100 Zahlen jeweils nacheinander zu addieren (da die Addition einer einzelnen Zahl zu einer gegebenen Zahl eine der grundlegenden Operationen jedes Rechnens ist), bis wir alle 100 Größen addiert haben. Dann haben wir die gewünschte Summe erreicht.

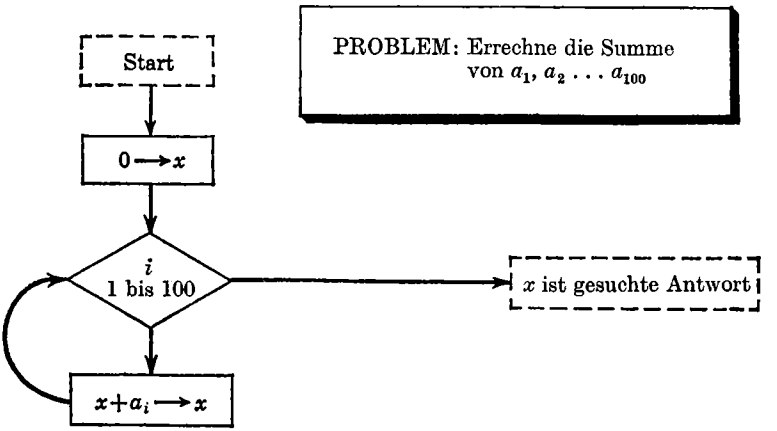


Abb. 12

Es ist recht instruktiv, der Abb. 12 schrittweise zu folgen. Zunächst setzen wir $x = 0$. Wir treten dann in den Rhombus ein, wählen $i = 1$. Gemäß dem unter dem Rhombus befindlichen Rechteck errechnen wir dann $0 + a_1 = a_1$ und bezeichnen dies mit x. Wir kehren zurück zum Rhombus und setzen $i = 2$. Dieses Mal errechnen wir im darunter befindlichen Rechteck $a_1 + a_2$ und bezeichnen dies mit x. Als nächstes setzen wir $i = 3$ und errechnen $(a_1 + a_2) + a_3$ usw. Offensichtlich wird, nachdem die Schleife hundertmal durchgeführt wurde, x die Summe aller Zahlen darstellen.

Beispiel 3. Ein ähnliches, jedoch etwas komplizierteres Diagramm zeigt Abb. 13. Die darin ausgeführte Rechnung wird eine Schlüsselstellung in Kapitel V einnehmen. Die Abbildung zeigt eine interessante Variation der Benutzung des Rhombus.

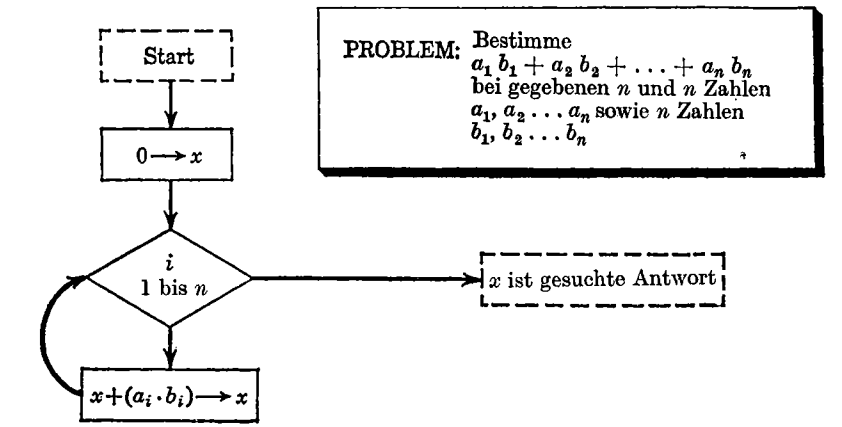


Abb. 13

Wir müssen hier nicht näher spezifizieren, wie oft die Schleife durchlaufen werden soll. Wir geben lediglich an, daß i von 1 bis n laufen soll, wobei n eine der uns vorgegebenen Zahlen ist. Dadurch werden wir wesentlich flexibler. Wir können, ohne das Flußdiagramm abändern zu müssen, nicht nur die Werte der as und bs, sondern auch ihre Anzahl variieren.

Beispiel 4. Abb. 14 zeigt einen sehr wichtigen Ablauf, bei dem keinerlei arithmetische Operationen auszuführen sind. Wir wollen die größte der gegebenen n Zahlen a_1, a_2, ..., a_n herausfinden. Selbstverständlich können sich in der Zahlenfolge bestimmte Zahlen wiederholen, jedoch wird immer eine einzige als größte bezeichnet werden können, selbst wenn diese mehr als einmal auftaucht. So ist z. B. das Maximum der Zahlenfolge 1, 5, 11, 8, 11, 9, 0, 10, 5, 4, 5 die Zahl 11. Entsprechend ist das Minimum gleich 0. Abb. 14 enthält alle Anweisungen, die auszuführen sind, um das Maximum unter n gegebenen Zahlen zu finden.

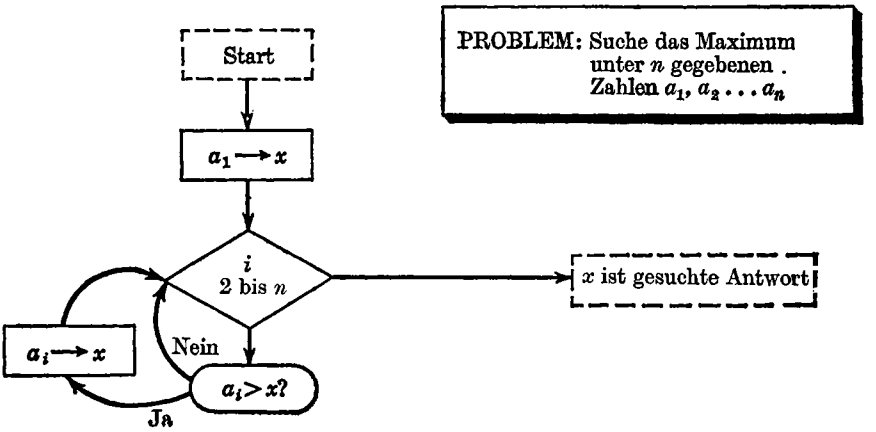


Abb. 14

Die grundlegende Idee ist hierbei sehr einfach: Beginnen Sie mit der ersten Zahl und vergleichen Sie diese nacheinander mit jeder folgenden. Stellen Sie jedesmal fest, ob sie größer als die größte der vorangehenden Zahlen ist, und fahren Sie auf diese Weise solange fort, bis Sie alle n überprüft haben. Im Flußdiagramm bezeichnet x die größte bis zu dem jeweiligen Rechenschritt gefundene Zahl, so daß am Ende x das Maximum darstellt.

Beispiel 5. Die eigentliche Stärke des Gebrauchs von Flußdiagrammen sieht man am besten bei Problemen, die eine Schleife innerhalb einer anderen Schleife erfordern. Wir wollen als Beispiel das Ordnen von n gegebenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in fallender Ordnung betrachten. In der gesuchten Reihenfolge soll also $a_1 \geqq a_2$, $a_2 \geqq a_3$ usw. gelten. Abb. 15 beschreibt eine der möglichen Methoden. Wir vergleichen in unserer Zahlenaufstellung jede Zahl mit der vorangehenden. Ist sie größer als die vorangehende, so wechseln wir sie aus. Da wir dabei die ganze Zahlenreihe durchgehen müssen, stellt dieser Vorgang eine Schleife dar und ist in Abb. 15 durch einen Rhombus symbolisiert. Am Ende der Schleife haben wir zwar eine „bessere" Reihenfolge erreicht, wir sind aber möglicherweise noch nicht am Ende.

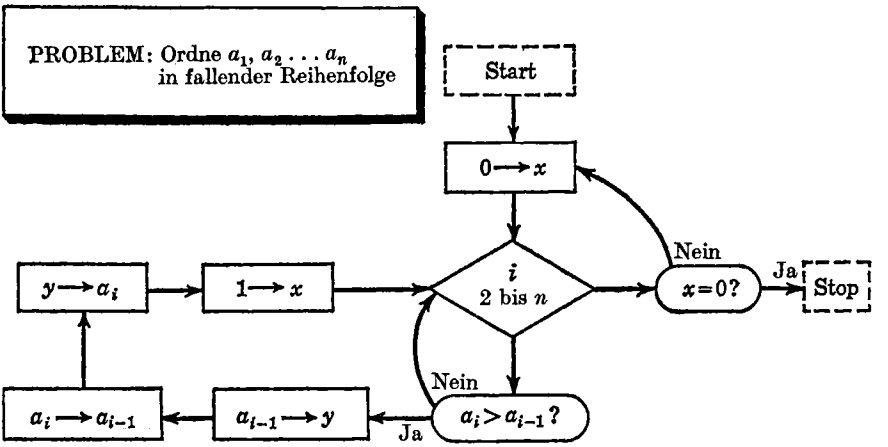


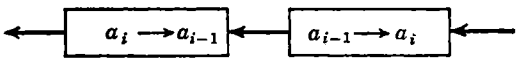
Abb. 15

Wir müssen nun die gleiche Schleife noch einmal durchlaufen und erreichen dadurch eine weitere Verbesserung. Dies ist so lange fortzusetzen, bis keine weitere Änderung mehr notwendig ist. Die Wiederholung der Schleifendurchläufe kann nicht durch einen Rhombus gesteuert werden, da wir zunächst nicht wissen, wie oft wir die Zahlenreihe zu durchlaufen haben. Statt dessen überprüfen wir jeweils, ob während des Schleifendurchlaufes irgendeine Änderung vorgenommen wurde und fahren damit solange fort, bis die Zahlenreihe das erste Mal ohne Änderung durchlaufen wurde. Diese Überprüfung erreichen wir durch ein bestimmtes *Signal*, das in Abb. 15 durch die Variable x gebildet wird. Die Variable x wird am Beginn eines jeden Schleifendurchlaufes 0 gesetzt und wird jeweils dann auf 1 abgeändert, wenn die Reihenfolge zweier Zahlen geändert wird.

ÜBUNGEN

1. Stellen Sie ein Flußdiagramm zur Errechnung des Wertes $(2a + 5)^2$ für ein willkürlich gegebenes a auf.

2. Für welche Werte von a erhalten wir in Abb. 11 im Kreis ein „Nein"?
3. Stellen Sie ein Flußdiagramm für die Errechnung des geometrischen Mittels von fünf Zahlen, d. h. von $\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$ auf.
4. Setzen Sie in Abb. 13 $n = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = 2$. Durchlaufen Sie schrittweise das Diagramm, und ermitteln Sie die Antwort. Überprüfen Sie diese.
5. Stellen Sie ein Flußdiagramm zur Ermittlung des Minimums von n Zahlen auf.
6. Erstellen Sie ein Flußdiagramm zur Ermittlung des arithmetischen Mittels (oder des Durchschnitts) von n Zahlen, d. h. von $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.
7. Stellen Sie ein Flußdiagramm auf, mit dessen Hilfe 100 gegebene Zahlen in fallender Reihenfolge angeordnet werden können.
8. Stellen Sie ein Flußdiagramm auf, in dessen Rahmen n gegebene Zahlen in fallender Reihenfolge geordnet und doppelte Zahlen entfernt werden. Die Antwort sollte aus einer Zahl m, der Anzahl der vorhandenen, sich unterscheidenden Zahlen und einer fallenden Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestehen.
9. Zeichnen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übungen 7 und 8 ein Flußdiagramm für die Entfernung doppelter Zahlen aus einer Reihe von 100 gegebenen Größen.
10. Warum wird in Abb. 15 die Variable y eingeführt? Warum werden a_{i-1} und a_i nicht mit Hilfe der beiden folgenden Rechtecke ausgetauscht?



11. Zeigen Sie, daß ein Rhombus immer durch eine Kombination von Rechtecken und einem Kreis ersetzt werden kann.

11*. Flußdiagramme für Zählprobleme

Im Rahmen dieses Abschnittes wollen wir Ihnen einige weitere Beispiele für die Anwendung von Flußdiagrammen geben, indem wir diese Technik bei der Lösung von Rechenproblemen verwenden, die bereits früher in diesem Kapitel beschrieben wurden.

Beispiel 1. Die Errechnung von $n!$ ist ideal für die Lösung mit Hilfe von Flußdiagrammen geeignet. Sie erfordert, wie Abb. 16 zeigt, lediglich eine einfache Schleife. Wir wollen uns nun die Frage stellen, was geschieht, wenn wir in Abb. 16 den Wert von 0! errechnen wollen: Wir lassen dann im Rhombus i von 1 nach 0 laufen. Hierfür benötigen wir eine weitere Operationsregel, und zwar legt man gewöhnlich fest, daß die Schleife dann einfach übersprungen wird, wenn i von a nach b laufen soll, jedoch $a > b$ ist. Unser Programm wird also $0! = 1$ ergeben. Bei $n = 1$ lautete der Befehl, den Schritt von 1 nach 1 auszuführen, d. h. wir durchlaufen die Schleife gerade einmal mit $i = 1$. Daher ergibt sich $1! = 1 \cdot 1 = 1$.

Beispiel 2. Ein interessanteres Problem ist die Errechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{j}$. Wir werden die Methode des Pascalschen Dreiecks anwenden und jeweils eine Zeile des Dreiecks auf einmal errechnen.

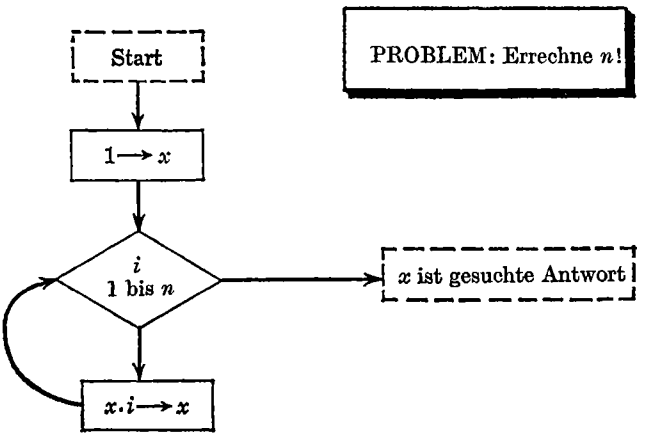


Abb. 16

Wir stellen dies in Abb. 17 dar. Auch bei diesem Beispiel legen wir fest, daß, wenn $1 > n - 1$ ist, die zweite Rhombusschleife übersprungen wird. (Siehe Übung 3.)

Als nächstes wollen wir drei verschiedene Durchschnittsbegriffe betrachten. Gewöhnlich verstehen wir unter dem „Durchschnitt" einer Zahlenfolge

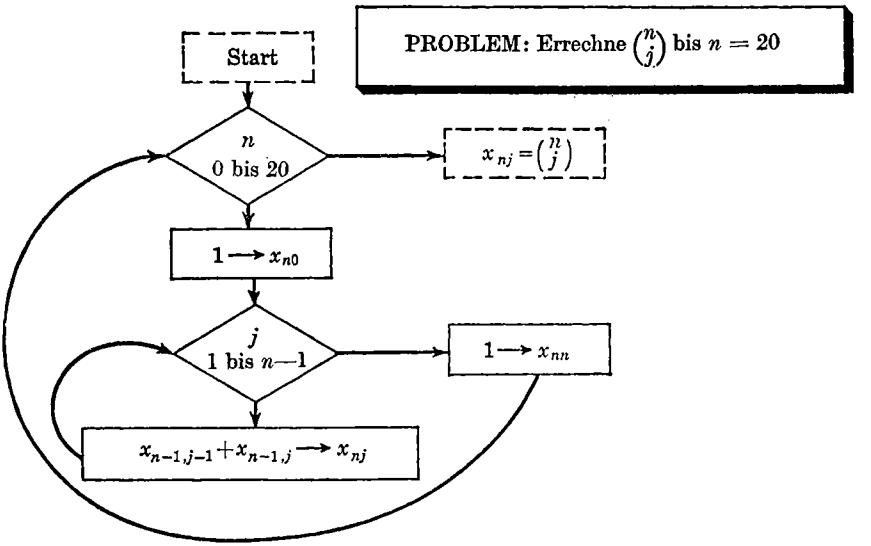


Abb. 17

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ihr *arithmetisches Mittel* $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$. Daneben gibt es jedoch noch eine ganze Anzahl anderer „Durchschnitte". So versteht man z. B. unter dem *Medianwert* den Wert, zu dessen Seiten gleichviel größere wie kleinere Werte zu finden sind. Bei einer ungeraden Anzahl von Zahlen kann er genau definiert werden, während bei einer geraden Anzahl von Werten zwei Werte als Medianwert in Frage kommen.

Genauer gesagt, wenn wir unsere Werte in fallender Reihenfolge anordnen, so können drei Fälle eintreten: 1. Bei einer ungeraden Zahl von a ist der Medianwert das mittlere a. 2. Es liegt eine gerade Anzahl von Zahlen vor, und die beiden mittleren Werte sind gleich; dann wird dieser Wert mit Medianwert bezeichnet. 3. Die beiden mittleren Werte unterscheiden sich und werden in diesem Falle beide als Medianwerte bezeichnet. In diesem Fall definiert man oft die Klasse der Medianwerte als den Intervall, der diese zwei mittleren Zahlen als Endpunkte hat.

Ein anderer, häufig gebrauchter „Durchschnitt" ist der *Mittelwert*. Er wird als die am häufigsten vorkommende Zahl einer Zahlenfolge definiert. Bei gleichhäufigen Zahlen können sich mehrere Mittelwerte ergeben.

Ehe wir die Flußdiagramme für die Errechnung der drei Durchschnittarten aufstellen, wollen wir eine wichtige, oft beim Programmieren benutzte Abkürzung einführen: Es passiert oft, daß bereits programmierte Rechnungen als Teil einer umfangreicheren Rechnung auftauchen. Anstatt nun das bereits aufgestellte Programm noch einmal abzuschreiben, fügen wir lediglich in das Hauptprogramm die Anweisung ein, an dieser Stelle das Unterprogramm durchzuführen. (Bei Rechenanlagen erfordert dies gewöhnlich einen einfachen Befehl.) Wir bezeichnen dann den kleineren Rechenvorgang als ein Unterprogramm des Hauptprogrammes. Im Hauptprogramm stellen wir das durch das Einfügen eines Rechteckes oder eines Kreises dar, worin der Befehl für die Durchführung des bereits aufgestellten Programmes zu finden ist.

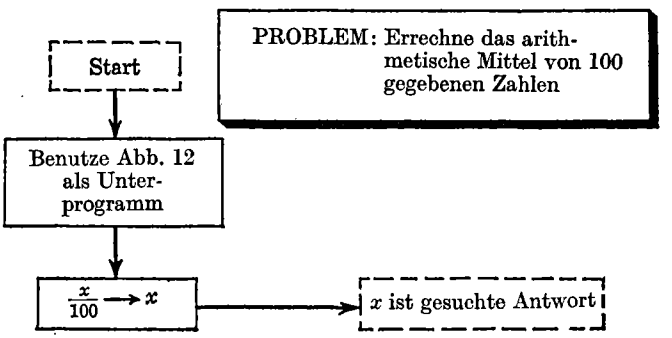


Abb. 18

Beispiel 3. Zur Errechnung des arithmetischen Mittels haben wir nur die Summe der Werte zu bilden und sie dann durch n zu dividieren. Nehmen Sie an, wir suchten das arithmetische Mittel der gegebenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$. Wir können dies einfach unter Benutzung der Abb. 12 des letzten Abschnittes als Unterprogramm erreichen. Abb. 18 zeigt das hierzu benötigte Hauptprogramm:

Beispiel 4. Soll der Medianwert von n gegebenen Zahlen ermittelt werden, so ist zunächst zu untersuchen, ob die positive ganze Zahl n gerade oder ungerade ist. Einige Rechenanlagen enthalten für diesen Zweck automatische Testvorrichtungen. Wir wollen jedoch annehmen, daß die gegebene Anlage darüber nicht verfüge, und wir

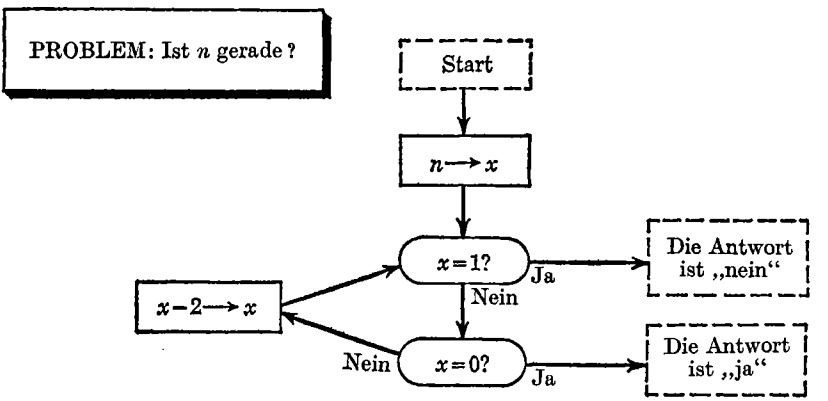


Abb. 19

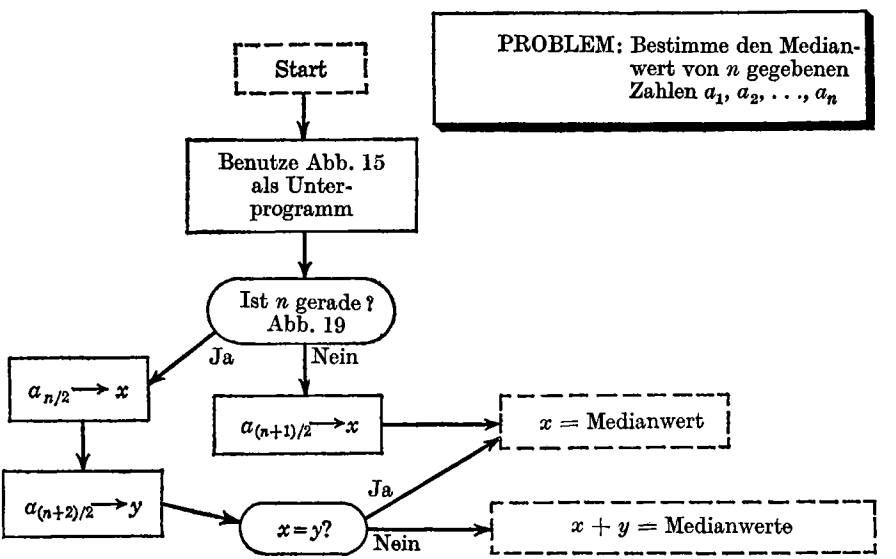


Abb. 20

wollen für die Prüfung auf eine gerade oder ungerade Anzahl der Werte ein Unterprogramm aufstellen. Das Ergebnis dieses, in Abb. 19 gezeigten Unterprogrammes ist „Ja" oder „Nein". Es wird in Abb. 20 anstelle des oberen Kreises ausgeführt.

Beispiel 5. Bevor wir einen Rechenablauf für die Bestimmung von Mittelwerten aufzeichen, wollen wir ein sehr nützliches Unterprogramm aufstellen, mit dessen Hilfe die Häufigkeit aller Zahlen einer Zahlenfolge festgelegt werden kann. (Siehe Abb. 21.) Dieses Programm baut auf folgender grundlegender Idee auf: Wir ordnen zunächst

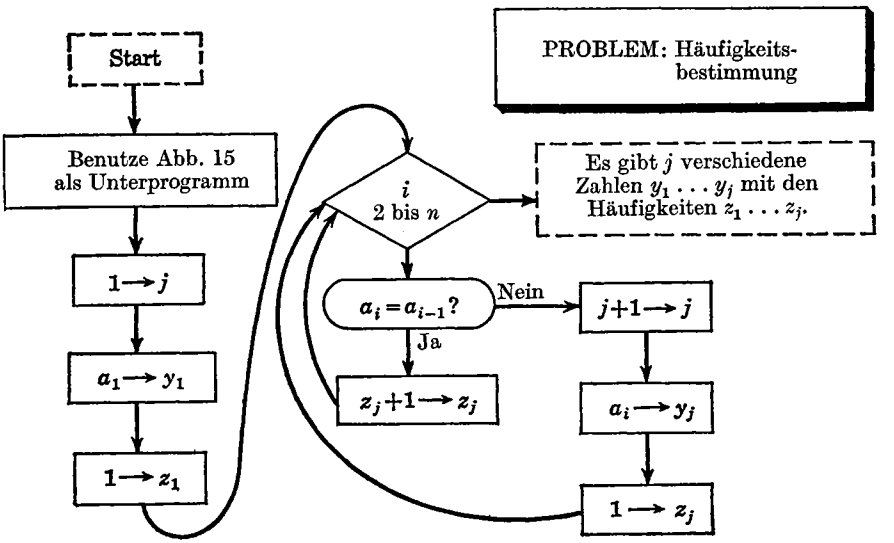


Abb. 21

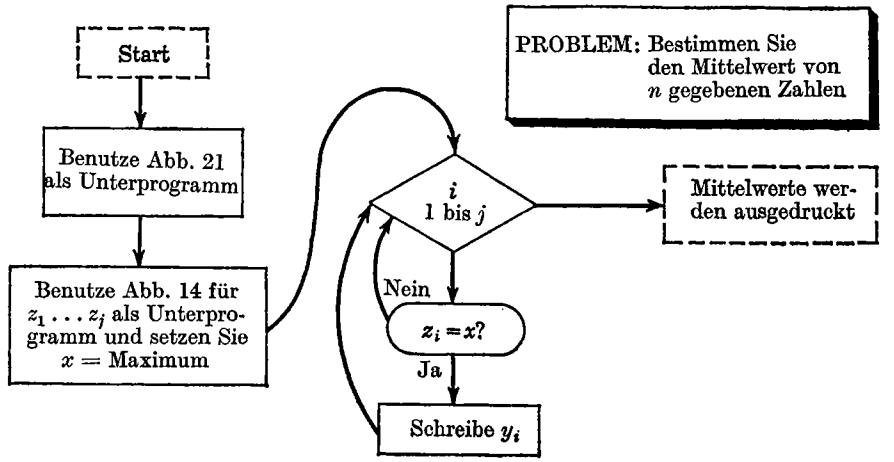


Abb. 22

die gegebenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in fallender Reihenfolge. Wir durchlaufen dann diese Aufstellung (unter Benutzung des Index i) und stellen fest, ob wir dabei auf eine neue Zahl gestoßen sind. Da die Zahlen zuerst geordnet wurden, ist jede Zahl, die sich von der vorhergehenden unterscheidet, neu.
Wenn wir auf eine neue Zahl stoßen, so ordnen wir dieser eine neue Variable y_j zu (wobei j der Index der voneinander *verschiedenen* Zahlen ist) und betätigen ein Zählwerk z. Ist die entsprechende Nummer jedoch nicht neu, so vergrößern wir z_j lediglich um 1. Dies ist auch die Erklärung für die Verzweigung in Abb. 21. Die drei der Schleife vorangehenden Anweisungen erlauben uns lediglich zu beginnen, d. h. sie sind vorbereitende Anweisungen, sie leiten die Rechnung ein.
Sobald das in Abb. 21 gezeigte Unterprogramm gegeben ist, ist es ziemlich einfach, die Mittelwerte zu bestimmen. Wir haben dann lediglich die Zahl oder die Zahlen mit den größten Häufigkeiten herauszusuchen. Das zu diesem Zweck benutzte Flußdiagramm zeigt Abb. 22.

ÜBUNGEN

1. Stellen Sie ein Flußdiagramm für die Errechnung von 2^n auf. Können Sie damit das richtige Ergebnis für $n = 0$ und $n = 1$ errechnen?

2. Nehmen Sie an, eine Rechenanlage könne lediglich addieren und nicht multiplizieren. Stellen Sie ein Flußdiagramm für die Errechnung von $n \cdot a$ auf, wenn n eine ganze Zahl und a eine beliebige Zahl ist. Erhalten Sie jetzt das richtige Ergebnis für $n = 0$ und $n = 1$?

3. Überprüfen Sie die Abb. 17 für die Fälle $n = 0$ und $n = 1$, indem Sie das Diagramm Schritt für Schritt nachprüfen.

4. Stellen Sie unter Benutzung des Programms der Übung 2 als Unterprogramm ein Flußdiagramm für die Errechnung von $\binom{n}{j}$ auf.

5. Ermitteln Sie, unter Benutzung der Flußdiagramme der Abb. 18 — 21, die arithmetischen Mittel, die Medianwerte und die Mittelwerte jeder der folgenden Zahlenreihen.
   a) 1, 2, 2, 2, 3, 3, 8.
   b) 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3.
   c) 1, 2, 2, 2, 3.
   d) 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   e) 2, 5, 0, 9, 2, 1.

6. Stellen Sie ein Flußdiagramm zur Überprüfung von n auf seine Teilbarkeit durch 3 hin auf.

7. Prüfen Sie mit Hilfe eines Flußdiagrammes gegebene ganze Zahlen n daraufhin, ob sie Quadratzahlen sind.

8. Stellen Sie ein Flußdiagramm auf, mit dessen Hilfe Sie die größte ganze Zahl ermitteln, deren dritte Potenz kleiner als eine gegebene Zahl a ist. Was ergibt das Flußdiagramm für $a < 1$?

9. Was ist mit dem folgenden Flußdiagramm zu erreichen, wenn die n Zahlen a_1, $a_2, \ldots, a_n$ gegeben sind?

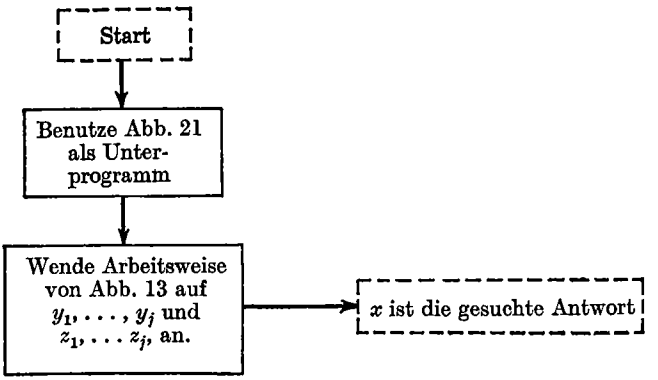
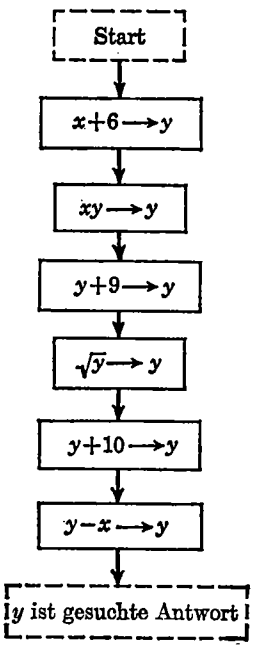


Abb. 22a

10. Stellen Sie ein Flußdiagramm auf, mit dessen Hilfe Sie feststellen können, ob sich unter n gegebenen Zahlen wenigstens zwei gleiche befinden. Vereinfachen Sie dieses Diagramm soweit wie möglich, ohne ein Unterprogramm zu benutzen.

11. x sei irgendeine positive Zahl. Führen Sie damit jedes der folgenden Programme durch. Bestimmen Sie jeweils y.



[Lös. $y = 13$.]

Abb. 22b

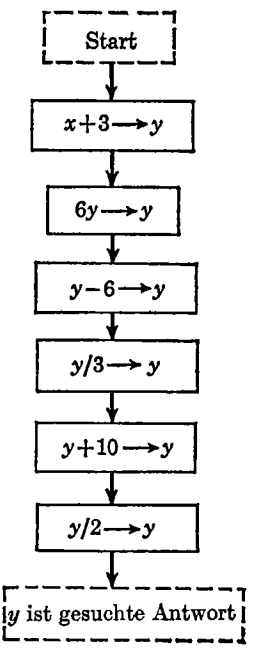


Abb. 22c

12. a, b, c und x seien gegebene Zahlen. Führen Sie das folgende Programm durch, und nennen Sie das Ergebnis.

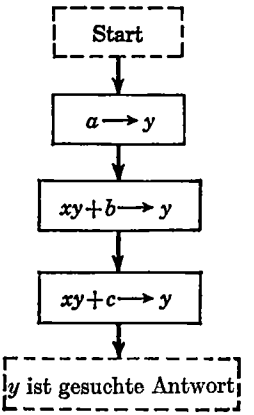


Abb. 22d

13. Führen Sie mit den gegebenen Zahlen x und y das folgende Programm durch. Beachten Sie, daß das Programm mit einem „Ja" oder einem „Nein" als Antwort endet. Welche Bedeutung hat jede der Antworten?

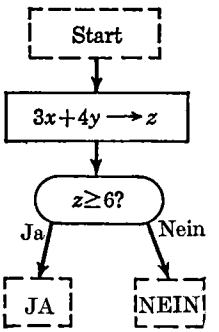


Abb. 22e

Empfohlene Lektüre

Ackermann, W. und Hilbert, D.: Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin.
Knödel, W.: Programmieren von Ziffernrechenanlagen, Wien 1961.
Shapley, L. S., and Shubik, M.: A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, The American Political Science Review, XLVIII (1954), pp. 787—792.
Whitworth, W. A.: Choice and Chance, with 1000 Exercises, Stechert, New York 1934.

IV. Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Einführung

Sehr oft hören wir Sätze der folgenden Art: „Wahrscheinlich wird die Rakete erfolgreich abgeschossen werden", „Wir werden das Geschäft mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit machen", „Die Münze wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Vorder- bzw. Rückseite zeigen", usw. In jedem dieser Fälle bezieht sich die Aussage auf eine Situation, über deren Ausgang wir uns nicht ganz sicher sind, bei der wir jedoch ein gewisses Maß an Vertrauen dahingehend ausdrücken, daß unsere Voraussage erfüllt werden wird. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung schafft nun einen mathematischen Rahmen für Behauptungen solcher Art.

Betrachten Sie zunächst einen Versuch, dessen Ausgang nicht bekannt ist. Nehmen Sie an, daß irgend jemand die Behauptung p über das Ergebnis des Versuches aufstellt und daß wir diesem p eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zuordnen möchten. Wird die Behauptung p für sich allein betrachtet, so finden wir gewöhnlich keine ihr aus ihrem Charakter heraus zuordenbare Wahrscheinlichkeit. Wir suchen daher nach einer Methode, allen denkbaren Aussagen bezüglich des Ausganges des Versuches eine Wahrscheinlichkeit zuordnen zu können. Die Suche nach einer solchen Methode scheint zunächst nicht sehr erfolgversprechend zu sein, da wir bezüglich des Versuches unendlich viele Behauptungen aufstellen können. Uns wird jedoch hierbei durch ein grundlegendes Prinzip geholfen:

Grundlegende Annahme: Jedem von zwei äquivalenten Sätzen ist die gleiche Wahrscheinlichkeit zuzuordnen.

Solange nur eine endliche Anzahl logischer Möglichkeiten besteht, gibt es auch nur eine endliche Anzahl von Wahrheitsklassen, d. h. das Zuordnen von Wahrscheinlichkeiten stellt ein im Umfang begrenztes Unterfangen dar. Diese Tätigkeit umfaßt drei Schritte: 1. Wir bestimmen zuerst die Möglichkeitsklasse U, d. h. die Klasse aller logischen Möglichkeiten. 2. Jeder Unterklasse X von U ordnen wir eine Größe $m(X)$ zu und 3. jedem Satz p ordnen wir dann die Größe $m(P)$, die Maßzahl seiner Wahrheitsklasse, als Wahrscheinlichkeit zu. Die Wahrscheinlichkeit des Satzes p wird dann mit $Pr\,[p]$ bezeichnet.

Den ersten Schritt, den der Bestimmung der Klasse der logischen Möglichkeiten, haben wir bereits in den vorangehenden Kapiteln betrachtet. Es ist

wichtig, uns ins Gedächtnis zurückzurufen, daß es keine einheitliche Methode für die Analyse logischer Möglichkeiten gibt. Wir können bei einem gegebenen Problem sowohl eine sehr feine als auch eine sehr grobe Analyse der Möglichkeit vornehmen, wodurch U sehr viele bzw. sehr wenige Elemente haben wird.

Der nächste Schritt nach der Wahl von U ist, jeder Unterklasse X eine Zahl zuzuordnen, die wiederum als die Wahrscheinlichkeit jedes Satzes der Wahrheitsklasse X angesehen wird. Dies geschieht auf die folgende Weise:

Zuordnung einer Maßzahl: Ordnen Sie jedem Element von U eine positive Zahl (Gewicht) so zu, daß die Summe der Gewichte 1 ergibt. Die Maßzahl einer Klasse ist dann die Summe der Gewichte ihrer Elemente. Die Maßzahl der Klasse $\mathscr{E}$ ist 0.

Bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf wirtschaftswissenschaftliche Probleme wird, bei der Zuordnung der Maßzahlen und der Analyse der logischen Möglichkeiten, manchmal das Gewicht mehr auf der Sammlung, Analyse und Interpretation der Datenmengen, andere Male mehr auf der fundierten Kenntnis der Tatsachen und ihrer Beurteilung liegen. Im ersten Fall sollte die Zuordnung der Kennzeichen besser durch einen ausgebildeten Statistiker erfolgen, während im zweiten Fall der Wirtschaftler dafür als geeigneter erscheint. Sehr oft werden sowohl die objektiven Tatsachen als auch die subjektiven Wertungen wichtig sein, so daß es hier auf eine gute Zusammenarbeit zwischen dem Statistiker und dem Kaufmann ankommen wird.

Um die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Satzes zu bestimmen, müssen wir, nachdem wir die Gewichte zugeordnet haben, seine Wahrheitsklasse und die Summe der ihren Elementen zugeordneten Gewichte finden. Dieses Problem, dessen Lösung zunächst recht einfach erscheint, enthält oft beträchtliche mathematische Schwierigkeiten. Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie ist es, Techniken zur Lösung dieser Probleme zu entwickeln.

Beispiel 1. Man würfele mit einem normalen Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die geworfene Zahl kleiner als 4? Die Klasse der Möglichkeiten U ist hier gleich $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Symmetrie des Würfels läßt darauf schließen, daß jede der 6 Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit geworfen werden kann. Wir ordnen also jedem möglichen Ergebnis das Gewicht 1/6 zu. Die Wahrheitsklasse des Satzes „Die geworfene Zahl ist kleiner als 4" ist $\{1, 2, 3\}$. Die Wahrscheinlichkeit des Satzes ist somit 3/6 oder 1/2, die Summe der Gewichte der Elemente der Wahrheitsklasse.

Beispiel 2. Drei Hersteller von elektronischen Rechenmaschinen A, B und C versuchen, den Auftrag für die Installation eines Rechners bei der Gesellschaft X zu erhalten. Der Verkaufsdirektor von A ist überzeugt, daß seine Gesellschaft die gleiche Chance hat, den Auftrag zu bekommen wie die Gesellschaft B, daß jedoch A (und damit auch B) doppelt soviel Chancen wie C hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt A bzw. B den Auftrag? Wir definieren U als die Klasse $\{A, B, C\}$. Würden wir der Chance von C

das Gewicht a zuordnen, so hätten wir den Chancen von A und B das Gewicht $2a$ zuzuordnen. Da die Summe der Gewichte 1 sein soll, erhalten wir $2a + 2a + a = 1$ oder $a = 1/5$. Wir ordnen daher den Gesellschaften A und B 2/5 und der Gesellschaft C 1/5 zu. Die Wahrheitsklasse des Satzes „Gesellschaft A oder Gesellschaft B bekommt den Auftrag" ist $\{A,C\}$. Die Summe der Gewichte der Elemente dieser Klasse ist $2/5 + 1/5 = 3/5$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A oder C den Auftrag bekommt, ist daher 3/5.

ÜBUNGEN

1. Nehmen Sie an, es gäbe n Möglichkeiten für den Ausgang eines gegebenen Versuches. Welche Gewichte sollten den einzelnen Ergebnissen zugeordnet werden, wenn die zugeordneten Gewichte alle gleich sein sollen?
2. Es sei $U = \{a, b, c\}$. Ordnen Sie den drei Elementen Gewichte so zu, daß keine gleichen Gewichte auftauchen, und bestimmen Sie die Maßzahlen der acht Unterklassen von U.
3. Bei einer Wahl gewinne Meier mit der Wahrscheinlichkeit 1/2, Müller mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 und Schulze mit der Wahrscheinlichkeit 1/6.
   a) Stellen Sie U auf.
   b) Ordnen Sie die entsprechenden Gewichte zu.
   c) Nennen Sie die Maßzahlen der acht Unterklassen.
   d) Nennen Sie ein Paar nicht äquivalenter Voraussagen, die die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.
4. Nennen Sie die Möglichkeitsklasse U für jeden der folgenden Versuche:
   a) Es solle eine Wahl zwischen den Kandidaten A und B stattfinden.
   b) Eine Zahl zwischen 1 und 5 solle durch den Zufall ausgewählt werden.
   c) Eine zweiseitige Münze werde geworfen.
   d) Ein Student werde nach seinem Geburtstag gefragt.
   e) Aus einem Los von 1000 Stück werden 5 ausgewählt und geprüft, um festzustellen, wieviel davon fehlerhaft sind.
   f) Ein bestimmtes Gut werde an einem Tage zum Verkauf angeboten, an dem sich 4 Stück davon auf Lager befinden.
5. In welchen Fällen der Übung 4 sollte man jedem der möglichen Ergebnisse das gleiche Gewicht zuordnen?
6. Die Bewerber für eine bestimmte Stelle müssen sich einer Geschicklichkeitsprüfung unterziehen. Einem willkürlich ausgewählten Bewerber werden die folgenden Wahrscheinlichkeiten für das Bestehen des Testes und für eine zufriedenstellende Ausfüllung der eigentlichen Stelle zugeordnet: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Bewerber weder in der Prüfung noch bei der Ausfüllung der eigentlichen Stelle befriedigt, sei 1/2. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er entweder bei der Prüfung oder bei der Ausführung der eigentlichen Arbeit (aber nicht bei beidem) befriedigt, sei 1/3.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befriedigt der Bewerber sowohl in der Prüfung als auch bei der Leistung der eigentlichen Arbeit?
   b) Kann man auf Grund der gegebenen Informationen bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Bewerber die Stelle zufriedenstellend ausfüllen würde? [Lös.: Nein.]
7. Ein Würfel sei so konstruiert, daß die Wahrscheinlichkeiten der geworfenen Augen den Zahlen der Punkte aus den einzelnen Seiten entsprechen (das Werfen einer

Sechs ist dreimal so wahrscheinlich wie das einer Zwei). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine gerade Zahl geworfen? [Lös.: 4/7.]

8. Geben Sie die acht Möglichkeiten an, die bestehen, wenn eine Münze dreimal nacheinander geworfen wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsmaßzahl, indem Sie jedem möglichen Ergebnis das gleiche Gewicht zuordnen. Nennen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Sätze:
   r) Die Zahl erscheint öfter als das Wappen. Lös. 1/2.
   s) Das Wappen erscheint genau zweimal. Lös. 3/8.
   t) Es erscheint jedes Mal die gleiche Seite. Lös. 1/4.

9. Welche der folgenden Gleichungen sind für die in Übung 8 angegebenen Sätze wahr?
   a) $\mathbf{Pr}[r \vee s] = \mathbf{Pr}[r] + \mathbf{Pr}[s]$.
   b) $\mathbf{Pr}[s \vee t] = \mathbf{Pr}[s] + \mathbf{Pr}[t]$.
   c) $\mathbf{Pr}[r \vee \sim r] = \mathbf{Pr}[r] + \mathbf{Pr}[\sim r]$.
   d) $\mathbf{Pr}[r \vee t] = \mathbf{Pr}[r] + \mathbf{Pr}[t]$.

10. Welche der folgenden Satzpaare (siehe Übung 8) sind widersprüchlich? (Rufen Sie sich ins Gedächtnis zurück, daß zwei Sätze dann widersprüchlich sind, wenn ihre Wahrheitsklassen kein gemeinsames Element haben.)
    a) *r*, *s*. c) *r*, $\sim r$.
    b) *s*, *t*. d) *r*, *t*. [Lös.: b) und c).]

11. Nennen Sie ein Theorem, auf das Übung 9 und 10 hinweisen.

2. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsmaßzahlen

Ehe wir auf spezielle Wahrscheinlichkeitsmaßzahlen eingehen, wollen wir einige allgemeine Eigenschaften solcher Wahrscheinlichkeitsmaßzahlen betrachten, die sich als nützlich bei Rechnungen und für das allgemeine Verständnis der Wahrscheinlichkeitstheorie erweisen.

Drei grundlegende Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsmaßzahl sind:

A) $m(X) = 0$ genau dann, wenn $X = \mathscr{E}$.

B) $0 \leqq m(X) \leqq 1$ für jede Klasse X.

C) Für zwei Klassen X und Y ist

$$m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$$

genau dann, wenn X und Y unvereinbar (durchschnittsleer) sind, d. h. wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben.

Die Beweise für die Eigenschaften A) und B) sollen als Übungen durchgeführt werden (siehe Übung 16). Wir wollen hier nur C) beweisen.

Wir stellen zunächst fest, daß $m(X) + m(Y)$ die Summe der Gewichte und Elemente in X addiert zu der Summe der Gewichte der Elemente in Y ist. Wenn X und Y unvereinbar sind, so wird das Gewicht jedes Elementes von $X \cup Y$ einmal addiert, und wir erhalten $m(X) + m(Y) = m(X \cup Y)$.

Nehmen Sie nun an, X und Y seien nicht unvereinbar. In diesem Fall sind die Gewichte all der Elemente, die sowohl in X als auch in Y, d. h. also in $X \cap Y$ enthalten sind, zweimal in der Summe $m(X)$ und $m(Y)$ enthalten. Diese Summe ist also dann um den Betrag $m(X \cap Y)$ größer als $m(X \cap Y)$. Gemäß A) und B) ist dann $m(X \cap Y) > 0$, wenn $X \cap Y$ keine leere Klasse ist. Wir haben daher in diesem Fall $m(X) + m(Y) > m(X \cup Y)$. Die Eigenschaft C ist dann nicht vorhanden, wenn X und Y nicht unvereinbar sind. Unser Beweis zeigt, daß ganz allgemein für zwei Klassen X und Y gilt

$$\text{C')} \quad m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y).$$

Da wir die Wahrscheinlichkeit der Aussagen direkt aus der Wahrscheinlichkeitsmaßzahl $m(X)$ errechnen, kann jede Eigenschaft von $m(X)$ in eine Eigenschaft der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Aussagen übersetzt werden. So erhalten wir z. B., wenn wir die obigen Eigenschaften auf Aussagen anwenden:

a) $\mathbf{Pr}[p] = 0$ genau dann, wenn p logisch falsch ist.

b) $0 \leqq \mathbf{Pr}[p] \leqq 1$ für jede Aussage p.

c) Die Eigenschaft

$$\mathbf{Pr}[p \vee q] = \mathbf{Pr}[p] + \mathbf{Pr}[q]$$

gilt genau dann, wenn p und q sich widersprechen.

c') Für zwei Aussagen p und q gilt

$$\mathbf{Pr}[p \vee q] = \mathbf{Pr}[p] + \mathbf{Pr}[q] - \mathbf{Pr}[p \wedge q].$$

Eine andere Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsmaßzahl, die oft bei Rechnung wertvoll ist, lautet

D) $$m(\tilde{X}) = 1 - m(X)$$

oder, angewandt auf Aussagen,

d)' $$\mathbf{Pr}[\sim p] = 1 - \mathbf{Pr}[p].$$

Die Beweise für D) und d) werden ebenfalls als Übungen durchgeführt werden (siehe Übung 17).

Es ist wichtig zu beachten, daß unsere Wahrscheinlichkeitsmaßzahl nur bei logisch falschen Sätzen, genauer bei Sätzen, die für jede logische Möglichkeit falsch sind, 0 ist. Eine Voraussage dahingehend, daß ein solcher Satz wahr sein wird, ist daher sicherlich falsch. Entsprechend wird dann einem Satz nur dann eine Wahrscheinlichkeit von 1 zugeordnet, wenn er in allen Fällen wahr, genauer logisch wahr ist. Die Voraussage, daß eine solche Behauptung wahr sein wird, ist daher sicherlich richtig. (Obwohl die genannten Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsmaßzahlen ziemlich natürlich erscheinen, müssen sie bei ihrer Anwendung auf unendliche Möglichkeitsklassen leicht abgeschwächt werden. Da wir in diesem Buch jedoch nur endliche Möglichkeitsklassen betrachten, sollen diese Fälle nicht in Erwägung gezogen werden.)

Wir wollen nun die von 0 oder 1 verschiedenen Wahrscheinlichkeiten betrachten. Dazu wollen wir jedoch nur einige intuitive Vorstellungen vermitteln, die man gewöhnlich von Wahrscheinlichkeiten hat. Obwohl diese Vorstellungen mathematisch präziser gefaßt werden können, wollen wir sie hier lediglich als einen Leitfaden für ein intuitives Denken verwenden.

Nehmen Sie an, einem Satz sei bezüglich eines gegebenen Versuches eine Wahrscheinlichkeit p zugeordnet worden. Man verdeutlicht sich dies gewöhnlich dadurch, daß man sich vorstellt, eine Anzahl der Versuche sei unter identischen Bedingungen mehrmals ausgeführt worden. Der Anteil der Versuche, die durch ihr Ergebnis die Aussage wahrmachen würde, wäre dann ungefähr p. Die mathematische Fassung dieser Vorstellung ist das „Gesetz der großen Zahl" der Wahrscheinlichkeitstheorie (das wir in Abschnitt 9 behandeln werden). In all den Fällen, in denen es keinen natürlichen Weg gibt, eine Wahrscheinlichkeitsmaßzahl exakt zuzuordnen, wird die Wahrscheinlichkeit einer Aussage experimentell geschätzt: Man führt eine Reihe von Versuchen durch und nimmt als ungefähre Wahrscheinlichkeit der Aussage den Anteil der Versuche, bei dem die Behauptung wahr ist.

Eine zweite Interpretation der Wahrscheinlichkeiten bezieht sich auf das Wetten. Nehmen Sie an, einer bestimmten Aussage sei die Wahrscheinlichkeit p zugeordnet worden. Wir wollen wetten, daß sich die Aussage als wahr herausstellt. Wenn wir s Mark bekommen, falls die Aussage wahr ist, bieten wir an, r Mark zu zahlen, wenn sich die Aussage als unwahr herausstellt. Wie groß müssen r und s sein, wenn die Wette als fair gelten soll? Wenn es wahr wäre, daß wir bei einer großen Anzahl solcher Wetten bei einem Anteil p s Mark gewinnen und bei einem Anteil $(1-p)$ r Mark verlieren würden, dann wäre unser durchschnittlicher Gewinn pro Wette $sp-r(1-p)$. Um die Wette fair zu gestalten, sollten wir diesen durchschnittlichen Gewinn 0 werden lassen. Dies wäre dann der Fall, wenn $sp = r(1-p)$ oder wenn $r/s = p/(1-p)$. Beachten Sie, daß dies lediglich das Verhältnis von r zu s bestimmt. Ein solches Verhältnis, geschrieben als $r:s$, wird gewöhnlich als Wettchance bezeichnet.

Beispiel. Nehmen Sie an, eine Wahrscheinlichkeit von 3/4 sei dem Gewinn eines bestimmten Pferdes in einem Rennen zugeordnet worden. Die Wettchancen für eine faire Wette wären dann 3/4 : 1/4. Diese Wettchancen könnten genausogut als 3 : 1, 6 : 2 oder 12 : 4 geschrieben werden. Die Wette wäre dann fair, wenn man zustimmte, 3 DM zu zahlen, wenn das Pferd verliert, und eine Mark zu erhalten, wenn das Pferd gewinnt. Eine andere faire Wette wäre: 6 DM zu zahlen, wenn das Pferd verliert, und 2 DM zu gewinnen, wenn das Pferd gewinnt.

ÜBUNGEN

1. p und q seien zwei Sätze. $\mathbf{Pr}[p \wedge q] = 1/4$, $\mathbf{Pr}[\sim p] = 1/3$ und $\mathbf{Pr}[q] = 1/2$. Wie groß ist dann $\mathbf{Pr}[p \wedge q]$? [Lös.: 11/12.]

2. Nennen Sie, unter Verwendung des Ergebnisses der Übung 1, den Wert für $\mathbf{Pr}[\sim p \wedge \sim q]$.
3. Es sei $\mathbf{Pr}[p] = 1/2$ und $\mathbf{Pr}[q] = 2/3$. Sind die Aussagen p und q dann nicht unvereinbar? [Lös.: Ja.]
4. Zeigen Sie, daß p und q nicht unvereinbar sind, wenn $\mathbf{Pr}[p] + \mathbf{Pr}[q] > 1$ ist.
5. Die Gesellschaft A habe Angebote für zwei Projekte abgegeben. Der Controller dieser Gesellschaft erwarte mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 den ersten Auftrag zu bekommen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 wenigstens einen zu bekommen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 keinen der Aufträge zu erhalten. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die Firma den zweiten Auftrag erhält?
6. Ein Automobilhändler glaube, daß er innerhalb der nächsten Woche mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 wenigstens vier Wagen verkaufen wird und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 weniger als sieben Wagen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verkauft er vier, fünf oder sechs Wagen? [Lös.: 0,5.]
7. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann beim Wurf eines Würfels eine Sechs erwartet werden?
8. Auf welchen Wettchancen sollte sich im Beispiel des Abschnittes 1 der Verkaufsdirektor der Gesellschaft A bei einer Wette darüber einlassen, ob A oder B den Auftrag bekommen wird?
9. Beweisen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Satz wahr ist, $r/(r + s)$ beträgt, wenn die Wettchancen für die gegebene Aussage mit $r : s$ angegeben werden.
10. Zeigen Sie, unter Benutzung des Ergebnisses der Übung 9 und der Definition von „Wettchancen", daß die Wettchancen dafür, daß der Satz wahr ist, dann $r : s$ sind, wenn sie dafür, daß er falsch ist, $s : r$ sind.
11. Ein Mann sei gewillt, 5 : 4 dafür zu wetten, daß die Mannschaft D die Weltmeisterschaften gewinnt. Wie hoch muß die Wahrscheinlichkeit eines Sieges der Mannschaft sein, wenn dies eine faire Wette sein soll? [Lös.: 5/9.]
12. Auf Grund langer Erfahrung habe man herausgefunden, daß 85% der Teile, die eine bestimmte Maschine herstellt, gut sind. Wie hoch sind die Wettchancen dafür, daß das nächste produzierte Stück gut ist?
13. Ein Mann wette 1 : 3, daß A eintreten wird, und 1 : 2, daß B eintreten wird. Er wisse, daß nicht A und B gleichzeitig eintreten können. Welche Chancen bestehen dafür, daß A oder B geschehen wird?
14. Ein Mann wette 3 : 1, daß A geschieht, und 2 : 1, daß B geschieht. Er wisse, daß A und B nicht gleichzeitig geschehen kann. Welche Chancen bestehen dafür, daß A oder B geschieht?
15. Zeigen Sie auf Grund der Definition der Wahrscheinlichkeitsmaßzahl, daß dann und nur dann $m(X) = 1$, wenn $X = U$.
16. Zeigen Sie auf Grund der Definition der Wahrscheinlichkeitsmaßzahl, daß die Eigenschaften A) und B) des Textes wahr sind.
17. Beweisen Sie die im Text genannte Eigenschaft D). Warum folgt aus dieser Eigenschaft die Eigenschaft d)?
18. Beweisen Sie, daß

$$m(R \cup S \cup T) = m(R) + m(S) + m(T),$$

wenn R, S und T drei Klassen sind, die kein gegenseitig gemeinsames Element enthalten.

19. Beweisen Sie, daß $m(X) \leqq m(Y)$, wenn X eine Unterklasse von Y ist.

20. Nehmen Sie an, Ihnen seien n Sätze gegeben, denen allen die Wahrscheinlichkeit r zugeordnet worden ist. Beweisen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit der Disjunktion dieser Sätze kleiner oder gleich nr ist.

21. Beweisen Sie, daß $\mathbf{Pr}[p] < \mathbf{Pr}[q]$, wenn die beiden Sätze p und $q \mid p$ und q implizieren.

22. Das Folgende stellt einen alternativen Beweis der Eigenschaft C') des Textes dar. Begründen Sie jeden der Schritte.
    a) $X \cup Y = (X \cap \tilde{Y}) \cup (X \cap Y) \cup (\tilde{X} \cap Y)$.
    b) $\mathbf{m}(X \cup Y) = \mathbf{m}(X \cap \tilde{Y}) + \mathbf{m}(X \cap Y) + \mathbf{m}(\tilde{X} \cap Y)$.
    c) $\mathbf{m}(X \cup Y) = \mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y) - \mathbf{m}(X \cap Y)$.

23. Beweisen Sie, daß für jede Wahrscheinlichkeitsmaßzahl

$$\mathbf{m}(X \cup Y \cup Z) = \mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y) + \mathbf{m}(Z) - \mathbf{m}(X \cap Y) - \mathbf{m}(Y \cap Z) - \mathbf{m}(X \cap Z) + \mathbf{m}(X \cap Y \cap Z)$$

    ist, wenn X, Y und Z drei beliebige Klassen darstellen.

24. Übertragen Sie das Ergebnis der Übung 23 auf drei Sätze p, q und r.

25. Beweisen Sie, daß für zwei Sätze p und q das Folgende gilt:
    a) $\mathbf{Pr}[p \wedge q] = \mathbf{Pr}[q \wedge p]$.
    b) $\mathbf{Pr}[p \wedge q] + \mathbf{Pr}[p \wedge \sim q] = \mathbf{Pr}[p]$.
    c) $\mathbf{Pr}[p \wedge q] + \mathbf{Pr}[\sim p \wedge q] = \mathbf{Pr}[q]$.

3. Die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit

Wir sind bereits auf verschiedene Beispiele gestoßen, bei denen es natürlich erschien, allen Möglichkeiten bei der Bestimmung ihrer Wahrscheinlichkeiten das gleiche Gewicht zuzuordnen. Die auf diese Weise bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaßzahl wird als die *Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit* bezeichnet. Die Maßzahl von Klassen hat im Falle der Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit eine sehr einfache Form: Ist in einer Klasse U mit n Elementen die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit zugeordnet worden, dann ist für jede Klasse X, $m(X) = r/n$, wobei r die Anzahl der Elemente der Klasse X angibt. Dies ist darauf zurückzuführen, daß jedem Element der Klasse X das Gewicht $1/n$ zugeordnet ist und daher die Summe der Gewichte der Elemente in Klasse X gerade r/n ist.

Durch die besonders einfache Form der Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeiten läßt es sich leicht damit arbeiten. Deshalb ist es wichtig, darauf zu achten, daß man durch eine bestimmte Wahl der Klasse der Möglichkeiten einer gegebenen Situation zu einer Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeiten kommen kann. Dies mag bei einer anderen Wahl vielleicht nicht der Fall sein. Betrachten Sie z. B. den Fall des Werfens einer gewöhnlichen Münze:

Nehmen Sie an, wir seien an Aussagen über die Anzahl der geworfenen Wappen interessiert. Wählen wir als Klasse der Möglichkeiten die Klasse $U = \{WW, ZW, WZ, ZZ\}$, so ist es vernünftig, jedem Ergebnis das gleiche Gewicht zuzuordnen, was zu der Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeiten führt. Wählen wir jedoch als mögliche Ergebnisse die Klasse $U = \{$Kein W, ein W, zwei W$\}$, so wäre es durchaus nicht natürlich, jedem Ergebnis das gleiche Gewicht zuzuordnen, da der Fall „ein W" auf zwei verschiedenen Wegen erreicht werden kann, während jede der anderen Möglichkeiten nur auf einem Weg zu erreichen ist.

Oft wird der Begriff „zufällig" mit der Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeiten in Zusammenhang gebracht. Genau genommen, kann einer Klasse, der eine der Möglichkeiten „zufällig" entnommen wird, jede Wahrscheinlichkeitsmaßzahl zugeordnet worden sein. Wird jedoch nichts anderes gesagt, so bedeutet gewöhnlich ein „zufälliges" Entnehmen aus einer Klasse von Möglichkeiten, daß der Klasse eine Maßzahl für eine Gleichwahrscheinlichkeit zugeordnet worden ist. Wurde z. B. aus den Ziffern von 1 bis 100 eine Ziffer „zufällig" entnommen, so setzen wir voraus, daß die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeiten dieser Klasse zugeordnet worden war, d. h. daß die Wahrscheinlichkeit, irgendeine Ziffer — sagen wir 29 — auszuwählen, 0,01 ist.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, wir würfelten mit zwei normalen Würfeln. Jeder der Würfel kann eine Zahl zwischen 1 und 6 ergeben. Es gibt also 6×6 Möglichkeiten. Wir ordnen jeder Möglichkeit das Gewicht 1/36 zu. Eine Voraussage, die in j Fällen wahr ist, wird dann die Wahrscheinlichkeit $j/36$ haben. „Die Summe der Augen ist 5" wäre z. B. wahr, wenn wir $1 + 4$, $2 + 3$, $3 + 2$ oder $4 + 1$ erhielten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe der gezeigten Augen 5 ist, ist also $4/36 = 1/9$. Die Summe 12 entsteht nur auf eine bestimmte Weise. Daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir 12 Augen erhalten, 1/36.

Beispiel 2. Ein Fertigungslos enthalte 80 gute und 20 fehlerhafte Stücke. Eine aus zwei Stücken bestehende Stichprobe werde dem Los „zufällig" entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Stücke fehlerhaft? Für das erste Stück gibt es 100 Möglichkeiten, und für jede dieser Möglichkeiten gibt es 99 weitere Kombinationsmöglichkeiten mit dem zweiten. Für eine entnommene Stichprobe, die aus zwei Stücken besteht, gibt es also $100 \cdot 99$ Möglichkeiten. Ordnen wir der Klasse ihre Maßzahl für Gleichwahrscheinlichkeit zu! Der Satz „Beide Stücke sind fehlerhaft" ist in $20 \cdot 19$ der $100 \cdot 99$ Möglichkeiten wahr. Die Wahrscheinlichkeit des Satzes ist also $20 \cdot 19/100 \cdot 99$ oder 0,0384.

Beispiel 3. Nehmen Sie an, daß bei der Einstellung dreier Vertreter A, B und C auf Grund bestimmter Maßzahlen vorausgesagt werde, daß nach einem Jahr die Verkäufe von A am höchsten, von C am zweithöchsten und die von B am niedrigsten sein werden. Nehmen Sie ferner an, daß sich diese Voraussagen als genau stimmend herausstellen. Wir wollen nun annehmen, die Maßzahlen hätten keinerlei Voraussagewert, d. h. die Schätzung wurde rein zufällig durchgeführt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dann dafür, daß die Voraussage richtig sein wird?

Es gibt $3! = 6$ Reihenfolgen, in denen sich die Verkäufer am Ende des Jahres befinden können. Wären die Voraussagen wirklich zufällig gewesen, so würden wir jedem der sechs Ergebnisse ein gleiches Gewicht zuordnen. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bestimmte Aussage wahr ist, 1/6. Da die Wahrscheinlichkeit verhältnismäßig groß ist, daß das richtige Ergebnis zufällig getroffen wird, würden wir mit der Anerkennung der Nützlichkeit der Maßzahlen für eine Voraussage lediglich auf Grund dieses einen Versuches zögern. Nehmen Sie jedoch auf der anderen Seite an, daß die Reihenfolge von sechs Personen richtig vorausgesagt würde. Eine ähnliche Analyse würde dann zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine auf reinem Raten beruhende Voraussage wahr ist, $1/6! = 1/720$ beträgt. Wir könnten daher schließen, daß der Gebrauch von Maßzahlen für eine Voraussage von Nutzen ist.

ÜBUNGEN

1. Ein Buchstabe werde zufällig aus dem Wort „random" ausgewählt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß es ein n ist? Welche dafür, daß es ein Vokal ist? [Lös.: 1/6; 1/3.]

2. Eine ganze Zahl zwischen 3 und 12 einschließlich werde zufällig bezeichnet. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß es eine gerade Zahl ist? Daß es eine gerade und durch drei teilbare Zahl ist?

3. Eine Karte werde zufällig aus einem Stoß Spielkarten gezogen.
   a) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß es entweder eine Herzkarte oder ein Kreuzkönig ist? [Lös.: 7/26.]
   b) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß es entweder die Herzdame oder eine der fünf höchsten Trumpfkarten ist (d. h. Zehn, Bube, Dame, König oder As)? [Lös.: 5/13.]

4. Aus der Klasse $U = \{$Mann, Bogen, Ball, Felder und Buch$\}$ werde ein Wort zufällig ausgewählt. p, q und r seien die Sätze:

   p: das Wort hat zwei Vokale.

   q: der erste Buchstabe des Wortes ist „B".

   r: das Wort reimt sich auf „Tuch".

   Geben Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Sätze an:

   a) p.
   b) q.
   c) r.
   d) $p \wedge q$.
   e) $(p \vee q) \wedge \sim r$.
   f) $p \rightarrow q$. [Lös.: f) 4/5.]

5. Ein einfacher Würfel werde geworfen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß
   a) eine ungerade Zahl geworfen wird.
   b) die geworfene Zahl größer als 2 ist.
   c) eine 7 geworfen wird.

6. Nehmen Sie an, daß in dem die Marktführer betreffenden Beispiel des Kapitels 2, Abschnitt 1, alle 36 Möglichkeiten in den vier Gebieten gleichwahrscheinlich sind. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß
   a) die Gesellschaft A Führer in mehr Gebieten ist als jeder ihrer Konkurrenten [Lös.: 7/18.]
   b) daß die gleiche Gesellschaft Führer in allen Gebieten ist. [Lös.: 1/36.]
   c) daß jedes Gebiet einen anderen Führer hat. [Lös.: 0.]

7. Ein einfacher Würfel werde zweimal geworfen. Welcher Wert ist für die Summe der beiden Ergebnisse am wahrscheinlichsten? Welcher Wert oder welche Werte der Summe haben die geringste Wahrscheinlichkeit?

8. Im Dezember 1960 verfügte die E. I. duPont de Nemours über 210840 Aktionäre und General Motors über 830873. Nehmen Sie an, daß es 50000 Aktionäre gab, die sowohl Aktien der einen als auch der anderen Gesellschaft besaßen. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß eine zufällig aus der Liste der duPont-Aktionäre ausgewählte Person auch Aktionär von General Motors ist? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Aktionär von General Motors kein Aktionär der duPont-Gesellschaft?

9. Ein Produkt könne bis zu drei Fehler enthalten: Ungenügende Elastizität, einen Kratzer oder Maßabweichungen. Es sei bekannt, daß in einem Los von 1000 Stück

   120 Stück Elastizitätsfehler aufweisen
   80 Stück einen Kratzer haben
   60 Stück Maßabweichungen zeigen
   22 Stück Elastizitätsfehler und Kratzer haben
   16 Stück Elastizitätsfehler und Maßabweichungen aufweisen
   8 Stück alle drei Fahler enthalten.

   Dem eben genannten Los werde ein Stück zufällig entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

   a) ist es in Ordnung? [Lös.: 0,79.]
   b) weist es zwei Fehler auf? [Lös.: 0,034.]

10. Die Teile A, B, C, D, E und F seien nacheinander auf einer Maschine herzustellen. Alle Permutationen seien gleichwahrscheinlich. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dann dafür, daß

    a) die Permutation D, B, F, A, E, C auftritt?
    b) daß Teil A direkt vor Teil B kommt?
    c) daß Teil D entweder direkt dem Teil F folgt oder von F gefolgt wird?

11. Beantworten Sie die Fragen a), b) und c) der Übung 10 unter der Voraussetzung, daß auf Teil A entweder Teil B oder C direkt folgen muß und daß alle erlaubten Permutationen gleichwahrscheinlich sind.

12. Ein Los bestehe aus 20 Stück, von denen 14 gut und 6 fehlerhaft sind. Die Maßzahl ihrer Gleichwahrscheinlichkeit werde allen möglichen Stichproben einer gegebenen Größe zugeordnet. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dann dafür, eine Stichprobe von fünf Stück zu erhalten, in der

    a) keine fehlerhaften Teile enthalten sind? [Lös.: 0,129.]
    b) ein fehlerhaftes Stück enthalten ist?
    c) zwei fehlerhafte Teile?
    d) drei fehlerhafte Teile? [Lös.: 0,117.]
    e) vier fehlerhafte Teile?
    f) fünf fehlerhafte Teile?
    g) drei oder mehr fehlerhafte Teile?
    h) weniger als zwei fehlerhafte Teile?
    i) zwischen zwei und vier (inkl.) fehlerhafte Teile?
    j) weniger als sechs fehlerhafte Teile?
    k) zwei gute Stücke?
    l) zwischen einem und drei (inkl.) gute Stücke enthalten sind? [Lös.: 0,483.]

13. In einem Raum befinde sich eine Gruppe von n Personen, die von 1 bis n numerierte Abzeichen tragen. Es werden zwei Personen zufällig ausgewählt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die größere der Abzeichennummern 3 ist? Lösen Sie dieses Problem unter der Annahme, daß $n = 5, 4, 3, 2$ ist.
[Lös.: 1/5, 1/3, 2/3, 0.]

14. Nehmen Sie an, daß wir in der in Übung 13 geschilderten Situation sehen, wie zwei Personen den Raum verlassen, von denen diejenige, die die höhere Abzeichennummer trägt, eine 3 anstecken hat. Auf wieviel Personen mögen wir die im Raum verbleibenden schätzen?

15. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein Bridge-Spieler Kartenfolgen von
a) 5, 4, 3 und 1 Karten $\left[\text{Lös.: } \frac{4!(13/5)(13/4)(13/3)(13/1)}{(52/13)} \cong 0{,}129.\right]$
b) 6, 4, 2 und 1 Karten [Lös.: 0,047.]
c) 4, 4, 3 und 2 Karten [Lös.: 0,216.]
d) 4, 3, 3 und 3 Karten in der Hand hat. [Lös.: 0,105.]

16. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der folgenden Pokerkarten: (Eine „Pokerkarte" besteht aus fünf zufällig aus einem Stoß von 52 Karten ausgewählten Spielkarten.)
a) Royal flush (Zehn, Bube, Dame, König und As einer Farbe).
$\left[\text{Lös.: } 4\Big/\binom{52}{5} = 0{,}0000015.\right]$
b) Straight flush (fünf folgende Karten einer Farbe, jedoch kein Royal flush).
$\left[\text{Lös.: } (40-4)\Big/\binom{52}{5} = 0{,}000014.\right]$
c) Vierer-pasch (vier Karten gleichen Wertes). $\left[\text{Lös.: } 624\Big/\binom{52}{5} = 0{,}00024.\right]$
d) Full house (ein Dreier-pasch und ein Zweier-pasch gleichen Wertes).
$\left[\text{Lös.: } 3744\Big/\binom{52}{5} = 0{,}0014.\right]$
e) Flush (fünf Karten einer Farbe, jedoch kein Straight oder Royal flush).
$\left[\text{Lös.: } (5148-40)\Big/\binom{52}{5} = 0{,}0020.\right]$
f) Straight (fünf Karten in einer Wertfolge, aber nicht von einer Farbe).
$\left[\text{Lös.: } (10{,}240-40)\Big/\binom{52}{5} = 0{,}039.\right]$
g) Straight oder besser. [Lös.: 0,0076.]

4. Wahrscheinlichkeit einer aus einer zweiwertigen Klasse entnommenen Stichprobe

In Kapitel 3, Abschnitt 6, besprachen wir, auf wie viele Weisen wir aus einer Klasse U mit $n(U) = N$ Elementen eine Aufspaltung mit $n(S) = n$ Elementen bilden können. Hierbei sollte die Zelle $A \cap S$ $n(A \cap S) = r$ Elemente enthalten, und es sollte $n(A) = R$ sein. Wir interpretierten dieses

Problem damals wie folgt: U war eine endliche Klasse, S eine deren Unterklassen, die wir eine Stichprobe nannten, und $[A, \tilde{A}]$ betrachteten wir als eine zweizellige Aufspaltung von U. So könnte z. B. U eine Sendung eines bestimmten Gutes, S eine Stichprobe daraus und A die Unterklasse von U sein, die aus den fehlerhaften Stücken besteht.

Anstatt nun die *Anzahl der Wege zu zählen*, auf denen wir eine Stichprobe gegebener Größe mit einer bestimmten Anzahl fehlerhafter Teile erhalten können, wollen wir in diesem Abschnitt zeigen, wie man die *Wahrscheinlichkeit* für das Erreichen einer bestimmten Stichprobe *errechnen kann*. Zu diesem Zweck ordnen wir der Klasse der $[S, \tilde{S}]$ Aufspaltungen die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit zu.

Rufen Sie sich bitte ins Gedächtnis zurück, daß es $\binom{N}{n}$ Wege gibt, auf denen die Aufspaltung $[S, \tilde{S}]$ gebildet werden kann, so daß $n(S) = n$ und $n(\tilde{S}) = N - n$ ist. Irgendeine bestimmte Aufspaltung wird dann also mit der Wahrscheinlichkeit $1 \Big/ \binom{N}{n}$ erreicht. Ist nun

$$U = \{d_1, d_2, d_3, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7\},$$

so hat die Aufspaltung

$$[S, \tilde{S}] = \{d_1, g_2, g_6 \mid d_2, d_3, g_1, g_3, g_4, g_5, g_7\}$$

die Wahrscheinlichkeit $1 \Big/ \binom{10}{3} = \frac{1}{120}$.

Uns interessiert jedoch nicht die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Aufspaltung, sondern die Wahrscheinlichkeit einer Aufspaltung mit einer bestimmten Anzahl fehlerhafter Stücke. Aus Abschnitt 6 des Kapitels 3 ersehen wir, daß es $\binom{R}{r} \cdot \binom{n-R}{n-r}$ Aufspaltungen gibt, die genau r fehlerhafte Stücke in der ersten Zelle enthalten. Enthält nun eine Klasse N Elemente, von denen R Stücke fehlerhaft sind, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine aus n Elementen bestehende Stichprobe zu ziehen, die genau r fehlerhafte Stücke enthält:

$$\mathbf{h}(r; n, R, N) = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}. \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer aus drei Stücken bestehenden Stichprobe genau ein fehlerhaftes Stück zu finden, ist also in unserem Beispiel

$$\mathbf{h}(1; 3, 3, 10) = \frac{\binom{3}{1}\binom{10-3}{3-1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3 \cdot 21}{120} = \frac{21}{40}.$$

Eine durch die Formel (1) gegebene Wahrscheinlichkeit wird *hypergeometrische* Wahrscheinlichkeit genannt.

Wie bei der Diskussion in Kapitel 3, Abschnitt 6 gelten auch hier für die Variablen die durch die Ungleichung (1) dieses Abschnittes gegebenen Einschränkungen.

Obwohl sich hypergeometrische Wahrscheinlichkeiten oft bei Stichprobenentnahmen anwenden lassen, ist es häufig außerordentlich langwierig, die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Dies besonders dann, wenn N sehr groß ist, n und R im Vergleich zu N weder sehr groß noch sehr klein sind und r im Vergleich zu n und R weder sehr groß noch sehr klein ist. Hiervon kann sich der Leser sehr leicht selbst überzeugen, indem er versucht, dies z. B. für h (200; 500; 500; 1000) durchzuführen. Unter diesen Umständen stellen sich Näherungen als sehr nützlich heraus, und wir werden noch in diesem Kapitel zeigen, wie man Näherungen für hypergeometrische Wahrscheinlichkeiten finden kann.

ÜBUNGEN

1. In den Übungen 3 und 4 in Kapitel 3, Abrchnitt 6, werde allen aus fünf Personen bestehenden Unterausschüssen die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit zugeordnet. Bestimmen Sie unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß den Unterausschüssen ein, zwei, drei, vier oder fünf Gewerkschaftsmitglieder angehören.

2. Welche Wahrscheinlichkeit besteht in Übung 7 des dritten Kapitels in Abschnitt 6 dafür, daß eine aus zwei Stück bestehende Stichprobe ein gutes und ein fehlerhaftes Stück enthält? [Lös.: 0,6.]

3. Zeigen Sie, daß die Verhältnisse, die Sie in Kapitel 3, Abschnitt 6, Übung 12 errechnen sollen, hypergeometrische Wahrscheinlichkeiten sind.

4. Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Übung 12 des Abschnittes 3 unter Benutzung der Formel (1).

5. Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{h}(r+1; n, R, N) = \frac{(R-r)(n-r)}{(r+1)(N-R-n+r+1)}\,\mathbf{h}(r; n, R, N).$$

Zeigen Sie, daß für $\geqq N - R$

$$\mathbf{h}(0; n, R, N) = \frac{(N-R)!\,(N-n)!}{(N-R-n)!\,N!}$$

Für $n \geqq R$ jedoch

$$\mathbf{h}(n; n, R, N) = \frac{R!\,(N-n)!}{(R-n)!\,N!}$$

ist.

Benutzen Sie diese Zusammenhänge, um in den Übungen 1 b und 1 d des Kapitels 3, Abschnitt 6 die Wahrscheinlichkeit jedes möglichen Wertes von r zu errechnen.

6. In einer Gemeinde wurde eine bestimmte Ausgabe einer Zeitschrift von 25% aller Haushalte gekauft. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß man in einer aus 10 Haushalten gebildeten Stichprobe genau zwei Haushalte findet, in denen die Zeitschrift gekauft wurde, wenn die Gemeinde aus 20 Haushalten bestand? [Lös.: 0,348.]

7. Von 10 abgeschossenen interkontinentalen, ballistischen Raketen gehen gewöhnlich 5 fehl. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß wenigstens eine Rakete einer auf ein Ziel abgefeuerten Salve ein Treffer ist, wenn a) $n = 1$?, b) $n = 2$?, c) $n = 3$?, d) $n = 4$?, e) $n = 5$?, f) $n > 5$?
(Hinweis: Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Fehlschlagen aller Raketen und subtrahieren Sie diese von 1.) [Lös. c) 0,917.]

8. Zeigen Sie, daß es bezüglich Abb. 7, Kapitel 3, Abschnitt 6 $\binom{N}{R}$ Möglichkeiten gibt, U in $[A, \tilde{A}]$ aufzuspalten, $\binom{n}{r}$ Wege, um S aufzuspalten und $\binom{N-n}{R-r}$ Wege, um $\tilde{S}$ aufzuspalten. Nehmen Sie an, daß alle Aufspaltungen von U gleichwahrscheinlich sind, und leiten Sie von dieser Tatsache eine alternative Formel für die hypergeometrischen Wahrscheinlichkeiten ab. Schreiben Sie diese Formel und die Formel (1) dieses Abschnittes in der Form von Produkten, und zeigen Sie, daß sie algebraisch äquivalent sind.

5*. Zwei — nicht mit dem gesunden Menschverstand — lösbare Beispiele

Es gibt durchaus Situationen, in denen sich die auf Grund der Wahrscheinlichkeitsberechnung gefundene Problemlösung nicht in Übereinstimmung mit der gefühlsmäßig gefundenen befindet. Gewöhnlich ist es dann jedoch möglich, das Problem in Form einiger Wetten so darzustellen, daß sich die gefühlsmäßige Lösung mit der mathematischen in Einklang bringen läßt. Ein besonders gutes Beispiel dafür ist das des Zusammentreffens von Geburtstagen.

Nehmen Sie an, in einem Raum befänden sich r Personen. Wir wollen nun wetten, daß wenigstens zwei der im Raum befindlichen Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. Wir suchen den Wert für r, der dies eine faire Wette werden läßt. Nur wenige Personen würden auf diese Wette eingehen, wenn nicht wenigstens 100 Personen im Raum versammelt sind. Die meisten würden vielleicht 150 als eine vernünftige Anzahl vorschlagen. Wir werden jedoch sehen, daß bei 150 Personen die Wettchancen 4500000000000000 : 1 zugunsten derjenigen stehen, die behaupten, daß zwei Personen mit dem gleichen Geburtstag anwesend seien und daß man bereits bei 23 Anwesenden ungefähr gleiche Chancen des Verlierens und des Gewinnens hat.

Wir wollen zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür suchen, daß sich in einem Raum mit r Personen keine zwei befinden, die den gleichen Geburtstag haben. Für den Geburtstag jeder der Personen gibt es 365 Möglichkeiten (wenn man den 29. Februar vernachlässigt). Es gibt dann also 365^r Möglichkeiten für die Geburtstage von r Personen. Wir setzen voraus, daß alle diese Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, daß nicht zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, müssen wir die Anzahl der Möglichkeiten bestimmen, bei der kein Tag

zweimal vorkommt. Die erste Person mag dabei an jedem der 365 Tage Geburtstag haben. Für die zweite Person bleiben dann nur noch 364 Möglichkeiten übrig. Für die dritte Person nur 363 usw. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keine zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, ist also für eine Gruppe von r Personen

$$q_r = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - r + 1)}{365^r} .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, ist also $p_r = 1 - q_r$. Abb. 1 gibt die Werte für p_r und die Wettchancen $p_r : (1 - p_r)$ für verschiedene Werte von r.

Anzahl der im Raum befindlichen Personen	Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben	Ungefähre Wettchancen
5	0,027	
10	0,117	
15	0,253	
20	0,411	70:100
21	0,444	80:100
22	0,476	91:100
23	0,507	103:100
24	0,538	117:100
25	0,569	132:100
30	0,706	242:100
40	0,891	819:100
50	0,970	33:1
60	0,994	169:1
70		1,200:1
80		12,000:1
90		160,000:1
100		3,300,000:1
125		31,000,000,000:1
150		4,500,000,000,000,000:1

Abb. 1

Wir wollen nun ein zweites Problem betrachten, bei dem die Intuition auch nicht zur richtigen Antwort führt: Wir haben gesehen, daß es $n!$ Permutationen der Zahlen 1 bis n gibt. Wir wollen eine neue Anordnung dieser Zahlen so ansehen, als ob jede der Zahlen in eins von n Kästchen oder Positionen (wobei jede Zahl eine Position einnimmt) geschrieben werde. Die Positionen sollen der Reihe nach numeriert sein. Wir werden die i-te Zahl dann als durch die Permutation unverändert bezeichnen, wenn die Zahl i nach der Neuanordnung sich noch in der i-ten Position befindet. Betrachten wir z. B. die Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, so läßt die Permutation 123

alle Zahlen unberührt, die Permutation 213 eine Zahl unberührt und die Permutationen 312 und 231 lassen keine der Zahlen unverändert stehen. Offensichtlich ist es bei diesem Beispiel unmöglich, genau zwei Zahlen unverändert zu lassen. (Warum ?)

Definition: Eine *vollständige Permutation* ist eine Permutation, bei der keine Zahl unverändert bleibt.

Das nun zu betrachtende Problem kann wie folgt dargestellt werden: Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß eine Permutation von n Zahlen, die zufällig durchgeführt wird, eine vollständige Permutation ist ? Ein etwas plastischeres, aber äquivalentes Problem ist das folgende: Eine Garderobiere habe n Hüte angenommen, die aber in der Garderobe verwechselt worden seien. Sie gäbe nun zufällig die Hüte an die vermeintlichen Besitzer zurück. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß keine Person ihren eigenen Hut zurückerhält ? Sollte dieses Problem gefühlsmäßig gelöst werden, so würden wahrscheinlich einige erwarten, daß die Wahrscheinlichkeit bei einer großen Anzahl von Hüten klein ist, während andere erwarten würden, daß sie groß sein sollte. Nur wenige Personen werden annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit im wesentlichen unabhängig von der Zahl der vorhandenen Hüte ist.

Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu finden, nehmen wir an, daß alle $n!$ Permutationen gleichwahrscheinlich sind, und daß wir daher nur die Anzahl der vollständigen Permutationen zu zählen haben, die bei n Elementen auftreten können. Die Anzahl solcher Permutationen sei w_n. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann $p_n = w_n/n!$. Führt man diese Rechnung durch (siehe Übung 14), so ergibt sich als Antwort

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots \pm \frac{1}{n!}$$

Hierbei gelten die Pluszeichen dann, wenn n gerade ist, und die Minuszeichen dann, wenn n ungerade ist. Abb. 2 gibt diese Zahlen für einige Werte von n.

Anzahl der Hüte	Wahrscheinlichkeit p_n daß keiner seinen Hut zurückerhält
2	0,500000
3	0,333333
4	0,375000
5	0,366667
6	0,368056
7	0,367857
8	0,367882

Abb. 2

Es kann gezeigt werden, daß, wenn die Anzahl der Hüte steigt, sich die Wahrscheinlichkeiten der Zahl $1/e = 0{,}367879$ annähern, wobei die Zahl $e = 2{,}718281$ eine Zahl ist, die auf vielen Gebieten der Mathematik eine große Rolle spielt.

ÜBUNGEN

1. Die statistischen Unterlagen weisen darauf hin, daß nicht an allen Tagen gleich viel Geburten zu verzeichnen sind. Danach werden z. B. mehr Menschen im Sommer als im Winter geboren. Wie beeinflußt dies quantitativ die Wahrscheinlichkeiten der Abb. 1 (d. h. werden sie dadurch vergrößert oder verkleinert)?
2. Welcher quantitative Einfluß auf die Wahrscheinlichkeiten der Abb. 1 entsteht, wenn man die Möglichkeit des 29. Februar als Geburtstag auch zuläßt?
3. Ordnen Sie den Geburten aller 12 Monate des Jahres die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit zu, und entwickeln Sie eine der Abb. 1 ähnliche Tabelle, die die Wahrscheinlichkeiten dafür zeigt, daß wenigstens zwei, aus einer Gruppe von r zufällig ausgewählte Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. Führen Sie dies für $r = 1, 2, 3, 4, 5$ durch. Für welche Seite würden Sie sich bei einer gleichwertigen Wette (d. h. bei einer Wette, bei der Sie gleich viel verlieren wie Sie gewinnen können) entscheiden, wenn darum gewettet wird, ob in einem Raum, in dem fünf Personen versammelt sind, sich zwei Personen befinden, die im gleichen Monat Geburtstag haben? Wie würden Sie sich entscheiden, wenn nur vier Personen versammelt wären? Welchen qualitativen Einfluß auf die abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten hat die Tatsache, daß die Monate verschieden lang sind?
4. Vier Männer geben ihre Hüte in einer Garderobe ab. Nehmen Sie an, daß die Hüte zufällig zurückgegeben würden. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß genau vier der Männer ihre eigenen Hüte zurückerhalten? Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau 3, 2, 1 und 0 Männer. [Lös.: 1/24, 0, 1/4, 1/3, 3/8.]
5. Eine Gruppe von 50 Herren samt ihren Ehefrauen nehmen an einem Ball teil. Die Tanzpartner werden durch Los bestimmt. Welche ungefähre Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß keiner der Herren mit seiner eigenen Frau tanzt?
6. Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Gruppe von r Personen genau zwei am gleichen Tag Geburtstag haben,
$$t_r = \binom{r}{2} \frac{365 \cdot 364 \ldots (265 - r + 2)}{365^r}$$
ist.
7. Zeigen Sie, daß $t_r = \binom{r}{2} \frac{q_r}{366 - r}$ ist, wenn t_r dem in Übung 10 definierten entspricht und q_r die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß nicht zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.
8. Errechnen Sie, unter Verwendung der Ergebnisse der Übung 11 und der in Abb. 1 gegebenen Werte, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau zwei Personen einer Gruppe von r Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, wobei $r = 15, 20, 25, 30, 40$ und 50 sein soll. [Lös.: 0,22, 0,32, 0,38, 0,38, 0,26, 0,12.]
9. w_n sei die Anzahl der vollständigen Permutationen von n Zahlen.
a) Zeigen Sie, daß
$$w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \ldots$$
$$w_n = (n - 1)w_{n-1} + (n - 1)w_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

(Hinweis: Jede vollständige Permutation von n Zahlen kann aus einer vollständigen Permutation von $n-1$ Zahlen oder aus einer Permutation von $n-1$ Zahlen, bei der eine Zahl unberührt bleibt, gewonnen werden. Beschreiben Sie das Vorgehen, und zeigen Sie, daß die zwei Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung die Größe darstellen, die wir bei beiden Vorgehensweisen als Ergebnis erhalten.)

b) p_n sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Permutation aus n Zahlen, die zufällig durchgeführt wird, eine vollständige Permutation ist. Zeigen Sie auf Grund von a), daß für $n = 3, 4, \ldots$

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = \tfrac{1}{2}$$
$$p_n = \frac{n-1}{n} p_{n-1} + \frac{1}{n} p_{n-2} \qquad \text{für } n = 3, 4, \ldots$$

c) Es sei $v_n = p_n - p_{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ Zeigen Sie auf Grund von b), daß $n(p_n - p_{n-1}) = -(p_{n-1} - p_{n-2})$ bei $n = 3, \ldots$ und daß daher $nv_n = -v_{n-1}$ bei $n = 3, \ldots$ ist.

d) Bestimmen Sie auf Grund der Tatsache, daß $p_1 = 0$ und $p_2 = 1/2$ ist, v_2. Bestimmen Sie, unter Benutzung des Ergebnisses von c), $v_3, v_4 \ldots v_n$.

e) Zeigen Sie unter Benutzung der Ergebnisse von d), daß

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}.$$

6. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Bayessches Theorem

Nehmen Sie an, ein U sei gegeben und allen Unterklassen von U seien Maßzahlen zugeordnet. Ein Satz p wird dann die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}[p] = m(P)$ haben. Nehmen Sie nun an, wir erhielten weitere Informationen, so z. B. die, daß der Satz q wahr ist. Wie beeinflußt diese zusätzliche Information die Wahrscheinlichkeit von p?

Die Wahrscheinlichkeit für p wird unter der Voraussetzung der Information q die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von q genannt und mit $\mathbf{Pr}[p \mid q]$ bezeichnet. Dieser Ausdruck wird als „die Wahrscheinlichkeit von p, wenn q gegeben ist" gelesen. In diesem Abschnitt werden wir eine Methode beschreiben, die es ermöglicht, diese bedingte Wahrscheinlichkeit, ausgedrückt durch Maßzahlen, zu ermitteln.

Wissen wir, daß q wahr ist, so wird dadurch die ursprüngliche Möglichkeitsklasse U auf Q reduziert, und wir müssen unsere Maßzahl in bezug auf die Unterklasse von Q anstatt derer von U definieren. Natürlich ist jede nicht leere Unterklasse X von Q auch eine Unterklasse von U, und da wir $m(X)$ kennen, wissen wir deren Maßzahl vor Erhalten der Information q. Da q nun die Zahl der Möglichkeiten einschränkt, muß die Kennzahl $m'(X)$ größer sein.

Der grundlegende Gedankengang, auf dem die Definition für m' aufbaut, ist der, daß wir über keine zusätzliche Information über die Unterklasse

von Q verfügen, obwohl wir wissen, daß die Klasse der Möglichkeiten auf Q reduziert wurde. Wenn X und Y Unterklassen von Q sind und $m(X) = 2m(Y)$ gilt, so fordern wir, daß $m'(X) = 2 \cdot m'(Y)$. Dies wird dann der Fall sein, wenn die Maßzahlen der Unterklassen von Q lediglich durch einen proportionalen Faktor $m'(X) = k \cdot m(X)$ vergrößert werden, so daß als einziges k zu bestimmen ist. Wir wissen, daß $1 = m'(Q) = k \cdot m(Q)$ ist. Es ergibt sich also $k = 1/m(Q)$, und unsere neue Maßzahl für die Unterklassen von U wird durch die Formel

$$\mathbf{m}'(X) = \frac{\mathbf{m}(X)}{\mathbf{m}(Q)} \tag{1}$$

bestimmt.

Wie beeinflußt dies die Wahrscheinlichkeit von p? Zunächst ist die Wahrheitsklasse von p verkleinert worden. Da alle Elemente von $\tilde{Q}$ eleminiert wurden, ist die neue Wahrheitsklasse von p $P \cup Q$, und daher ist

$$\mathbf{Pr}[p \mid q] = \mathbf{m}'(P \cap Q) = \frac{\mathbf{m}(P \cap Q)}{\mathbf{m}(Q)} = \frac{\mathbf{Pr}[p \wedge q]}{\mathbf{Pr}[q]}. \tag{2}$$

Beachten Sie, daß dann, wenn die ursprüngliche Zahl m die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeiten war, auch die neue Maßzahl m' die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeiten der Klasse Q ist.

Wir müssen dafür sorgen, daß die Nenner der Brüche in 1) und 2) von 0 verschieden sind. $m(Q)$ wird dann 0, wenn Q eine Leerklasse ist, d. h. nur dann, wenn Q eine Selbstkontradiktion ist. Dies ist auch der einzige Fall, in dem $\mathbf{Pr}[q] = 0$. Wir machen daher die naheliegende Annahme, daß unsere Information Q keine Selbstkontradiktion darstellt.

Beispiel 1. Im Beispiel 2 des 1. Abschnittes bemühten sich drei Fabrikanten elektronischer Anlagen, A, B und C, den Auftrag für die Einrichtung einer Rechenanlage bei der Gesellschaft X zu erhalten. Wir ordneten den Gewinnchancen von A, B und C die Werte 2/5, 2/5 bzw. 1/5 zu. Nehmen Sie an, daß wir nachträglich erfahren hätten, daß B beschlossen hat, sich nicht um den Auftrag zu bemühen. Welche Chancen haben nun A und C? q sei der Satz „B erhalte den Auftrag nicht", d. h. entweder A oder C werde beauftragt. Während vor dem Erhalt der Information, daß B sich nicht um den Auftrag bewerben wolle, $\mathbf{Pr}[q] = 3/5$ war, ist nach dem Erhalt dieser Information $\mathbf{Pr}[q] = 1$. Die Wahrscheinlichkeiten für das Erhalten des Auftrages bei den beiden verbleibenden Gesellschaften vergrößern sich also um den Faktor $1/(3/5) = 5/3$. Die Gesellschaft A hat nun eine Chance von $(2/5) \cdot (5/3) = 2/3$, und die Gesellschaft C hat die Chance $(1/5) \cdot (5/3) = 1/3$, den Auftrag zu erhalten.

Beispiel 2. Im Beispiel 2 des 1. Kapitels, Abschnitt 6 sei U die Klasse der nach einer seismographischen Aufnahme gebohrten Löcher, die in $[S, \tilde{S}]$ und $[D, O]$ aufgespalten werden soll. Hierbei sei S die Klasse der Bohrlöcher, bei der die seismographische Aufnahme ein ölträchtiges Gefüge gezeigt hatte, D die Klasse der erfolglos gebohrten Löcher und O die Klasse der ölträchtigen Löcher. s, d, und o seien die Sätze, deren Wahrheitsklassen S, D und O sind. Es sei

$$\mathbf{Pr}[s \wedge o] = 0{,}2, \qquad \mathbf{Pr}[s \wedge d] = 0{,}3,$$
$$\mathbf{Pr}[\sim s \wedge o] = 0{,}1, \qquad \mathbf{Pr}[\sim s \wedge d] = 0{,}4.$$

Diese Daten können bequem in der in Abb. 3 gezeigten Tabelle zusammengefaßt werden. Hierbei bedeuten die Zahlen innerhalb der Tabelle die Wahrscheinlichkeiten der Basis-Konjunktion der einfachen Aussagen am Kopf und an der Seite der Tabelle und die Zahlen am Rand der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Aussagen an sich. So ist z. B.

$$\mathbf{Pr}[s \wedge o] + \mathbf{Pr}[\sim s \wedge o] = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 = \mathbf{Pr}[o].$$

(Siehe Abschnitt 2, Übung 25.)

		Zustand o	Zustand d	
Test	s	0,2	0,3	0,5
	$\sim s$	0,1	0,4	0,5
		0,3	0,7	1,0

Abb. 3

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Versuch die Struktur offenbart, ist also $\mathbf{Pr}[s] = 0{,}5$, und die Wahrscheinlichkeit eines Ölfundes, bevor der Versuch unternommen oder eine Bohrung durchgeführt worden ist, beträgt $\mathbf{Pr}[o] = 0{,}3$. Nehmen Sie nun an, es sei eine seismographische Aufnahme gemacht und dabei eine günstige Erdstruktur festgestellt worden. Die Klasse der logischen Möglichkeiten wird dann auf die in der oberen Zeile der in Abb. 3 gezeigten Tabelle reduziert. Es ist demnach

$$\mathbf{Pr}[o \mid s] = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4 \qquad \mathbf{Pr}[d \mid s] = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6.$$

Beachten Sie, daß *nach* dem Test, bei dem sich eine günstige Struktur herausstellte, die Wahrscheinlichkeit eines Ölfundes $\mathbf{Pr}[o \mid s] = 0{,}4$ ist, während sie *vor* der Aufnahme $\mathbf{Pr}[o] = 0{,}3$ war. Das eine günstige Struktur verheißende Testergebnis liefert also eine unvollständige Information, die jedoch die Wahrscheinlichkeit eines Ölfundes von 0,3 auf 0,4 erhöht.

Ein besonders interessanter Fall der bedingten Wahrscheinlichkeit ist der, bei dem $\mathbf{Pr}[p \mid q] = \mathbf{Pr}[p]$ ist. Hier hat die neue Information q keinerlei Auswirkung auf die Wahrscheinlichkeit von p. Wir bezeichnen dann p als *unabhängig* von q. Wenn wir in (2) $\mathbf{Pr}[p \mid q]$ durch $\mathbf{Pr}[p]$ ersetzen und über Kreuz multiplizieren, so erhalten wir

$$\mathbf{Pr}[p \wedge q] = \mathbf{Pr}[p] \cdot \mathbf{Pr}[q]. \tag{3}$$

Stellen wir auf der anderen Seite die Bedingung, daß q unabhängig von p ist, so kommen wir zum gleichen Ergebnis. Die beiden Sätze sind also unabhängig voneinander. Wir können daher sagen, daß p und q dann und nur dann voneinander unabhängig sind, wenn (3) gilt.

Beispiel 3. Betrachten Sie drei Würfe mit einer normalen Münze, bei denen wir die acht Möglichkeiten als gleichwahrscheinlich ansehen. p sei der Satz „Das Wappen liegt beim ersten Wurf oben" und q sei der Satz „Die Zahl liegt beim zweiten Wurf

oben". Es ist dann $\mathbf{Pr}[p] = \mathbf{Pr}[q] = 1/2\ \mathbf{Pr}[p \wedge q] = 2/4$, d. h. p und q sind voneinander unabhängige Sätze.
Obwohl wir eine gefühlsmäßige Vorstellung von Unabhängigkeit haben, kann es durchaus vorkommen, daß zwei Sätze, die zunächst nicht unabhängig voneinander erscheinen, dies in Wirklichkeit doch sind. Ist r z. B. der Satz „Die gleiche Seite liegt jedes dritte Mal oben" und s der Satz „Das Wappen liegt höchstens einmal oben", dann sind r und s voneinander unabhängige Aussagen (siehe Übung 10).

Beispiel 4. Im Rahmen einer Verbraucherbefragung wurden einzelne Personen gefrage, ob sie erwarteten, sich im Laufe der nächsten 12 Monate einen neuen Wagen zu kaufen. Nach einem Jahr wurde diese Befragung wiederholt um festzustellen, ob sie wirklich einen Wagen gekauft hatten. p stelle den Satz „Die Person plant, innerhalb eines gegebenen Jahres einen Wagen zu kaufen" dar und b stehe für den Satz „Die Person kaufte innerhalb des gegebenen Jahres einen Wagen". Nehmen Sie an, die folgenden Wahrscheinlichkeiten seien den vier möglichen Konjunktionen dieser zwei Sätze und ihren Verneinungen zugeordnet:

$$\mathbf{Pr}[p \wedge b] = 0{,}06, \qquad \mathbf{Pr}[p \wedge \sim b] = 0{,}24,$$
$$\mathbf{Pr}[\sim p \wedge b] = 0{,}14, \qquad \mathbf{Pr}[\sim p \wedge b] = 0{,}56.$$

Diese Daten sind in der Tabelle der Abb. 4 zusammengefaßt, wobei an den Seiten die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Sätze angegeben sind. So ist z. B.

$$\mathbf{Pr}[p \wedge b] + \mathbf{Pr}[\sim p \wedge b] = \mathbf{Pr}[b] = 0{,}06 + 0{,}14 = 0{,}20.$$

		Verhalten b	Verhalten $\sim b$	
Erwartung	p	0,06	0,24	0,30
	$\sim p$	0,14	0,56	0,70
		0,20	0,80	1,00

Abb. 4

Wir können daraus schließen, daß

$$\mathbf{Pr}[b] \cdot \mathbf{Pr}[p] = 0{,}30 \cdot 0{,}20 = 0{,}06 = \mathbf{Pr}[p \wedge b].$$

Hieraus ergibt sich, daß b unabhängig von p ist. Sind diese hypothetischen Wahrscheinlichkeiten gegeben, so bieten die Erwartungen der verschiedenen Personen bezüglich des Kaufes eines neuen Wagens keine weitere Information darüber, ob sie sich wirklich ein Auto kaufen werden oder nicht.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten spielen eine sehr wichtige Rolle bei vielen Problemen des Geschäftslebens. Beginnen wir mit der, einer Voraussage p zugeordneten Wahrscheinlichkeit und revidieren unsere Wahrscheinlichkeit dann auf Grund der zusätzlich erhaltenen Information q. Man bezeichnet gewöhnlich die ursprünglich vorhandene Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}[p]$ als die *ursprüngliche* Wahrscheinlichkeit und die resultierende, bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}[p \mid q]$ als die *nachträgliche* Wahrscheinlichkeit.

So ist z. B. in Beispiel 1 die ursprüngliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß Gesellschaft A den Auftrag bekommen wird, 2/5, während die nachträgliche Wahrscheinlichkeit 2/3 ist. In Beispiel 2 war die Wahrscheinlichkeit, Öl zu finden, vor der Durchführung seismographischer Untersuchungen 0,3, nachdem jedoch eine trächtige Struktur festgestellt worden war, stieg die Wahrscheinlichkeit auf 0,4. Die Rechnungen sind so allgemein gebräuchlich, daß wir eine einfache Formel für die Errechnung der nachträglichen Wahrscheinlichkeit ableiten wollen:

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\mathbf{Pr}[p \mid q] = \frac{\mathbf{Pr}[p \wedge q]}{\mathbf{Pr}[q]} \text{ und } \mathbf{Pr}[q \mid p] = \frac{\mathbf{Pr}[q \wedge p]}{\mathbf{Pr}[p]}.$$

Da $q \wedge p$ äquivalent $p \wedge q$ ist, gilt

$$\mathbf{Pr}[p \mid q] = \frac{\mathbf{Pr}[q \mid p] \cdot \mathbf{Pr}[p]}{\mathbf{Pr}[q]}. \tag{4}$$

Wir wissen ebenfalls, daß (siehe Übung 12):

$$\mathbf{Pr}[q] = \mathbf{Pr}[q \mid p] \cdot \mathbf{Pr}[p] + \mathbf{Pr}[q \mid \sim p] \cdot \mathbf{Pr}[\sim p]. \tag{5}$$

Mit Hilfe der Formeln (4) und (5) können wir die nachträgliche Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}[p \mid q]$ aus $\mathbf{Pr}[p]$, $\mathbf{Pr}[q \mid p]$ und $\mathbf{Pr}[q \mid \sim p]$ errechnen. Das Ergebnis wird nach dem Geistlichen Thomas Bayes, der es 1763 zum erstenmal veröffentlichte, „Bayessches Theorem" genannt.

Beispiel 5. 10% der Angestellten einer bestimmten Gesellschaft haben eine kaufmännische Lehre absolviert. 70% dieser Personen arbeiten in der Verwaltung der Gesellschaft; von denen, die keine kaufmännische Lehre absolviert haben, arbeiten 30% in der Verwaltung. Es werde nun zufällig ein Angestellter der Gesellschaft ausgewählt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß er eine kaufmännische Lehre absolviert hat?

Steht p für den Satz „Der ausgewählte Angestellte hat eine kaufmännische Lehre" und q für den Satz „Der ausgewählte Angestellte arbeitet in der Verwaltung", so erhalten wir aus der gegebenen Information $\mathbf{Pr}[p] = 0{,}10$, $\mathbf{Pr}[q \mid p] = 0{,}70$ und $\mathbf{Pr}[q \mid \sim p] = 0{,}3$. Setzt man diese Werte in Gleichung (5) ein, so erhält man

$$\mathbf{Pr}[q] = (0{,}70)\,(0{,}10) + (0{,}30)\,(0{,}90) = 0{,}34,$$

und aus Gleichung (4)

$$\mathbf{Pr}[p \mid q] = \frac{\mathbf{Pr}[q \mid p]\,\mathbf{Pr}[p]}{\mathbf{Pr}[q]} = \frac{(0{,}70)\,(0{,}10)}{0{,}34} = 0{,}21.$$

ÜBUNGEN

1. Die tägliche Nachfrage nach einem bestimmten Produkt kann zwischen einer und 13 Einheiten liegen. Allen möglichen Nachfragegrößen solle die Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit zugeordnet sein. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß an einem bestimmten Tag eine Nachfrage nach genau 5 Einheiten besteht, wenn

wir wissen, daß an diesem Tag die Nachfrage zwischen zwei und sieben Einheiten einschließlich liegt?

2. Es gebe sieben potentielle Bewerber um einen bestimmten Auftrag. Man glaube, daß jeder der Bewerber ungefähr die gleiche Chance hat, diesen zu gewinnen. Unmittelbar vor dem Vergabetag des Auftrages entscheiden sich drei der potentiellen Bewerber dafür, keine Angebote abzugeben. Um wieviel ist die Chance eines der verbleibenden Bewerber, den Auftrag zu bekommen, dadurch vergrößert worden?

3. Es stehe d_i für den Satz „Die Nachfrage nach Produkt X war heute i Einheiten". Nehmen Sie an, daß $\mathbf{Pr}[d_0] = 0{,}1$, $\mathbf{Pr}[d_1] = 0{,}2$, $\mathbf{Pr}[d_2] = 0{,}4$, $\mathbf{Pr}[d_3] = 0{,}3$ und $\mathbf{Pr}[d_i] = 0$ für $i > 3$ sei. Nehmen Sie weiterhin an, daß die Nachfragen aufeinanderfolgender Tage voneinander unabhängig seien. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die Gesamtnachfrage an zwei aufeinanderfolgenden Tagen mehr als drei Einheiten beträgt, wenn bekannt ist, daß:
   a) an einem der Tage Nachfrage nach einer Einheit herrschte. [Lös.: 1/3.]
   b) am ersten Tag eine Nachfrage nach drei Einheiten vorlag. [Lös.: 0,3.]

4. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß in Übung 9, Abschnitt 3 ein zufällig ausgewähltes Stück einen Kratzer hat, wenn
   a) es einen Elastizitätsfehler hat.
   b) es Elastizitätsfehler hat und Maßabweichungen aufweist. [Lös.: 1/2.]
   c) es weder Elastizitätsfehler noch Maßabweichungen aufweist.

5. Nehmen Sie an, daß in dem Marktführerbeispiel des 2. Kapitels, Abschnitt 1 allen Möglichkeiten die Maßzahl für Gleichwahrscheinlichkeiten zugeordnet wurde. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dann dafür, daß A Führer in wenigstens zwei Gebieten ist, wenn bekannt ist, daß B sich im Norden vom Markt zurückzieht?

6. Wie groß ist $\mathbf{Pr}[p \wedge q]$, wenn $\mathbf{Pr}[\sim p] = 1/4$ und $\mathbf{Pr}[q \mid p] = 1/2$ ist. [Lös.: 3/8.]

7. Die amerikanische Sterblichkeitsziffer zeigt, daß von 100000 Personen im Alter von 10 Jahren 57917 60 Jahre alt werden und 56371 ihr 61. Jahr erleben. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß eine im Alter von 60 Jahren zufällig ausgewählte Person während des nächsten Jahres stirbt?

8. Ein Techniker untersuche den Ausstoß einer automatischen Maschine, indem er sich die produzierten Stücke nacheinander anschaut und bestimmt, ob sie gut oder fehlerhaft sind. Er teile dann den Fluß der ausgestoßenen Güter in sog. *Läufe* auf, wobei ein Lauf eine Reihe von Stücken ist, die dann endet, wenn ein fehlerhaftes Produkt auftritt. So enthält z. .B die Reihe gggfgfggffggggf, die Läufe (gggf), (gf), (ggf), (f), (ggggf). Er sehe sich schließlich die Länge der verschiedenen Läufe an und ordne dem zukünftigen Auftreten von Läufen verschiedener Längen Wahrscheinlichkeiten zu. In dem obengenannten Beispiel liegen Läufe der Länge 4, 2, 3, 1 und 5 vor. Es stehe r_i für den Satz „Die Länge eines Laufes ist i oder größer", für $i = 1, 2, 3, \ldots$ Nach umfangreichen Untersuchungen werden r_i die folgenden Wahrscheinlichkeiten zugeordnet:

i	$\mathbf{Pr}[r_i]$
1	1,00
2	0,90
3	0,81
4	0,73
5	0,66
6	0,59

a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{Pr}[p_i] = \mathbf{Pr}[r_i] - \mathbf{Pr}[_{i+1}]$ ist, wenn p_i für den Satz „Der Lauf hat genau die Länge i" steht. Errechnen Sie $\mathbf{Pr}[p_i]$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
b) Zeigen Sie, daß $\mathbf{Pr}[p_i \wedge r_i] = \mathbf{Pr}[p_i]$ ist.
c) Errechnen Sie $\mathbf{Pr}[p_i \mid r_i]$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Was können Sie bezüglich der Unabhängigkeit oder Abhängigkeit von $\mathbf{Pr}[p_i \mid r_i]$ sagen?
[Teillös.: Alle ungefähr 0,1.]

9. Man wähle aus einem Stoß Bridgekarten die Buben und die Königinnen aus und lege sie übereinander. Ziehen Sie aus dem neuen Stoß zwei Karten und bestimmen Sie:
a) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Karten Buben sind, vorausgesetzt, daß der eine ein Bube ist. [Lös.: 3/11 = 0,27.]
b) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Karten Buben sind, vorausgesetzt, daß eine ein roter Bube ist. [Lös.: 5/13 = 0,38.]
c) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Karten Buben sind, vorausgesetzt, daß eine der Herzbube ist. [Lös.: 3/7 = 0,43.]

10. Beweisen Sie, daß die Sätze r und s in Beispiel 3 voneinander unabhängig sind.

11. Das folgende Beispiel zeigt, daß r durchaus von p und q unabhängig sein kann, ohne deshalb von $p \wedge q$ und $p \vee q$ unabhängig sein zu müssen. Wir wollen zweimal eine Münze werfen: p bedeute „Beim ersten Wurf liegt das Wappen oben", q bedeute „Beim zweiten Wurf liegt das Wappen oben" und r bedeute „Bei beiden Würfen liegt das gleiche oben". Errechnen Sie $\mathbf{Pr}[r]$, $\mathbf{Pr}[r \mid q]$, $\mathbf{Pr}[r \mid p]$, $\mathbf{Pr}[r \mid p \wedge q]$, $\mathbf{Pr}[r \mid p \vee q]$. [Lös.: 1/2, 1/2, 1/2, 1, 1/3.]

12. Beweisen Sie, daß die Formel (5) für jede Form der Aussagen p und q gilt.

13. Die Urne A enthalte drei weiße und sieben schwarze Kugeln. Die Urne B enthalte zwölf weiße und acht schwarze Kugeln. Es werde aus einer der zufällig ausgewählten Urnen zufällig eine Kugel entnommen.
a) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die entnommene Kugel weiß ist, wenn bekannt ist, daß sie aus Urne A genommen wurde? Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, wenn sie aus Urne B genommen wurde?
b) Wie groß ist die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kugel weiß ist?
c) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die Kugel aus Urne A entnommen wurde, wenn bekannt ist, daß sie weiß ist? [Lös.: 1/3.]

14. Unter den Umständen der Übung 13 werden fünf Kugeln aus einer zufällig gewählten Urne entnommen.
a) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei der Kugeln weiß und drei davon schwarz sind, wenn die Kugeln aus Urne A entnommen werden? Wie liegt der Fall, wenn sie aus Urne B entnommen wurden?
b) Welche (unbedingte) Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß zwei der Kugeln weiß und drei schwarz sind?
c) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die Kugeln der Urne A entnommen wurden, wenn bekannt ist, daß von den fünf entnommenen Kugeln zwei weiß und drei schwarz sind? [Lös.: 0,636.]

15. Drei Kandidaten, Müller, Meier und Schulze, bewerben sich um die gleiche Stellung bei einer großen Gesellschaft. Einer der Freunde Müllers ist Angestellter des Personalbüros dieser Gesellschaft und hat ihm versprochen, ihm einige interne Informationen zu verschaffen. Obwohl er ihm nicht sagen kann, ob Müller ausgewählt worden ist oder nicht, ist er bereit, ihm den Namen eines der Kandidaten zu sagen, der abgelehnt wurde. Müller behauptet nun, daß, wenn ihm sein Freund

den Namen Schulze nennt, sich die Möglichkeiten auf {Müller, Meier} verringert haben und daß sich somit seine Chancen, den Posten zu bekommen, unter der Voraussetzung, daß für die Einstellung aller drei Kandidaten die gleichen ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten bestanden, von 1/3 auf 1/2 erhöht haben. Nennt ihm sein Freund auf der anderen Seite den Namen Meier, so werden dadurch die möglichen Gewinner auf {Müller, Schulze} eingeschränkt, und Müllers Chancen haben sich wiederum auf 1/2 erhöht. Es ist also vollkommen gleichgültig, welche Information er erhält; allein durch das Versprechen solcher Information haben sich die Chancen Müllers von 1/3 auf 1/2 erhöht. Welcher Fehler steckt in Müllers Beweisführung?

16. Drei Urnen, A, B und C, enthalten weiße, rote und schwarze Kugeln in der folgenden Zusammenstellung:

Urne	weiß	rot	schwarz	gesamt
A	2	3	5	10
B	12	6	2	20
C	8	15	7	30

Eine der Urnen werde auf folgende Weise ausgewählt: Es werde ein Würfel geworfen und Urne A werde dann genommen, wenn eine 1 erscheint, Urne B dann, wenn 2 oder 3 Augen geworfen werden und Urne C in allen übrigen Fällen.

a) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dann dafür, daß es Urne A, Urne B, Urne C war, wenn eine einzige Kugel aus einer auf diese Weise ausgewählten Urne genommen wird, und diese Kugel rot ist? [Lös.: 1/8, 2/8, 5/8.]

b) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß es Urne A, Urne B oder Urne C war, wenn drei entnommene Kugeln die Reihenfolge weiß, weiß, schwarz hatten?

17. Urne A enthalte zwei weiße und eine schwarze Kugel und Urne B enthalte 1001 weiße und 1000 schwarze Kugeln. Eine dieser Urnen werde zufällig ausgewählt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die ausgewählte Urne die Urne A ist, wenn:

a) eine der Urne entnommene Kugel weiß ist? $\left[\text{Lös.: } \frac{1334}{2335}.\right]$

b) von zwei entnommenen Kugeln die erste weiß und die zweite schwarz ist?

c) beide entnommenen Kugeln weiß sind? Welche Information gibt die zweite Kugel bezüglich des Inhaltes der Urne, wenn die erste Kugel weiß ist?

18. Nehmen Sie an, daß die erste in Übung 17 entnommene Kugel schwarz gewesen sei. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß sie der Urne A entnommen wurde? Welche Wahrscheinlichkeit besteht für die Reihenfolge schwarz, schwarz bzw. schwarz, weiß? Gibt die an zweiter Stelle entnommene Kugel irgendwelche zusätzliche Information bezüglich des Inhalts der Urne, wenn die erste Kugel schwarz war?

19. Ein Los von 10 Stück enthalte R fehlerhafte; es werde eine aus fünf Stück bestehende Stichprobe entnommen, bei der man zwei fehlerhafte Teile feststellt. Nehmen Sie an, die folgenden ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten seien den im Los enthaltenen Anzahlen an fehlerhaften Stück zugeordnet worden: $\mathbf{Pr}[R = 3] = 0{,}2$; $\mathbf{Pr}[R = 5] = 0{,}8$. Welche nachträglichen Wahrscheinlichkeiten bestehen für die im Los enthaltenen fehlerhaften Stücke, nachdem das Stichprobenergebnis bekannt ist? Welche nachträglichen Wahrscheinlichkeiten bestehen für die

Anzahlen der innerhalb der fünf verbleibenden Stücke enthaltenen fehlerhaften Teile, nachdem das Stichprobenergebnis bekannt ist.

$$\left[\text{Teillös.: } \mathbf{Pr}[R = 3] = \frac{21}{101}.\right]$$

20. Nehmen Sie an, in Übung 7 des 4. Abschnittes würden die folgenden ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten der Anzahl R der fehlgegangenen Raketen zugeordnet: $\mathbf{Pr}[R = 3] = 0{,}2$; $\mathbf{Pr}[R = 5] = 0{,}6$; $\mathbf{Pr}[R = 7] = 0{,}2$.
    a) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß aus einer abgeschossenen Salve von drei Raketen wenigstens eine das Ziel trifft?
    b) Wenn bekannt ist, daß das Ziel bei einer Salve von drei Raketen wenigstens durch eine getroffen wurde, welche nachträgliche Wahrscheinlichkeit besteht dann dafür, daß sich unter den ursprünglichen zehn Raketen genau drei befanden, die das Ziel verfehlten?
    c) Wenn das Ziel bei einer Salve von drei Raketen genau durch eine getroffen wurde, welche nachträgliche Wahrscheinlichkeit besteht dann dafür, daß sich unter den verbleibenden Raketen 2, 4, 6, 7 befinden, die voraussichtlich das Ziel verfehlen?

7. Endliche stochastische Prozesse

Wir wollen hier zunächst eine sehr allgemeine Situation betrachten und in späteren Abschnitten auf speziellere Fälle eingehen. Wir werden uns mit einer Reihe von Versuchen beschäftigen, deren Ergebnisse jeweils ein Element der Unsicherheit enthalten. Jede dieser Versuchsreihen soll als *stochastischer Prozeß* bezeichnet werden (das griechische Wort „stochos" bedeutet „raten"). Wir werden dabei eine endliche Anzahl von Experimenten und eine endliche Anzahl von Möglichkeiten für jedes der Experimente annehmen. Wir wollen ferner voraussetzen, daß, wenn alle Ergebnisse der dem Experiment vorausgehenden Versuche bekannt sind, dann sowohl die Möglichkeiten für den Ausgang dieses Experimentes als auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bestimmte Möglichkeit eintreten wird, bekannt sind. Wir wollen nun Voraussagen über den Prozeß als Ganzes machen: Wir würden z. B. im Falle eines wiederholten Wurfes einer normalen Münze voraussetzen, daß jeder Versuch drei mögliche Ergebnisse hat und daß die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ergebnisse, unabhängig davon, wie die anderen Versuche ausgingen, 1/2 ist. Wir mögen jedoch auch an den Wahrscheinlichkeiten von Sätzen der Form „Mehr als 2/3 der Würfe ergeben das Wappen" oder „Die Anzahl der auftretenden Wappen und Zahlen ist die gleiche" usw. interessiert sein. Diese Fragen können nur dann beantwortet werden, wenn dem Prozeß als Ganzes eine Wahrscheinlichkeitsmaßzahl zugeordnet wurde. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, wie unter Benutzung der vorhandenen Information eine Wahrscheinlichkeitsmaßzahl zugeordnet werden kann. Im Falle des Werfens von Münzen hängen die

Wahrscheinlichkeiten (und damit auch die Möglichkeiten) jedes gegebenen Versuches nicht von den Ergebnissen früherer Experimente ab. Wir wollen solche Einschränkungen hier auch nicht machen, da diese Voraussetzungen im allgemeinen nicht zulässig sind.

Wir werden ferner zeigen, wie man die Wahrscheinlichkeitsmaßzahl für ein bestimmtes Beispiel ermittelt. Wir werden hierbei ähnlich wie im allgemeinen Fall vorgehen.

Als Beispiel wollen wir eine Reihenfolge der drei Versuche wählen, deren Möglichkeiten in Abb. 5 dargestellt sind. Die Klasse aller möglichen Ergebnisse, die bei jedem der Versuche auftreten können, wird durch die Klasse $\{a, b, c, d, e, f\}$ gebildet. Beachten Sie, daß wir, wenn feststeht, daß beim ersten Versuch das Ergebnis b auftrat, wissen, daß die Möglichkeiten für Versuch 2 $\{a, e, d\}$ sind. Entsprechend wissen wir, daß, wenn b das Ergebnis des ersten Versuches und a das Ergebnis des zweiten Versuches war, nur die Möglichkeiten $\{c, f\}$ für den dritten Versuch übrigbleiben. Wir bezeichnen mit p_a die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ergebnis des ersten Versuches a ist mit p_b die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ergebnis des ersten Versuches b ist. Wir bezeichnen ferner mit P_{bd} die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das zweite Experiment als Ergebnis d ergibt. Die Wahrscheinlichkeit wurde auf Grund der Annahme errechnet, daß das Ergebnis b beim ersten Versuch auftrat. Das gleiche gilt für p_{ba}, p_{be}, p_{aa}, p_{ac}. Mit $p_{bd,c}$ wird die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet, daß das dritte Experiment das Ergebnis c zeitigt, wobei die letzte Wahrscheinlichkeit auf Grund der Annahme errechnet wurde, daß das erste Experiment das Ergebnis b hatte und das zweite das Ergebnis d. Das gleiche gilt wiederum für $p_{ba,c}$, p_{baf} usw. Wir haben hierbei vorausgesetzt, daß diese Werte gegeben sind und daß die Zuordnung dieser Wahrscheinlichkeiten zu möglichen Ergebnissen bedeute, daß diese positiv sind und daß

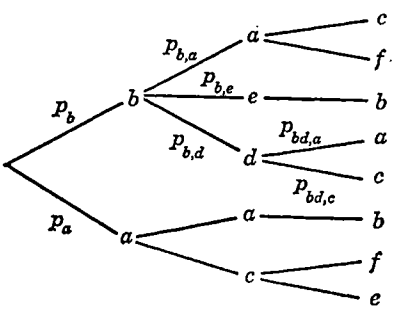


Abb. 5

$$p_a + p_b = 1,\ p_{b,a} + p_{b,e} + p_{b,d} = 1,\ p_{bd,a} + p_{bd,c} = 1 \text{ usw.}$$

Es erweist sich als günstig, jeder Wahrscheinlichkeit einen Zweig des Baumes zuzuordnen. Wir haben das in Abb. 5 für verschiedene Zweige durchgeführt. Die Summe der Zahlen, die den von einem Ausgangspunkt ausgehenden Zweigen zugeordnet wurden, ist 1, d. h. $p_{b,a} + p_{b,e} + p_{b,d} = 1$.

Eine Möglichkeit für die Reihenfolge dreier Versuche wird durch einen Pfad des Baumes dargestellt. Die der Klasse aller Pfade zugeordnete Wahrschein-

lichkeitsmaßzahl bezeichnen wir als Baummaßzahl. Dem Pfad, der dem Ergebnis b beim ersten Versuch, d beim zweiten Versuch und c beim dritten Versuch entspricht, ordnen wir das Gewicht $p_b \cdot p_{bd} \cdot p_{bd,c}$, d. h. das *Produkt* der Wahrscheinlichkeiten jedes Zweiges entlang des Pfades, zu. Auf diese Weise ermitteln wir die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad innerhalb des Baumes.

Ehe wir den Grund für diese Art der Wahl aufzeigen, müssen wir beweisen, daß dadurch eine Wahrscheinlichkeitsmaßzahl bestimmt wird oder, mit anderen Worten, daß die Gewichte positiv und ihre Summe 1 ist. Da die Gewichte Produkte positiver Zahlen sind, sind sie selbst auch positiv. Um zu zeigen, daß ihre Summe 1 ist, ermitteln wir zunächst die Summe aller Gewichte eines Pfades, der bestimmten Ergebnissen, sagen wir b beim ersten Versuch und d beim zweiten Versuch, entspricht. Wir erhalten dann

$$p_b \cdot p_{b,d} \cdot p_{bd,a} + p_b \cdot p_{b,d} \cdot p_{bd,c} = p_b \cdot p_{b,d}[p_{bd,a} + p_{bd,c}] = p_b \cdot p_{b,d}.$$

Für jedes andere Paar der ersten zwei Ergebnisse erhielten wir ein ähnliches Resultat. So ist z. B. die Summe der Gewichte des Pfades, der dem Ergebnis a beim ersten Versuch und c beim zweiten Versuch entspricht, $p_a \cdot p_{a,c}$. Bitte machen Sie sich klar, daß, wenn wir eine der Wahrscheinlichkeitsmaßzahlen ermittelt haben, dies die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß das Ergebnis des ersten Versuches a und das des zweiten Versuches c ist.

Als nächstes bestimmen wir die Summe der Gewichte all der Pfade, die den Fällen entsprechen, in denen das Ergebnis des ersten Versuches b ist. Wir finden sie durch das Addieren der Summen, die den verschiedenen Möglichkeiten des zweiten Versuches entsprechen. Gemäß unserer vorausgehenden Rechnung ist dies

$$p_b \cdot p_{b,a} + p_b \cdot p_{b,e} + p_b \cdot p_{b,d} = p_b[p_{b,a} + p_{b,e} + p_{b,d}] = p_b.$$

Die Summe der Gewichte der Pfade, die einem Ergebnis a des ersten Versuches entsprechen, ist p_a. Die Summe aller Gewichte ist somit $p_a + p_b = 1$, d. h. wir haben die Wahrscheinlichkeitsmaßzahl gefunden. Bitte beachten Sie, daß wir gleichfalls zeigen konnten, daß die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis a des ersten Versuches mit der gegebenen Wahrscheinlichkeit p_a übereinstimmt.

Um den Zusammenhang unserer neuen Maßzahl mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten vollständig darzustellen, setzen wir $x_j = z$ für den Satz „Das Ergebnis des j-ten Versuches war z". Der Satz $[X_1 = b\ X_2 = d\ X_3 = c]$ ist dann eine Satzverknüpfung, der die Wahrscheinlichkeit $p_b \cdot p_{b,d} \cdot p_{bd,c}$ zugeordnet wurde. Wir haben gesehen, daß dem Satz $[X_1 = b\ X_2 = d]$ die Wahrscheinlichkeit $p_b \cdot p_{b,d}$ und dem Satz $[X_1 = b]$ die Wahrscheinlichkeit p_b zugeordnet worden ist.

Damit erhalten wir

$$\mathbf{Pr}[X_3 = c \mid X_2 = d \wedge X_1 = b] = \frac{p_b \cdot p_{b,d} \cdot p_{bd,c}}{p_b \cdot p_{b,d}} = p_{bd,c}$$

$$\mathbf{Pr}[X_2 = d \mid X_1 = b] = \frac{p_b \cdot p_{b,d}}{p_b} = p_{b,a}.$$

Wir sehen also, daß sich unsere, unter der Voraussetzung, daß die vorausgehenden Ergebnisse bekannt sind, errechneten Wahrscheinlichkeiten als die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten herausstellen, wenn sie in bezug auf die Baummaßzahl errechnet werden. Es kann gezeigt werden, daß die Baummaßzahl, die wir zuordneten, die einzige ist, die zu dieser Übereinstimmung führt. Wir können nun die Wahrscheinlichkeit jedes Satzes bezüglich des stochastischen Prozesses aus unserer Baummaßzahl ermitteln.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, wir hätten zwei Urnen. Urne 1 enthalte zwei schwarze und drei weiße Kugeln und Urne 2 enthalte zwei schwarze Kugeln und eine weiße. Wir wählen zufällig eine der Urnen aus und entnehmen ihr eine Kugel. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß diese Kugel weiß ist? Wir werden zunächst geneigt sein, 1/2 zu sagen, da die gleiche Anzahl von weißen und schwarzen Kugeln betroffen ist und jede der Handlungen vollkommen zufällig durchgeführt wurde. Solche überstürzten Antworten wie diese (die falsch ist) erfordern eine sorgfältige Analyse.

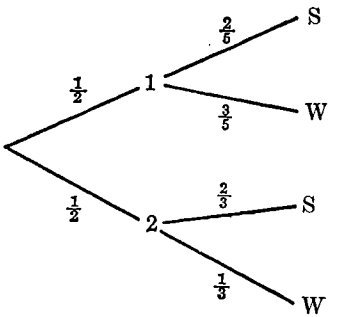


Abb. 6

Wir wollen zwei Versuche betrachten. Der erste Versuch bestehe aus der Auswahl der Urne und der zweite aus der Wahl der Kugel. Für den ersten Versuch gibt es zwei Möglichkeiten, und wir ordnen ihnen für die Wahl der ersten bzw. der zweiten Urne die Wahrscheinlichkeit $p_1 = p_2 = 1/2$ zu. Wir erhalten dann als Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter der Voraussetzung, daß Urne 1 gewählt wurde, eine weiße Kugel gegriffen wird, $p_{1w} = 3/5$. Desgleichen ermitteln wir $p_{1B} = 2/5$, $p_{2w} = 1/3$ und $p_{2B} = 2/3$. Diese Wahrscheinlichkeiten deuten wir in dem Baum der Möglichkeiten, der in Abb. 6 gezeigt wird, an. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine weiße Kugel gewählt wird, finden wir dann in der Baummaßzahl als die Summe der Gewichte der Pfade, die zur Wahl einer weißen Kugel führen. Wir erhalten also $1/2 \cdot 3/5 \cdot 1/2 \cdot 1/3 = 7/15$.
Bitte beachten Sie, daß wir die gleiche Antwort mit Hilfe der Formel (5) des 6. Abschnittes erhalten hätten, wenn wir für den Satz „Es wird eine weiße Kugel entnommen" q und für den Satz „Urne 1 wird gewählt" p gesetzt hätten.

Beispiel 2. Wir können auch den Prozeß der Entnahme zweiwertiger Elemente aus einer endlichen Menge als einen stochastischen Prozeß ansehen. Nehmen Sie z. B. an, wir entnehmen einem Los von 10 Teilen eine Stichprobe von drei Stücken, die je einen Fehler aufweisen können. Abb. 7 zeigt jede der drei möglichen Entnahmen als einen Versuch. Das erste entnommene Stück kann entweder gut oder fehlerhaft sein, so daß wir zwei Ausgangszweige erhalten. Ist das erste gut, so kann das zweite wiederum

entweder gut oder fehlerhaft sein, so daß sich wiederum zwei Zweige ergeben. Das gleiche gilt, mit einer Ausnahme, für alle weiteren Entnahmen. Es unterscheidet sich hiervon nur der Fall, der der anfänglichen Entnahme zweier fehlerhafter Stücke folgt: Da sich nur zwei fehlerhafte im Los befinden, gibt es für den Ausgang des dritten Versuches nur eine Möglichkeit.

Da von den 10 Stücken acht gut und zwei fehlerhaft sind und jedes der Stücke mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen werden kann, ordnen wir dem ersten Versuch $p_g = 8/10$ und $p_f = 2/10$ zu. War das zuerst entnommene Stück fehlerlos, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das zweite gezogene Stück fehlerhaft ist $p_{gf} = 2/9$, da beim zweiten Versuch nur noch neun Stücke vorhanden sind und sich unter ihnen zwei fehlerhafte befinden. Auf entsprechende Weise finden wir die anderen Wahrscheinlichkeiten des Baumes.

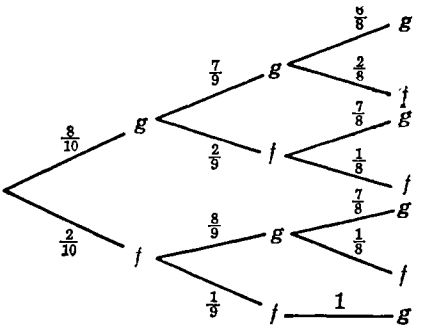


Abb. 7

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die entnommene Stichprobe aus drei guten Stücken besteht, ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß das erste, zweite und dritte Stück gut ist. Das entspricht jedoch dem Pfadgewicht des obersten Pfades des Baumes oder $8/10 \cdot 7/9 \cdot 6/8 = 7/15$. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu erhalten, daß die Stichprobe genau ein fehlerhaftes Stück enthält, müssen wir die Summe der Pfadgewichte, die zwei guten und einem fehlerhaften Stück entsprechen, errechnen. Dafür stehen drei Pfade zur Verfügung: *ggf*, *gfg* und *fgg*. Die Wahrscheinlichkeit des ersten ergibt sich zu $8/10 \cdot 7/9 \cdot 2/8 = 7/45$, die des zweiten zu $8/10 \cdot 2/9 \cdot 7/8 = 7/45$ und die des dritten zu $2/10 \cdot 8/9 \cdot 7/8 = 7/45$. (Warum sind die Wahrscheinlichkeiten aller drei Pfade die gleichen?) Die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein genau eines fehlerhaften Stückes in der Stichprobe ist daher $7/45 + 7/45 + 7/45 = 7/15$. Der Leser sollte sich vor Augen führen (siehe Übung 8), daß die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein genau zweier fehlerhafter Stücke in der Stichprobe 1/15 ist, und (siehe Übung 9) daß die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein von r fehlerhaften Stücken in der Stichprobe als eine hypergeometrische Wahrscheinlichkeit $h\,(r;\,3, 2, 10)$ errechnet werden kann.

Beispiel 3. Wenn wir in einem, eine Reihenfolge von Tätigkeiten und Ereignissen darstellenden Baum eine Reihenfolge von Tätigkeiten herausgreifen und den daraus resultierenden Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen, dann erhalten wir einen stochastischen Prozeß. Betrachten wir z. B. die Tätigkeiten: 1. Entwickeln des Bauelementes, 2. Entwickeln von A, 3. Entwickeln von B (aus Beispiel 3 des 1. Kapitels). Die Reihenfolge breche dann ab, wenn sich eine der Entwicklungen als unbefriedigend herausstellt. Abb. 8 zeigt einen Baum, der die möglichen Resultate (z = zufriedenstellend, u = unbefriedigend) jeder Stufe angibt. Wie wir bei den einzelnen Zweigen sehen, ordnen wir den Ergebnissen jedes Versuches Wahrscheinlichkeiten zu. Die höhere Wahrscheinlichkeit eines Erfolges bei der Entwicklung von B ist in erster Linie auf die bei der Entwicklung von A gewonnene Erfahrung, und nicht auf die Tatsache zurückzuführen, daß B einfacher zu entwickeln ist als A.

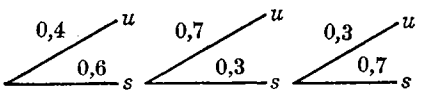


Abb. 8

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle drei Teile zufriedenstellend entwickelt werden, ist gleich dem Gewicht des Pfades *zzz* oder

$$(0{,}6)\,(0{,}3)\,(0{,}7) = 0{,}126.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nicht alle drei Teile zufriedenstellend entwickelt werden, ist die Summe der Gewichte der Pfade, die auf *u* enden, d. h. *u*, *zu*, *zzu*; also:

$$0{,}4 + (0{,}6)\,(0{,}7) + (0{,}6)\,(0{,}3)\,(0{,}3) = 0{,}874.$$

Die gleiche Wahrscheinlichkeit kann man natürlich dadurch erhalten, daß man die Wahrscheinlichkeit für die befriedigende Entwicklung aller drei Teile von 0,126, von 1 subtrahiert.

Bäume und Baummaßzahlen können auch dazu verwendet werden, nachträgliche Wahrscheinlichkeiten für kompliziertere Situationen als die in Abschnitt 6 betrachteten zu errechnen. Nehmen Sie an, wir hätten eine Anzahl von Alternativen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$, und wir kennen deren Wahrscheinlichkeiten. Uns wären ferner die bedingte Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Satzes p in bezug auf jede der Alternativen bekannt. Wir erfahren dann, daß p wahr ist, ohne jedoch zu wissen, welche der Alternativen wahr ist. Es sind nun neue Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Alternativen zu bestimmen. Dies kann bequem mit Hilfe von Baumdiagrammen geschehen. Wir wollen diese Methode an unserem nächsten Beispiel illustrieren:

Beispiel 4. Ein Autofabrikant stelle drei Wagentypen her: Limousinen, Kombiwagen und Cabriolets. Es werden gleichviel Limousinen und Kombiwagen, jedoch nur halbsoviel Cabriolets wie Limousinen gefertigt. Man stelle fest, daß 50% der Personen, die sich Limousinen kaufen, 75% derer, die Kombiwagen kaufen, und 25% der Käufer von Cabriolets einen zweiten Wagen beim gleichen Produzenten kaufen. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß ein Kunde, der zum Kauf des zweiten Wagens erscheint, bereits einen der angegebenen Wagentypen besitzt?

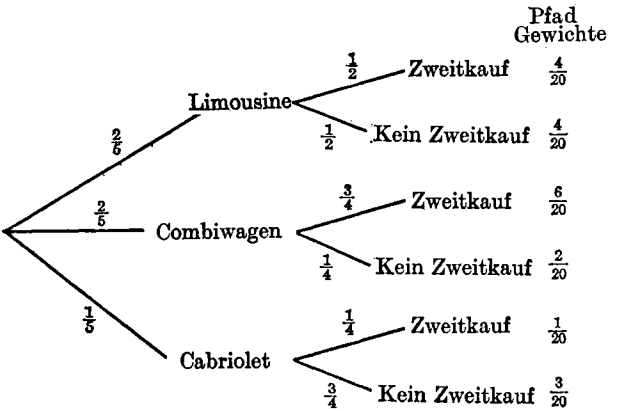


Abb. 9

Wir entwerfen zunächst den Baum und bestimmen die Baummaßzahl für den ersten Wagentyp und dafür, ob der Kunde zum Zwecke eines Zweitkaufes zurückkommt oder nicht. Siehe dazu Abb. 9.
Als nächstes stellen wir das Baumdiagramm in umgekehrter Reihenfolge auf, d. h. wir berücksichtigen erst, ob der Kunde für einen Zweitkauf zurückgekehrt ist oder nicht und dann den Typ seines alten Wagens. Wir erhalten dabei die gleichen sechs Zweige wie in Abb. 9, jedoch in einer anderen Beschreibungsreihenfolge. Die Pfadgewichte können daher aus Abb. 9 entnommen werden. Wir wissen ferner, daß die Wahrscheinlichkeit für die Rückkehr eines Kunden zum gleichen Produzenten

$$4/20 + 6/20 + 1/20 = 11/20 \text{ ist,}$$

womit uns die Zweiggewichte für den „ersten Versuch" bekannt sind (siehe Abb. 10a). Die noch fehlenden Zweiggewichte können wir durch einfache Division ermitteln: Ist z. B. x die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Kunde eine Limousine besitzt, so ist, wenn er zum Zwecke eines Zweitkaufes zurückkehrt, $11/20x = 4/20$ das Gewicht des ersten Pfades in Abb. 10a. Es ist also

$$x = 4/20 : 11/20 = 4/10.$$

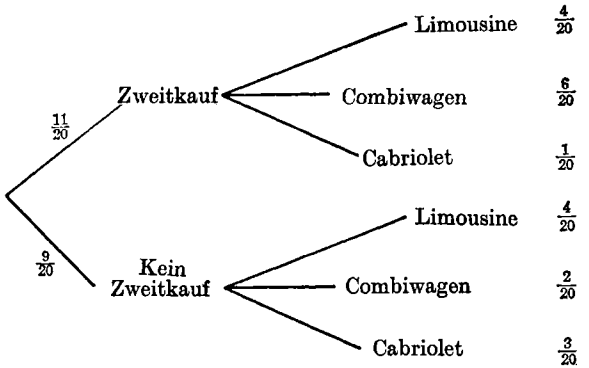


Abb. 10a

Den vervollständigten Baum zeigt Abb. 10b. Hieraus können wir die nachträglichen Wahrscheinlichkeiten entnehmen. Kehrt der Kunde z. B. nicht zurück, dann verän-

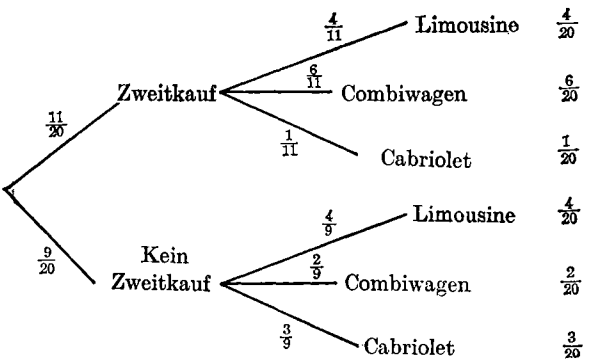


Abb. 10b

derten sich die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß er einen der drei Wagentypen besitzt, auf 4/9, 2/9 bzw.

ÜBUNGEN

1. Im Rahmen einer Verbraucherbefragung werden die Kaffeekäufe bestimmter Personen, nach Kaffeemarken sortiert, festgehalten. Verbraucher A kaufe Marke X mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 und andere Marken mit der Wahrscheinlichkeit 0,4, während Verbraucher B Marke X mit der Wahrscheinlichkeit von 0,3 und alle anderen Marken mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 kaufe. Nehmen Sie an, daß sowohl für A als auch für B jeder Kauf unabhängig von allen früheren Käufen sei.
   a) Stellen Sie einen Baum für drei aufeinanderfolgende Käufe durch A und für drei aufeinanderfolgende Käufe für B auf.
   b) Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß A die Marke X genau zweimal im Rahmen von drei Einkäufen kauft; daß B bei drei Einkäufen zweimal Marke X kauft.
   c) Es sei bekannt, daß A oder B zufällig ausgewählt wurden und daß die Marke X bei drei Einkäufen genau zweimal gekauft wurde. Bestimmen Sie die nachträgliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß der ausgewählte Verbraucher die Person A war. [Lös.: 0,696.]
2. In Übung 1 kaufe der Verbraucher C bestimmte Kaffeemarken nach einem bestimmten System ein, bei dem die Wahrscheinlichkeit des Kaufes einer Marke davon abhängt, welche Kaffeemarke zuletzt gekauft wurde. Ist X die zuletzt gekaufte Kaffeemarke, so sei die Wahrscheinlichkeit für ein nochmaliges Kaufen von X genau 0,8 und die Wahrscheinlichkeit für einen Kauf irgendeiner anderen Marke 0,2. Wenn die zuletzt gekaufte Marke nicht X war, so sei die Wahrscheinlichkeit für einen Kauf der Marke X genau 0,3, während die Wahrscheinlichkeit für den Kauf einer anderen Marke dann 0,7 ist. Stellen Sie einen Baum drei aufeinanderfolgender Kaffee-Einkäufe auf und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Kaffeemarke 2 genau zweimal gekauft wird. Die vom Verbraucher zuletzt gekaufte Kaffeemarke sei
   a) Marke X gewesen;
   b) nicht Marke X gewesen.
3. In Übung 2 setzen wir voraus, daß die ursprüngliche Wahrscheinlichkeit von 0,6 dafür ermittelt worden war, daß der Verbraucher C beim letzten Mal die Marke X kaufte. Wir konnten dann sehen, daß von den drei folgenden Käufen von C zwei die Marke X betrafen. Welche nachträgliche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß der diesen drei Käufen vorangehende Kauf Marke X betraf, wenn
   a) wie die Reihenfolge der drei Einkäufe nicht kennen?
   b) die Einkäufe in der Reihenfolge X, $\sim X$, X getätigt wurden? [Lös.: 0,8.]
   c) die Einkäufe in der Reihenfolge $\sim X$, X, X durchgeführt wurden?
4. Beim Verschneiden von Whisky wird oft mit Hilfe einer Expertengruppe bestimmt, ob ein gegebenes Faß von früheren unterscheidbar ist. Eine sehr bekannte Methode, die Unterscheidungsfähigkeit der Experten zu prüfen, ist der „Triad Test", bei dem dem Tester zwei Proben aus dem gleichen Faß und eine aus einem anderen Faß vorgelegt werden und er gebeten wird, die einzelne Probe zu identifizieren. Nehmen Sie an, daß einem der Experten drei solcher Triad Tests vorgelegt werden. Wir wollen zwei Fässer dann als unterscheidbar bezeichnen, wenn der Fachmann die Einzelproben bei wenigstens zwei der Tests herausfindet. Zeichnen Sie einen Baum, der die Möglichkeiten (falsch oder richtig) der Antworten darstellt. Ermitteln Sie

die Baummaßzahl, die dann anzuwenden ist, wenn die zwei Fässer in Wirklichkeit nicht zu unterscheiden sind, und geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß zwei Fässer als verschieden angesehen werden, die in Wirklichkeit nicht unterscheidbar sind.

5. Betrachten Sie in Beispiel 3 die Reihenfolge der Tätigkeiten: 1. Entwickeln des Bauteiles, 2. Entwickeln von B, 3. Entwickeln von A. Nehmen Sie, wie in diesem Beispiel geschehen, an, daß die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Entwicklung des Bauteiles 0,6, die Wahrscheinlichkeit für die erfolgreiche Entwicklung zunächst von B und dann von A, jedoch 0,8 bzw. 0,2 ist. Zeichnen Sie den Baum und ermitteln Sie die Baummaßzahl.

6. Eine Schachtel enthalte drei defekte und sieben gute Glühbirnen. Zeichnen Sie einen Baum, der die Möglichkeiten für die Entnahme dreier aufeinanderfolgender Glühbirnen zeigt, die zufällig aus dem Kasten genommen werden sollen (und nach der Entnahme nicht zurückgelegt werden). Bestimmen Sie die Baummaßzahl und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens eine gute Glühbirne unter den entnommenen ist. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß dann alle Glühbirnen in Ordnung sind, wenn die erste entnommene gut ist. [Lös.: 119/120, 5/12.]

7. Nehmen Sie in der Übung 7 des 4. Abschnittes an, daß die Raketen solange nacheinander abgeschossen werden, bis eine ins Ziel gelangt. Zeichnen Sie einen Baum dieses Prozesses und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mehr als zwei Raketen abgeschossen werden.

8. Zeigen Sie mit Hilfe eines Baumes, daß die Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins zweier fehlerhafter Stücke in der in Beispiel 2 entnommenen Stichprobe 1/15 ist.

9. Errechnen Sie für Beispiel 2 mit Hilfe der hypergeometrischen Formel die Wahrscheinlichkeiten für das Vorhandensein von genau 0, 1, 2 fehlerhaften Teilen in der Stichprobe.

10. Ermitteln Sie in Beispiel 4 mit Hilfe des Bayesschen Theorems die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Kunde, der einen Zweitkauf tätigt, bereits ein Cabriolet besitzt.

11. Betrachten Sie in Beispiel 2 des ersten Kapitels, Abschnitt 6 die Verhalten in folgender Reihenfolge: 1. Durchführung seismographischer Aufnahmen, 2a. falls diese auf eine günstige Erdrindenstruktur hinweisen, Bohren, 2b. wenn diese Aufnahmen auf eine ungünstige Erdrindenstruktur hinweisen, kein Bohren. Zeichnen Sie einen Baum und ermitteln Sie mit Hilfe der Daten des Beispiels 2, Abschnitt 6 eine Baummaßzahl. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, Öl zu finden?

12. Die Nachfrage nach einem bestimmten Gut schwanke zwischen 0 und 3 Einheiten inkl. Es stehe für den Satz „Es herrscht eine Nachfrage nach i Einheiten" und es sei $\mathbf{Pr}[d_0] = 0{,}1$, $\mathbf{Pr}[d_1] = 0{,}3$, $\mathbf{Pr}[d_2] = 0{,}4$, $\mathbf{Pr}[d_3] = 0{,}2$ und $\mathbf{Pr}[d_i] = 0$ für $i > 3$. Bestimmen Sie eine Baummaßzahl, die die möglichen Nachfragen an jedem der zwei aufeinanderfolgenden Tage angibt und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
    a) die Nachfrage an den zwei Tagen mehr als 2 Einheiten betragen wird. [Lös.: 0,2.]
    b) an den zwei Tagen genau 3 Einheiten nachgefragt werden. [Lös.: 0,28.]
    c) die Verkäufe während der zwei Tage 3 Einheiten übersteigen werden, wenn am Beginn des ersten Tages 2 Einheiten auf Lager liegen und weitere Einheiten am Beginn des zweiten Tages eintreffen. (Verkauft werden könne nur dann, wenn Nachfrage besteht und gleichzeitig Lagerbestände vorhanden sind. Nehmen Sie an, daß die Unfähigkeit, an einem bestimmten Tag die Nachfrage erfüllen zu können, zu einem Verlust der Kaufmöglichkeiten führe.) [Lös.: 0,42.]

13. Nehmen Sie in Beispiel 2 an, daß eine Wahrscheinlichkeit von 0,5 dafür bestehe, daß das Los zwei fehlerhafte Teile enthält und eine Wahrscheinlichkeit von 0,5, daß darin nur ein fehlerhaftes Stück enthalten ist. Ermitteln Sie die Baummaßzahl für Stichproben von drei Stück und geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß
    a) in der Stichprobe genau ein fehlerhaftes Stück enthalten ist.
    b) in der Stichprobe genau zwei fehlerhafte Stücke enthalten sind.
    c) das Los ursprünglich zwei fehlerhafte Teile enthielt, wenn in der Stichprobe nur ein fehlerhaftes Stück enthalten ist.

14. Es seien zwei Urnen A und B vorhanden. Die Urne A enthalte eine schwarze und eine rote Kugel und die Urne B enthalte zwei schwarze und drei rote Kugeln. Es werde zufällig eine Kugel der Urne A entnommen und in die Urne B gelegt. Dann werde zufällig der Urne B eine Kugel entnommen.
    a) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die beiden entnommenen Kugeln die gleiche Farbe haben? [Lös.: 7/12.]
    b) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die erste Kugel rot war, wenn bekannt ist, daß es sich bei der zweiten Kugel um eine schwarze handelte? [Lös.: 2/5.]

15. Nehmen Sie an, daß bei den Weltmeisterschaften jede Mannschaft, unabhängig davon, wie die anderen Spiele ausgehen, mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 jedes Spiel gewinnt. Ermitteln sie dafür die Baummaßzahl (siehe Kapitel 1, Abschnitt 5). Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Meisterschaften nach 4, 5, 6 oder 7 Spielen enden.

16. Nehmen Sie an, daß bei den Weltmeisterschaften die eine Mannschaft stärker sei als die andere und daß sie die Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 gewinnen. Ermitteln Sie eine Baummaßzahl und nennen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
    a) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die stärkere Mannschaft in 4, 5, 6 bzw. 7 Spielen gewinnt.
    b) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die schwächere Mannschaft in 4, 5, 6 bzw. 7 Spielen gewinnt.
    c) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Weltmeisterschaften nach 4, 5, 6 bzw 7 Spielen enden. [Lös.: 0,21. 0,30, 0,27, 0,22.]
    d) die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die stärkere Mannschaft die Weltmeisterschaft gewinnt. [Lös.: 0,83.]

17. Die Wahrscheinlichkeit für einen regnerischen Tag im Monat Mai betrage 0,2. Die Mannschaft D gewinne an einem schönen Tag das Spiel mit der Wahrscheinlichkeit von 0,7, an einem regnerischen Tag jedoch nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4. Wir wissen, daß sie ein bestimmtes Spiel im Monat Mai gewann. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß es an diesem Tag regnete? [Lös.: 1/8.]

18. In einer bestimmten Prüfung gäbe es für jede der gestellten Fragen vier verschiedene Antworten. Ein Student, der die richtige Antwort kennt, wählt daher mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 die richtige, rät er jedoch, so besteht nur die Wahrscheinlichkeit von 1/4 dafür, daß er die richtige Antwort gibt. Wir wollen ferner annehmen, daß ein guter Student 90% aller Antworten weiß, ein schlechter Student nur 50%. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß ein guter Student die Antwort riet, wenn er die richtige gibt?
    Beantworten Sie die gleiche Frage für einen schlechten Studenten, der die richtige Antwort gegeben hat. [Lös.: 1/37, 1/5.]

20. Zu einem bestimmten Zeitpunkt werden drei wirtschaftswissenschaftliche Theoreme aufgestellt, die auf Grund der bekannten Tatsachen alle gleich wahrscheinlich erscheinen. Man beobachte die Entwicklung der amerikanischen Wirtschaft während der folgenden Jahre und es stelle sich heraus, daß für die Entwicklung nach dem ersten Theorem eine Wahrscheinlichkeit von 0,6 und nach den anderen Theoremen eine Wahrscheinlichkeit von 0,6 bzw. 0,2 bestanden. Wie verändert das die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit dieser drei Theoreme?

21. Beim Pokerspiel habe Schmidt eine sehr gute Karte, und er setze einen hohen Betrag. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sein Gegner Johannes eine bessere Karte hat, sei 0,05. Hätte Johannes ein besseres Blatt, so würde er das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 annehmen, mit einem schlechteren Blatt jedoch nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2. Nehmen Sie an, Johannes nähme das Spiel an; welche neue Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß er ein Blatt hält, das ihn gewinnen läßt? [Lös.: 9/47.]

8. Unabhängige Versuche mit zwei möglichen Ergebnissen

Im vorangehenden Abschnitt haben wir eine Methode entwickelt, eine Wahrscheinlichkeitsmaßzahl für eine Reihe von Zufallsversuchen zu bestimmen, bei denen es nur eine endliche Anzahl von Möglichkeiten für jeden der Versuche gibt. Diese schafft zwar den Rahmen für das allgemeine Studium stochastischer Prozesse. Sie ist jedoch zu allgemein, um eine ins Detail gehende Untersuchung zu erlauben. Wir suchen daher in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach vereinfachenden Annahmen, mit deren Hilfe wir leichter mit unseren Wahrscheinlichkeitsmaßzahlen arbeiten können. Ferner ist es wünschenswert, daß diese Annahmen auf eine Vielzahl von praktischen Fällen zutreffen. Wir haben bereits gesehen (siehe Beispiel 2 des vorhergehenden Abschnittes), daß die stichprobenweise Untersuchung einer endlichen Bevölkerung als ein stochastischer Prozeß behandelt werden kann, und wir haben die mit diesem Prozeß verbundene Wahrscheinlichkeitstheorie in Abschnitt 4 detailliert betrachtet. Hier wollen wir uns darauf beschränken, zwei weitere Typen stochastischer Prozesse zu betrachten: Der erste Typ — der Prozeß unabhängiger Versuche, — der auch als erster ausführlich in der Wahrscheinlichkeitstheorie untersucht wurde, soll im vorliegenden Abschnitt behandelt werden. Der zweite Typ, der Markovsche Kettenprozeß, findet immer weitere Anwendung, besonders in den Verhaltenswissenschaften, und wir wollen deshalb in Abschnitt 12 näher darauf eingehen.

Das Vorliegen unabhängiger Versuche kann auf die folgende Weise dargestellt werden: Stellen Sie sich eine Reihenfolge von Zufallsversuchen vor, die aus Wiederholungen eines einfachen Experimentes besteht. Das Ergebnis eines Versuches beeinflusse auf keinerlei Weise die Resultate irgendeines anderen Versuches. Wir wollen die möglichen Ergebnisse eines

einfachen Versuches mit $a_1, \ldots a_r$ bezeichnen. Wir nehmen ferner an, daß uns die Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots p_r$ für jedes dieser Ergebnisse, das bei einem einfachen Versuch eintreten kann, gegeben seien, und daß sie von früheren Resultaten unabhängig seien. Der die Möglichkeiten für die Versuchsfolge darstellende Baum zeigt von jedem Verzweigungspunkt aus die gleichen Ergebnisse an, und die Wahrscheinlichkeit p_j wird jedem Zweig zugeordnet, der zum Ergebnis a_j führt. Die auf diese Weise ermittelte Baummaßzahl ist die Maßzahl einer *Folge unabhängiger Versuche.*

In diesem Abschnitt wollen wir den sehr wichtigen Fall betrachten, bei dem jeder der Versuche zwei mögliche Ergebnisse hat. Der allgemeinere Fall wird dann in Abschnitt 10 untersucht werden.

In dem Fall zweier möglicher Ergebnisse bezeichnen wir das eine Ergebnis mit „Erfolg" und das andere mit „Fehlschlag". So mögen wir z. B. beim Werfen einer Münze das Auftauchen der Zahl mit Erfolg und das des Wappens mit Fehlschlag bezeichnen. Wir wollen annehmen, daß eine bestimmte Wahrscheinlichkeit p für Erfolg und eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ für Fehlschlag gegeben sei. Die Baummaßzahl für eine Folge von drei solchen Versuchen wird in Abb. 11 gezeigt. Die jedem Pfad zugeordneten Gewichte sind am Ende des Pfades angegeben.

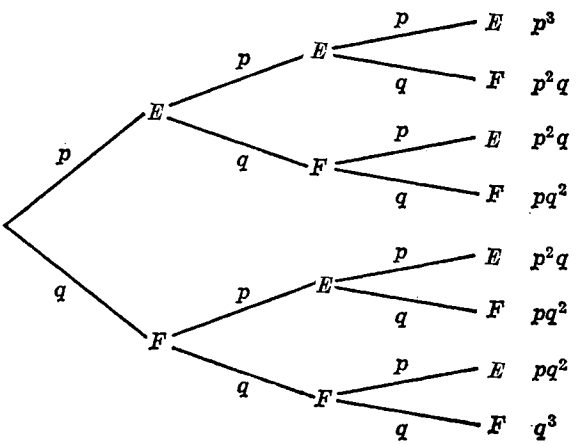


Abb. 11

Wir wollen uns nun die folgende Frage stellen: Welche Wahrscheinlichkeit besteht bei einer Folge unabhängiger Versuche mit zwei möglichen Ergebnissen für genau r Erfolge bei n Experimenten?

Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit $b(r; n, p)$, um damit anzudeuten, daß sie von r, n und p abhängt.

Nehmen Sie an, wir hätten einen Baum für diese allgemeine Situation, bei dem, ähnlich dem in Abb. 11 gezeigten Baum für drei Versuche, die Ver-

zweigungspunkte mit E für Erfolg und F Fehlschlag bezeichnet sind. Die Wahrheitsklasse all der Sätze „Es gibt genau r Erfolge" besteht dann aus all den Pfaden, die durch r mit E bezeichnete und $n - r$ mit F bezeichnete Verzweigungspunkte gehen. Um die Wahrscheinlichkeit für diesen Satz zu bestimmen, haben wir die Gewichte aller dieser Pfade zusammenzuzählen. Hierbei hilft uns die Tatsache, daß unsere Baummaßzahl jedem Pfad das gleiche Gewicht, nämlich $p^r q^{n-r}$ zuordnet. Der Grund dafür ist, daß jeder zu einem E leitende Zweig die Wahrscheinlichkeit p hat, jeder zu einem F leitende Zweig die Wahrscheinlichkeit q und daß das Produkt aus r „p's" und $n - r$ „q" besteht. Um die gewünschte Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, müssen wir also nur die Maßzahl der Pfade der dem Satz „Es gibt genau r Erfolge" entsprechenden Wahrheitsklasse feststellen. Jeder dieser Pfade entspricht einer geordneten Folge der Zahlen von 1 bis n, die über zwei Zellen mit r Elementen in der ersten und $n - r$ Elementen in der zweiten verfügt. Um dies zu erreichen, setzen wir in der ersten Zelle die Anzahl der Versuche ein, bei denen ein Erfolg eintritt, und in der zweiten Zelle die Anzahl derer, bei der ein Fehlschlag eintritt. Es gibt also $\binom{n}{r}$ solcher Folgen, und die Wahrheitsklasse der betrachteten Aussage besteht aus ebensoviel Pfaden. Wir haben daher bewiesen:

In einer Folge voneinander unabhängiger Versuche mit je zwei möglichen Ergebnissen wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau r Erfolge bei n Experimenten auftreten durch

$$\mathfrak{b}(r; n, p) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \tag{1}$$

gegeben.

Eine durch die Formel (1) errechnete Wahrscheinlichkeit wird als eine *binomiale* Wahrscheinlichkeit bezeichnet. In der Tabelle 1, Seite 150, werden die Werte für $b(r; n, p)$ für $p = 0{,}01$, 0,02, 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, 0,25, 0,30, 0,40, 0,50 und für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20$ bei $0 < r < n$ gegeben.

Beispiel 1. Betrachten Sie n Würfe mit einer normalen Münze. Wir wollen die Wappen mit „Erfolg" und die Zahlen mit „Fehlschlag" bezeichnen. Wir wollen fernerhin annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftauchen eines Wappens bei jedem Wurf, unabhängig vom Ergebnis der anderen Würfe, 1/2 sei. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau r-mal das Wappen auftaucht, ist dann

$$\mathfrak{b}\left(r; n, \frac{1}{2}\right) = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei 100 Würfen genau 100mal ein Wappen erscheint, ist z. B. $\mathfrak{b}(50; 100, 1/2) = \binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$, d. h. ca. 0,08. Wir sehen also, daß es recht unwahrscheinlich ist, daß bei genau der Hälfte der Würfe ein Wappen erscheint. Nehmen Sie auf der anderen Seite an, daß wir nach der Wahrscheinlichkeit dafür fragten, daß *ungefähr* die Hälfte der Würfe ein Wappen ergibt. Um uns präzis auszudrücken, lassen

Sie uns nach der Wahrscheinlichkeit dafür fragen, daß die Anzahl der erscheinenden Wappen nicht mehr als 10 von 50 abweicht. Für die Beantwortung dieser Frage müssen wir $\mathbf{b}(r;\ 100,\ 1/2)$ für $r = 40, 41, \ldots, 60$ addieren. Führen wir diese Addition durch, so erhalten wir eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,96. Während es also recht unwahrscheinlich ist, daß genau 50 mal das Wappen auftaucht, ist es sehr wahrscheinlich, daß die Anzahl der geworfenen Wappen nicht mehr als 10 von 50 abweichen wird.

Beispiel 2. Ein elektronisches Bauteil werde in Massen produziert und dann mit Hilfe einer automatischen Prüfmaschine Stück für Stück geprüft. Die Bauteile werden je nach ihren elektronischen Eigenschaften durch die Maschine automatisch als „gut" oder „fehlerhaft" klassifiziert. Wird das gleiche Teil durch die Maschine zweimal getestet, so sollte sie dieses theoretisch zweimal in der gleichen Weise klassifizieren. Wir nehmen jedoch an, daß eine bestimmte Wahrscheinlichkeit q dafür bestehe, daß ein Teil in Folge elektrischer oder mechanischer Fehler von der Maschine falsch klassifiziert wird. Um die Genauigkeit der Klassifikation zu erhöhen, soll die Maschine jedes Stück nicht einmal, sondern r-mal testen, und die Bauteile sollen dann so klassifiziert werden, wie sie in der Mehrzahl der Fälle eingestuft wurden. Um Zweifelsfälle zu vermeiden, wollen wir annehmen, daß r dabei eine ungerade Zahl sei. Lassen Sie uns nun untersuchen, wie dieser Prozeß die Wahrscheinlichkeit von Klassifikationsfehlern herabsetzt:

Wir betrachten für jedes Bauteil r Versuche, wobei der j-te Versuch dann erfolgreich endet, wenn die j-te Untersuchung das Bauteil richtig klassifiziert. Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg ist dann $p = 1 - q$. Die Mehrheitsentscheidung wird ein Bauteil dann richtig klassifizieren, wenn mehr als $r/2$ Erfolge erreicht werden. Nehmen Sie z. B. an, daß wir jedes Stück fünfmal untersuchten und daß die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlklassifizierung bei jedem einzelnen Test 0,1 sei. Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg ist dann 0,9, und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Mehrzahl der Untersuchungen den richtigen Zustand des Stückes ergibt ist

$$\mathbf{b}(3;\ 5,\ 0{,}9) + \mathbf{b}(4;\ 5,\ 0{,}9) + \mathbf{b}(5;\ 5,\ 0{,}9),$$

d. h. sie ist ungefähr 0,991 (siehe Übung 3d). Mit anderen Worten, die obige Vorgehensweise vermindert die Wahrscheinlichkeit einer Fehlklassifizierung von 0,1 im Falle einer Untersuchung, auf 0,009 im Falle von fünf Untersuchungen.

Folgen unabhängiger Versuche werden außer zur Beschreibung bestimmter, im praktischen Leben auftretender Prozesse auch als Approximation von Prozessen der Entnahme endlich vieler Stichproben verwandt. Wir sahen z. B. in Übung 12 des dritten Kapitels, Abschnitt 6, daß sich die Verhältnisse (die, wie in Übung 3 des Abschnittes 4 gezeigt wurde, hypergeometrische Wahrscheinlichkeiten darstellten) dann einer bestimmten Grenze näherten, wenn die Elemente N der Klasse U vermehrt wurden und das Verhältnis R/N konstant gehalten wurde. Diese Grenze ist in Wirklichkeit die binomiale Wahrscheinlichkeit $b(3;\ 5,\ 0.8) = 0{,}2048$.

Allgemein gesagt, nähert sich $h(r;\ n,\ R,\ N)$ dann $b(r;\ n,\ p)$, wenn N wächst und r, n und $p = R/N$ konstant gehalten werden. Wir werden dies in einigen Schritten beweisen: Erstens sind für genügend große N die Zweige des Baumes für den endlichen Stichprobenprozeß identisch mit denen einer Folge unabhängiger Versuche mit zwei möglichen Ergebnissen: Auf jeder

Stufe gibt es genau zwei mögliche Ausgänge des nächsten Versuches. Solange N groß genug ist, können wir nie in die Situation der Abb. 7 kommen, in der alle Elemente einer Zelle der Folge erschöpft sind, so daß es auf irgendeiner Stufe nur noch eine Möglichkeit gibt. So finden wir z. B. bei der stichprobenmäßigen Prüfung eines Loses auf fehlerhafte Teile immer noch genügend viele Stücke, um eine Stichprobe entnehmen zu können, ohne damit die guten oder fehlerhaften Stücke des Loses vollkommen zu erfassen.

Wir schauen uns als nächstes irgendeinen Pfad der Länge n an, der r Erfolge enthält. Das Pfadgewicht muß dann

$$(2) \quad \frac{[R\cdot(R-1)\cdot\ldots\cdot(R-r+1)][(N-R)\cdot(N-R-1)\cdot\ldots\cdot(N-R-n+r+1)]}{[N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-r+1)]\,[(N-r)\cdot(N-r-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)]}$$

sein, da es auf der j-ten Stufe $N-j+1$ Möglichkeiten gibt, die Anzahl der Möglichkeiten eines Erfolges jeweils um 1 von R auf $R-r+1$ abnimmt und die Anzahl der Möglichkeiten eines Fehlschlages jeweils um 1 von $N-R$ auf $N-R-n+r+1$ abnimmt.

Wählen wir N genügend groß und halten $p = R/N$ konstant, so können wir den obigen Bruch beliebig nahe an den Wert

$$(3) \quad \left(\frac{R}{N}\right)^r \left(\frac{N-R}{N}\right)^{n-r} = p^r q^{n-r}$$

mit $q = 1 - p$ annähern. Schließlich beträgt die Anzahl der Pfade, die zu r Erfolgen und $n-r$ Fehlschlägen führen $\binom{n}{r}$, da der Baum endlicher Stichproben die gleichen Zweige zeigt wie der Baum der Folge unabhängiger Versuche, so daß die Wahrscheinlichkeit für r Erfolge bei n Versuchen sich

$$(4) \quad \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \mathfrak{b}(r; n, p)$$

annähert, was wir beweisen wollten.

Im Rahmen der Qualitätskontrolle werden oft von Lieferanten erhaltene Sendungen einer Stichprobenuntersuchung unterzogen; gemäß der durch die Stichprobe erhaltenen Information wird dann das Los entweder akzeptiert oder abgelehnt. Der Zweck einer Stichprobenuntersuchung ist es, neue Informationen über den nicht untersuchten Teil des Loses durch die Untersuchung des in Stichproben entnommenen Teiles zu gewinnen. Im folgenden Beispiel wollen wir diese Vorgehensweise illustrieren:

Beispiel 3. Die Erfahrung habe gezeigt, daß die von einer bestimmten Gesellschaft gelieferten Sendungen ganz grob in gute, mittelmäßige und schlechte eingeteilt werden können. Wir wollen voraussetzen, daß das Auftreten fehlerhafter Stücke in einer guten Sendung durch eine Folge unabhängiger Versuche mit der Wahrscheinlichkeit von 0,2 für fehlerhafte und 0,8 für einwandfreie Stücke beschrieben werden könne. Ein mittelmäßiges Los werde durch eine Folge unabhängiger Versuche mit der Wahrscheinlichkeit von 0,4, für fehlerhafte und ein schlechtes Los durch einen solchen Prozeß mit der

Wahrscheinlichkeit von 0,9 für fehlerhafte Stücke beschrieben. Langfristig stelle die Gesellschaft fest, daß 80% der Sendungen gut, 10% mittelmäßig und 10% schlecht sind.

Von einer gerade erhaltenen Lieferung werde eine Stichprobe, bestehend aus zwei Stück, entnommen und untersucht. Die Anzahl der in dieser Stichprobe befindlichen fehlerhaften Stücke werde erfaßt. Wir wollen das Ergebnis dieser Untersuchung dazu benutzen, nachträgliche Wahrscheinlichkeiten dafür zu ermitteln, daß das Los gut, mittelmäßig oder schlecht ist. In dem Baum der Abb. 12 werden alle relevanten Wahrscheinlichkeiten für den Zeitpunkt vor der Untersuchung gezeigt.

Durch Aufstellung des Baumes in umgekehrter Reihenfolge und durch Errechnung der Zweigwahrscheinlichkeiten, wie sie in Beispiel 4 des Abschnittes 7 gezeigt wurde, erhalten wir den in Abb. 13 gezeigten Baum. Daraus können wir für jedes mögliche Stichprobenergebnis die nachträglichen Wahrscheinlichkeiten dafür ablesen, daß die Sendung gut, mittelmäßig oder schlecht ist. Werden keine fehlerhaften Stücke gefunden, so schließen wir daraus, daß das Los sehr wahrscheinlich gut ist. Werden jedoch zwei fehlerhafte gefunden, so sehen wir, daß das Los mit größerer Wahrscheinlichkeit mehr schlecht als gut oder mittelmäßig ist.

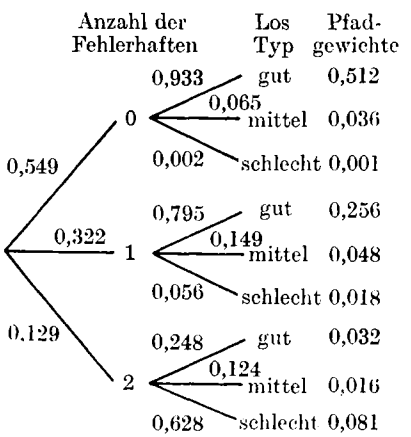


Abb. 12

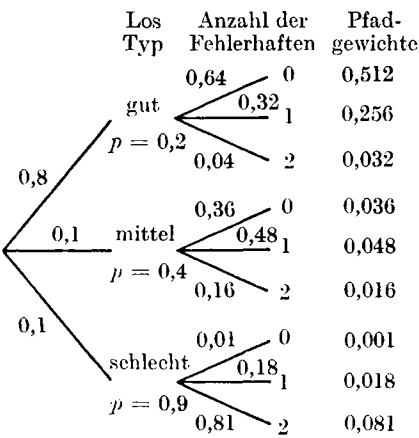


Abb. 13

Im allgemeinen erhalten wir durch Stichprobenuntersuchungen neue Informationen. Es gibt jedoch auch Fälle, in denen dadurch keine neue Information erlangt wird. Kennen wir z. B. vor der Prüfung den entsprechenden Wert von p, dann sagen uns, bedingt durch die Natur der Folgen unabhängiger Versuche, die über die ersten r Versuche erhaltenen Informationen nichts über zukünftige Ergebnisse.

Wir können daher in diesem Fall über die nach der Stichprobenentnahme verbleibenden Elemente nicht mehr aussagen als davor.

ÜBUNGEN

1. Beweisen Sie durch direkte Berechnung die in Tabelle 1 gezeigten Werte für **b(0; 2, 0,5), b(4; 6, 0,1), b(7; 8, 0,2), b(10; 10, 0,3).**

2. Ermitteln Sie unter der Benutzung der Tabelle 1 die Wahrscheinlichkeit für
   a) drei oder mehr Erfolge in einer Stichprobe von 6, wenn $p = 0{,}1$.
   b) weniger als zwei Erfolge in einer Stichprobe von 10, wenn $p = 0{,}2$.
   c) zwischen drei und fünf Erfolge (inkl.) in einer Stichprobe von 10, wenn $p = 0{,}3$.

3. Beweisen Sie, daß $\mathfrak{b}(r; n, p) = \mathfrak{b}(n - r; n, 1 - p)$. Errechnen Sie unter Benutzung dieses Zusammenhanges und der Tabelle 1 die Wahrscheinlichkeit für
   a) vier Erfolge in einer Stückprobe von 6, wenn $p = 0{,}9$.
   b) mehr als acht Erfolge in einer Stichprobe von 10, wenn $p = 0{,}8$.
   c) zwischen sechs und acht Erfolge (inkl.) in einer Stichprobe von 10, wenn $p = 0{,}7$.
   d) mehr als zwei Erfolge in einer Stichprobe von 5, wenn $p = 0{,}9$.

   Benutzen Sie in allen folgenden Übungen, wenn angebracht, die Tabelle 1.

4. Errechnen Sie für $n = 4$, $n = 8$, $n = 12$ und $n = 16$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei der Hälfte der Würfe einer gewöhnlichen Münze das Wappen oben liegt. [Lös.: 0,375, 0,273, 0,226, 0,196.]

5. Errechnen Sie für $n = 4$, $n = 5$, $n = 12$ und $n = 16$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Bruchteil der erhaltenen Wappen nicht mehr als 1/5 von der Hälfte abweicht. [Lös.: 0,375, 0,711, 0,854, 0,923.]

6. Peter und Paul knobeln viermal um Pfennige. (Dabei hat sowohl Peter als auch Paul die Wahrscheinlichkeit von 1/2, einen Pfennig zu gewinnen.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Peter mehr als Paul? Beantworten Sie diese Frage für fünf Würfe und für 12917 Würfe. [Lös.: 5/16, 1/2, 1/2.]

7. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß genau zwei Sechsen geworfen werden, wenn viermal mit einem normalen Würfel gewürfelt wird?

8. Wie oft sollte ein Stück in Beispiel 2 von der Maschine geprüft werden, um die Wahrscheinlichkeit von wenigstens 0,9 dafür zu erreichen, daß die erreichte Antwort richtig ist? Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Maschine ein Stück bei einer einfachen Untersuchung falsch einordnet, sei 0,2.

9. Eine Maschine werde eingerichtet, um ein Los eines bestimmten Teiles in einer gewissen Reihenfolge zu fertigen. Für jedes Stück bestehe eine bestimmte, aber nicht bekannte Wahrscheinlichkeit, fehlerhaft zu sein. Diese Wahrscheinlichkeit sei unabhängig von der Qualität des vorangehenden Stückes. Wurde die Maschine schlecht eingerichtet, und ist daher p hoch, so sei es erforderlich, die Maschine noch einmal einzurichten. Ist dagegen p niedrig, so ist die Anzahl der fehlerhaften Stücke klein, und man kann die Einrichtekosten für die Maschine in engeren Grenzen halten. Um zu bestimmen, ob die Maschine neu eingerichtet werden muß oder nicht, werde eine Stichprobe der Größe n dem Prozeß entnommen. Werden mehr als c fehlerhafte Teile darin gefunden, so solle die Maschine neu eingerichtet werden, andernfalls laufe sie mit der alten Einstellung weiter. Wir nennen dies eine „(n, c) Entscheidungsregel" (siehe Übung 17, Kapitel 1, Abschnitt 5). Ermitteln Sie unter Benutzung der folgenden Entscheidungsregeln die Wahrscheinlichkeit für ein Neueinrichten der Maschine für $p = 0$, 0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5:
   a) (10,0)
   b) (10,1)
   c) (20,0)
   d) (20,1)
   e) (20,2)

10. a) Beweisen Sie, daß bei jedem Prozeß mit zwei möglichen Ergebnissen auf jeder Stufe die Wahrscheinlichkeit für r Erfolge bei n Versuchen die Summe der folgenden zwei Produkte ist:

1) der Wahrscheinlichkeit von r Erfolgen bei $n-1$ Versuchen mal der Wahrscheinlichkeit eines Fehlschlages beim n-ten Versuch;
2) der Wahrscheinlichkeit von $r-1$ Erfolgen bei $n-1$ Versuchen mal der Wahrscheinlichkeit eines Erfolges beim n-ten Versuch. Leiten Sie daraus eine Formel für die binomiale Wahrscheinlichkeit von r Erfolgen bei n Versuchen ab, wenn die Wahrscheinlichkeit von r und $r-1$ Erfolgen bei $n-1$ Versuchen gegeben ist.

b) Beweisen Sie unter Benutzung der gerade abgeleiteten Formel den Wert für $\mathbf{b}(3; 10, 0{,}2)$ aus Tabelle 1. Bauen Sie dabei auf den Werten $\mathbf{b}(3; 9, 0{,}2)$ und $\mathbf{b}(2; 9, 0{,}2)$ auf.

c) Zeichnen Sie ein Flußdiagramm für einen Rechenprozeß zur Errechnung der Werte der Tabelle 1.

11. Beweisen Sie, daß bei jedem Prozeß, der aus Versuchen mit zwei jeweils möglichen Ergebnissen besteht, die Wahrscheinlichkeit für das Erzielen des r-ten Erfolges beim n-ten Versuch gleich dem folgenden Produkt ist: Der Wahrscheinlichkeit, bei $n-1$ Versuchen $r-1$ Erfolge zu erzielen, mal der Wahrscheinlichkeit, einen Erfolg beim n-ten Versuch zu erzielen. Leiten Sie daraus eine Formel ab, mit der Sie die binomialen Wahrscheinlichkeiten dafür errechnen können, daß Sie beim n-ten Versuch den r-ten Erfolg erzielen. Dabei sei gegeben, daß die Versuche voneinander unabhängig sind.

12. Es werden fünf Raketen auf ein bestimmtes Ziel hin abgefeuert. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß das Ziel wenigstens einmal getroffen wird, wenn jede der Raketen das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 trifft?

13. Benutzen Sie das Ergebnis der Übung 11, um die Wahrscheinlichkeit dafür zu errechnen, daß der erste Treffer beim fünften Schuß erfolgen wird, wenn die Raketen, die nacheinander auf ein Ziel abgefeuert werden, dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 treffen. [Lös.: 0,0154.]

14. Bei einer Folge unabhängiger Versuche sei der Wert von p entweder 0,1 oder 0,4; die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten für p seien $\mathbf{Pr}[p = 0{,}1] = 2/3$, $\mathbf{Pr}[p = 0{,}4] = 1/3$. In einer dem Prozeß entnommenen Stichprobe von 10 werden vier Erfolge festgestellt. Errechnen Sie die nachträgliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß $p = 0{,}4$ ist. [Lös.: 0,919.]

15. Nehmen Sie an, daß in Übung 14 die vier Erfolge und sechs Fehlschläge in der Reihenfolge *effeffeffe* beobachtet worden seien. Errechnen Sie die nachträgliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß $p = 0{,}4$. Welchen Einfluß hat es auf die nachträgliche Wahrscheinlichkeit, wenn wir die Reihenfolge wissen, in der die Erfolge erreicht wurden?

16. Es werden von einer Maschine entsprechend einer Folge unabhängiger Versuche fehlerhafter Stücke produziert. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß 0, 1, 2, 3 fehlerhafte in einem gegebenen Los von 10 Stück sind, wenn die Wahrscheinlichkeit p eines fehlerhaften Teiles

a) 0,1
b) 0,4
c) 0,2
d) entweder 0,1 oder 0,4 ist und $\mathbf{Pr}[p = 0{,}1] = 2/3$, $\mathbf{Pr}[p = 0{,}4] = 1/3$ ist?

17. Errechnen Sie die folgenden hypergeometrischen Wahrscheinlichkeiten und ihre binomialen Annäherungen. Wenn sich die Annäherungen als schlecht herausstellen, erklären Sie warum.

a) $\mathbf{h}(3; 5, 20, 40)$.
b) $\mathbf{h}(2; 10, 200, 1000)$.
c) $\mathbf{h}(1; 10, 1, 20)$.
d) $\mathbf{h}(9; 10, 90, 100)$.
e) $\mathbf{h}(3; 8, 4, 10)$.
f) $\mathbf{h}(1; 8, 4, 10)$.

18. Die Folge unabhängiger Versuche kann als ein Modell für das Entnehmen von Stichproben aus einer endlichen Menge „mit Zurücklegen" benutzt werden. Hierbei wird die gezogene Stichprobe jeweils zurückgelegt, ehe die nächste gezogen wird. Es kann daher das gleiche Stück mehr als einmal in einer Stichprobe erscheinen. Im Unterschied hierzu kann man sich den Prozeß, der zu hypergeometrischen Wahrscheinlichkeiten führt, als den Prozeß der Entnahme von Stichproben ohne Rücklegen vorstellen, so daß ein bestimmtes Element einer Menge höchstens einmal in einer Stichprobe erscheinen kann. Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Probleme, einmal unter der Voraussetzung, daß die Stichproben zurückgelegt werden, und ein andermal unter der Voraussetzung, daß sie nicht zurückgelegt werden, und vergleichen Sie diese miteinander.
a) Übung 6, Abschnitt 4.
b) Übung 17, Abschnitt 6.
c) Übung 18, Abschnitt 6.

9*. Das Gesetz der großen Zahl

In dem vorliegenden Abschnitt wollen wir noch einige andere Eigenschaften der Folgen unabhängiger Versuche mit zwei möglichen Ergebnissen betrachten. Wir sahen in Abschnitt 8, daß die Wahrscheinlichkeit für r Erfolge bei n Versuchen gegeben ist durch

$$\mathbf{b}(r; n, p) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}.$$

Wir zeigen diese Wahrscheinlichkeiten in graphischer Form für $n = 8$ und $p = 3/4$ in Abb. 14.

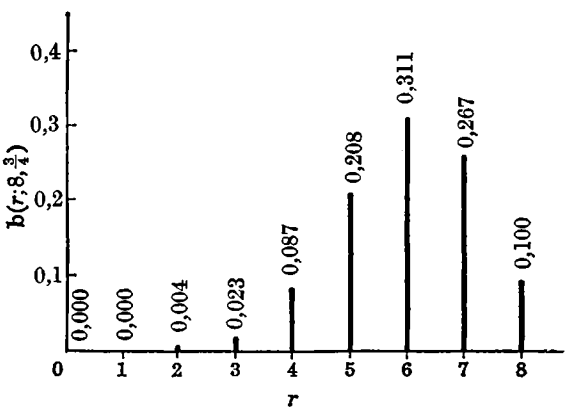


Abb. 14

Das gleiche zeigen wir für $n = 7$ und $p = 3/4$ in Abb. 15.

Wir sehen, daß die Werte im ersten Falle bis zu einem Maximalwert von $r = 6$ ansteigen und dann abfallen. Im zweiten Falle steigen die Werte bis zu einem Maximum von $r = 3$ an, behalten diesen Wert für $r = 6$ bei und fallen dann ab. Dies sind zwei typische Fälle, auf die man immer wieder stößt.

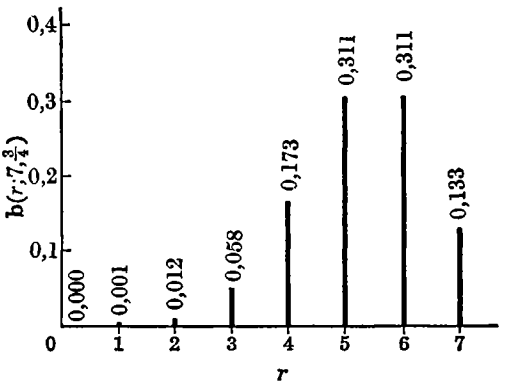


Abb. 15

Wir wollen nun das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit von $r + 1$ Erfolgen bei n Versuchen zu der Wahrscheinlichkeit von r Erfolgen bei v Versuchen betrachten, die sich zu

$$\frac{\binom{n}{r+1} p^{r+1} q^{n-r-1}}{\binom{n}{r} p^r q^{n-r}} = \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q}$$

ergibt.

Dieses Verhältnis wird solange größer sein als 1, wie $(n - r)p > (r + 1)q$ oder solange wie $r < np - q$ ist. Ist $np - q$ keine ganze Zahl, so wachsen die Werte $\binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ bis zu einem Maximalwert, der bei der nächstgrößeren ganzen Zahl von $np - q$ liegt, an und fallen dann ab. Ist $np - q$ eine ganze Zahl, so steigen die Werte von $\binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ bis auf $r = np - q$ an, behalten diesen Wert bei $r = np - q$ und $r = np - q + 1$ und fallen dann ab.

Wir sehen also, daß im allgemeinen mit der größten Wahrscheinlichkeit die Werte in der Nähe von np auftreten werden. Das heißt nicht, daß ein bestimmter Wert in der Nähe von np mit großer Wahrscheinlichkeit auftritt, sondern lediglich, daß er wahrscheinlicher ist als ein Wert, der weit von np entfernt liegt. So ist z. B. bei 100 Würfen einer Münze $np = 100 \cdot 1/2 = 50$.

Die Wahrscheinlichkeit für genau 50 Wappen ist ungefähr 0,08, die Wahrscheinlichkeit für genau 30 ist ungefähr 0,00002.

Weitere Information erhalten wir durch die Betrachtung der Wahrscheinlichkeit einer gegebenen Abweichung des Verhältnisses der Erfolge r/n von der Zahl p, d. h. bei einer Betrachtung der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}[p - \mathscr{E} < r/n < p + \mathscr{E}]$ für $\mathscr{E}$ größer Null.

Für jeden festen Wert von n, p und $\mathscr{E}$ könnte man die letztere Wahrscheinlichkeit durch Addition aller Werte von $b(r; n, p)$ für die Werte von r, für die die Ungleichung $p - \mathscr{E} < r/h < p + \mathscr{E}$ gilt, finden. Dies wäre für irgendeine bestimmte Wahl von n, p und $\mathscr{E}$ eine sehr umfangreiche Rechnung. Es kann jedoch bewiesen werden, daß

$$\mathbf{Pr}\left[p - \varepsilon < \frac{r}{n} < p + \varepsilon\right] \geqq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Unabhängig davon, wie klein $\mathscr{E}$ ist, können wir, wenn wir n groß genug wählen, $1 - (pq/n_\varepsilon{}^2)$ soweit wir es wünschen 1 annähern. D. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Erfolge weniger als $\mathscr{E}$ von p abweichen, kann dadurch willkürlich weit an 1 angenähert werden, daß wir n groß genug wählen. Diese Tatsache kann als ein Sonderfall eines sehr allgemeinen Theorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dem Gesetz der großen Zahl, angesehen werden.

Lassen Sie uns in die obige Ungleichung $\mathscr{E} = k\sqrt{pq/n}$ einsetzen. Wir erhalten dann

$$\mathbf{Pr}\left[p - k\sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{r}{n} < p + k\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] \geqq 1 - \frac{1}{k^2}$$

oder

$$\mathbf{Pr}[np - k\sqrt{npq} < r < np + k\sqrt{npq}] \geqq 1 - \frac{1}{k^2}$$

oder umgeformt

$$\mathbf{Pr}[-k\sqrt{npq} < r - np < k\sqrt{npq}] \geqq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Die Größe np wird der *Erwartungswert* für die Anzahl der Erfolge und die Größe $\sqrt{npq}$ die *Standardabweichung* der Anzahl der Erfolge genannt. Wir sehen, daß die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung, die größer als k Standardabweichungen vom erwarteten Wert ist, kleiner oder gleich $1/k^2$ ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist daher für große k klein.

Mit Hilfe weitgehender Theorien ist es möglich zu zeigen, daß

$$\mathbf{Pr}[-k\sqrt{npq} < r - np < k\sqrt{npq}] \cong z_k,$$

wobei z_k eine Zahl ist, die für jedes k ermittelt werden kann und die nicht von n oder p abhängt. Das Symbol $\cong$ bedeutet, daß die angegebene Wahrscheinlichkeit durch den Wert z_k nur angenähert wird. Diese Annäherung wird jedoch mit steigendem n immer besser.

Bitte beachten Sie, daß die obige Annäherung auch als die Aussage interpretiert werden kann, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $r - np$ entweder größer als $k\sqrt{npq}$ oder kleiner als $-k\sqrt{npq}$ ist, ungefähr $1 - z_k$ ist. Bei vielen Anwendungen ist man nur an der Wahrscheinlichkeit dafür interessiert, daß $r - np$ größer als $k\sqrt{npq}$ ist. Hierfür kann wiederum abgeleitet werden, daß dies ungefähr bei $(1 - z_k)/2$ der Fall ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $r - np$ kleiner als $-k\sqrt{npq}$ ist, ist daher ungefähr $(1 - z_k)/2$.

Es ist vorteilhaft, sich die Standardabweichung als eine Maßzahl vorzustellen. In diesem Falle gibt z_k die ungefähre Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung von weniger als k Einheiten oder k Standardabweichungen an. Die ungefähren Werte von z_k für $k = 1$, 2 und 3 sind $z_1 = 0{,}683$, $z_2 = 0{,}954$ und $z_3 = 0{,}997$. Wir sehen also, daß es bei einer großen Anzahl von Versuchen sehr unwahrscheinlich ist, daß vom erwarteten Wert eine größere Abweichung als drei Standardabweichungen auftritt. Auf der anderen Seite zeigt $z_1 = 0{,}080$, daß eine kleinere Abweichung als 1/10 der Standardabweichung vom erwarteten Wert ziemlich unwahrscheinlich ist.

Beispiel 1. Wirft man eine normale Münze 10000mal, so ist der Erwartungswert der auftauchenden Wappen 5000 und die Standardabweichung für die Anzahl der Wappen $\sqrt{10000\,(1/2)\,(1/2)} = 50$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Anzahl der auftauchenden Wappen von 5000 weniger als eine Standardabweichung abweicht, ist ungefähr 0,683. Die Wahrscheinlichkeit für eine geringere Abweichung als zwei Standardabweichungen oder 100 ist ungefähr 0,954. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zahl der erscheinenden Wappen weniger als drei Standardabweichungen oder 150 vom erwarteten Wert abweicht, ist ungefähr 0,997. Auf der anderen Seite ist die Wahrscheinlichkeit einer geringeren Abweichung als 0,1 Standardabweichungen, d. h. einer geringeren Abweichung als 5, ungefähr 0,080. Die Behauptung, daß die Anzahl der erscheinenden Wappen weniger als 150 von 5000 abweicht, entspricht also der Behauptung, daß das Verhältnis der erscheinenden Wappen weniger als 150/10000 = 0,015 von 0,5 abweicht.

Beispiel 2. Nehmen Sie an, in einer bestimmten großen Stadt würden 900 Personen zufällig ausgewählt und gefragt, ob sie ein bestimmtes Fernsehprogramm während der letzten Nacht gesehen hätten oder nicht. Von diesen 900 behaupteten 150, das Programm gesehen zu haben und 750, es nicht gesehen zu haben. In Wirklichkeit sahen 10% der Stadtbewohner das Programm. Wäre es danach unwahrscheinlich, daß 150 der 900 behaupteten, diesem Programm zugesehen zu haben?

Wir nehmen an, die 900 Personen bildeten eine Folge unabhängiger Versuche mit der Wahrscheinlichkeit von 0,1 für die Antwort „ja" und 0,9 für die Antwort „nein". (Streng genommen bilden sie einen Stichprobenprozeß ohne Rücklegung, so daß die Versuche eigentlich nicht unabhängig voneinander sind. Ist jedoch die Bevölkerungszahl im Verhältnis zur Stichprobengröße groß, so bildet die Folge unabhängiger Versuche eine gute Annäherung. Siehe dazu Abschnitt 8.) Die Standardabweichung für die Anzahl der „ja"-Antworten innerhalb der 900 Versuche ist

$$\sqrt{(900)\,(0{,}1)\,(0{,}9)} = 9.$$

Es wäre daher sehr unwahrscheinlich, daß wir eine größere Abweichung als 27 von der erwarteten Zahl 90 erhielten. Die Tatsache, daß die Abweichung der Stichprobe 60 beträgt, ist daher ein Hinweis darauf, daß die Hypothese, daß 10% der Stadtbevölkerung das Programm gesehen haben, ungenau ist. Die Annahme, daß das wirkliche Verhältnis kleiner als 0,1 ist, führte ebenso zu dem Ergebnis, daß es unwahrscheinlich ist, daß 150 der 900 behaupteten, dem Programm zugesehen zu haben. Dies führt uns dazu, zu bezweifeln, daß das wirkliche Verhältnis größer als 0,1 ist. Wäre auf der anderen Seite die Anzahl derer, die behaupteten, das Programm gesehen zu haben, nur 99 von 900, so hätten wir bei der Annahme, daß 10% aller Stadteinwohner das Fernsehspiel sahen, lediglich eine Abweichung in der Größenordnung einer Standardabweichung. Da eine solche Abweichung nicht unwahrscheinlich ist, könnten wir die Aussage auf Grund der genommenen Stichprobe nicht bezweifeln.

Wir wollen mit p den Anteil der Bewohner bezeichnen, der in Wirklichkeit das Programm sah. Wenn wir von ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten dafür ausgehen, daß p bestimmte Werte hat, so können wir die durch die Stichprobe erhaltene Information dazu benutzen, die nachträglichen Wahrscheinlichkeiten jener Werte für p zu errechnen. Wir könnten dann genauere Aussagen über p machen, als lediglich zu sagen, daß ein bestimmtes Stichprobenergebnis die Möglichkeit, daß $p = 0{,}1$ ist, ausschließt oder zuläßt.

ÜBUNGEN

1. Wieviel geworfene Sechsen können wir erwarten, wenn ein normaler Würfel zwanzigmal geworfen wird? Wie groß ist die Standardabweichung der Zahl der erhaltenen Sechsen? [Lös.: 10/3, 5/3.]

2. Nehmen Sie an, ein normaler Würfel werde 450mal geworfen. Bei wieviel Würfen können wir eine 3 oder eine 4 erwarten? Wie groß ist die Standardabweichung für die Anzahl dieser Würfe?

3. Wieviel Wappen können wir erwarten, wenn wir eine normale Münze 16mal werfen? Wir groß ist die Standardabweichung für die Zahl der erscheinenden Wappen? [Lös.: 8; 2.]

4. Geben Sie die genaue Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Anzahl der erscheinenden Wappen bei 16 Würfen einer normalen Münze a) von der erwarteten Anzahl weniger als eine Standardabweichung abweicht und b) nicht mehr als eine Standardabweichung abweicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einer zulässigen Abweichung von zwei und von drei Standardabweichungen? Zeigen Sie, daß die für große n erhaltenen Annäherungen zwischen den erhaltenen Werten liegen, daß sie jedoch für ein solch kleines n nicht sehr genau sind. [Lös.: 0,546, 0,790, 0,923, 0,979, 0,996, 0,999.]

5. Betrachten Sie ein Folge von n unabhängigen Versuchen mit der Wahrscheinlichkeit p für einen Erfolg. s und t seien Zahlen, die die Bedingung $p < t < s$ erfüllen. Welche Aussage können wir auf Grund des Gesetzes der großen Zahl über

$$\mathbf{Pr}\left[s < \frac{r}{n} < t\right]$$

machen, wenn wir n nach unendlich laufen lassen? Beantworten Sie die gleiche Frage für $s < p < t$.

6. Wir wissen, daß 20% der Verkäufe an Orangensaft in Dosen eine bestimmte Marke betreffen. Nach einer intensiven Werbekampagne ergibt eine Stichprobenprüfung, daß 250 von 900 Verkäufen diese bestimmte Marke betrafen. Was können wir über die Wirkung der Werbekampagne sagen?

7. Welche ungefähre Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß bei einer großen Anzahl unabhängiger Versuche mit der Gewinnwahrscheinlichkeit p die Zahl der erreichten Erfolge von der erwarteten Zahl mehr als eine Standardabweichung, aber weniger als zwei Standardabweichungen abweicht? [Lös.: 0,271.]

8. Eine große Benzingesellschaft habe eine Liste von Kraftfahrern, an die sie Gutscheine zu verschicken beabsichtigt. Man habe sich noch nicht entscheiden können, ob man als Anreiz für das Zur-Verfügung-Stellen der gewünschten Information a) fünf Liter Benzin oder b) eine kostenlose Wagenwäsche anbieten soll. Bei einer Versuchssendung werde der einen, willkürlich ausgesuchten Hälfte der Adressaten das erste und der zweiten Hälfte das zweite Angebot gemacht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in 10000 Antworten zwischen 4850 und 5150 von den Personen stammen werden, denen fünf Liter Benzin angeboten wurden, wenn der Anreiz bei beiden Angeboten gleich hoch ist?

9. Nehmen Sie an, in Beispiel 2 solle die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Bruchteil der Stichprobe der Größe n, der das Programm gesehen haben will, nicht mehr als 0,01 von dem Bruchteil p der Stadtbewohner abweichen, die das Programm wirklich sahen. p sei 0,20. Wie groß müßte n sein? [Lös.: Ungefähr 55555.]

10. Zwei Eisenbahnen konkurrieren bei der Beförderung von 1000 Passagieren, indem sie zur gleichen Zeit Züge laufen lassen. Wieviel Sitze sollte eine Eisenbahngesellschaft einsetzen, wenn sie sicher sein will, daß ihre Kapazität in 99 von 100 Fällen ausreicht und wenn ein Passagier mit der gleichen Wahrscheinlichkeit die eine wie die andere Gesellschaft wählt? [Lös.: 547.]

11. Nehmen Sie an, daß sich 20% der Leser einer bestimmten Zeitschrift daran erinnern können, eine bestimmte Zigarettenreklame in dieser Zeitschrift gesehen zu haben. Bei wie vielen Lesern kann man erwarten, daß sie sich an diese Reklame erinnern, wenn man zufällig 1600 Bezieher aus der Versandliste aussuchte? Wie groß ist die Standardabweichung? Wie groß ist die ungefähre Wahrscheinlichkeit dafür, daß mehr als 352 der 1600 Personen sich an diese Reklame erinnern? [Lös.: 320, 16, 0,23.]

12. Nehmen Sie an, in Übung 11 werden die 1600 Personen unter den Lesern herausgesucht, die Raucher sind. Wie groß ist die erwartete Anzahl derer, die sich von den 1600 an die Reklame erinnern können, wenn vorausgesetzt werden kann, daß Rauchen keinen Einfluß auf das Erinnerungsvermögen eines Menschen hat? Nehmen Sie an, daß mehr als 370 der 1600 Ausgewählten behaupten, die Reklame gesehen zu haben. Was kann über die Hypothese gesagt werden, daß das Rauchen keinen Einfluß auf die Fähigkeit eines Menschen hat, sich an diese Reklame zu erinnern?

13. Wir machten in Beispiel 2 bei unseren Berechnungen die Annahme, daß dann, wenn wir den wirklichen Anteil der Personen, die das Fernsehprogramm sahen, mit p bezeichnen, die 900 zufällig ausgewählten Personen eine Folge unabhängiger Versuche mit der Wahrscheinlichkeit p für eine „ja"-Antwort und $(1 - p)$ für eine „nein"-Antwort darstellten. Nennen Sie eine Auswahlmethode für die 900 Personen, für die diese Annahme gültig wäre. Kritisieren Sie die folgenden Methoden:
   a) Man wählt die ersten 900 Personen der Wahlliste.
   b) Man wählt zufällig 900 Namen aus dem Telefonbuch.
   c) Man wählt zufällig 900 Häuser aus und fragt jeweils eine Person aus den ausgesuchten Häusern bei einem Besuch am frühen Vormittag.
   d) Man wählt 30 repräsentative Häuserblocks der Stadt aus und wählt aus jedem dieser Blocke 30 repräsentative Häuser.

14. Ermitteln Sie für zehn Würfe einer normalen Münze t_n so, daß

$$\mathbf{Pr}\left[-t_n < \frac{r}{n} - \frac{1}{2} < t_n\right] = 0{,}997$$

ist, wobei r die Anzahl der auftauchenden Wappen ist. Ermitteln Sie t_n für $n = 10^4$, $n = 10^6$ und $n = 10^{20}$. [Lös.: 0,015, 0,00015, 0,000000000015.]

15. Nehmen Sie an, eine Rechenmaschine habe eine Million Operationen durchzuführen, um ein bestimmtes Problem zu lösen. Bei jeder Operation gäbe die Maschine mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 die Antwort um 10^{-5} zu klein und mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 um 10^{-5} zu groß an. Nehmen Sie an, die Fehler seien unabhängig voneinander. Welche Genauigkeit kann man von der Antwort erwarten? Wie groß ist diese, wenn die Maschine 10^{10} Operationen ausführt?
[Lös.: $\pm 0{,}02$, ± 2.]

10*. Voneinander unabhängige Versuche mit mehr als zwei möglichen Ergebnissen

Wir wollen die Ergebnisse des Abschnittes 8 erweitern, indem wir den Fall unabhängiger Versuche untersuchen, bei denen jeweils mehr als zwei Ergebnisse möglich sind. Wir wollen annehmen, wir hätten eine Folge voneinander unabhängiger Versuche, deren mögliche Ergebnisse a_1, a_2, . . ., a_k seien, die mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, . . ., p_k auftreten. Wir bezeichnen mit

$$m(r_1, r_2, \ldots, r_k; p_1, p_2, \ldots, p_k)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$ solcher Versuche a_1 genau $r_1$mal auftaucht, a_2 genau $r_2$mal auftaucht usw. Im Falle zweier möglicher Ergebnisse ergäbe dies $m(r_1, r_2; p_1, p_2)$. In Abschnitt 8 schrieben wir dafür $b(r_1; n, p_1)$, da r_2 und p_2 durch n, r_1 und p_1 bestimmt waren. Wir wollen zeigen, wie diese Wahrscheinlichkeit im allgemeinen Fall gefunden werden kann. Auf die Details werden wir jedoch nur für einen speziellen Fall eingehen. Wir wählen zum Zwecke der Illustration $k = 3$ und $n = 5$. Wir wollen $m(1, 2, 2; p_1, p_2, p_3)$ bestimmen.

In Abb. 16 zeigen wir den Teil des Baumes dieses Prozesses, der genügt, um die Möglichkeiten eines Zweiges für einen Pfad (stark gezeichnet), der den Ergebnissen a_2, a_3, a_1, a_2, a_3 entspricht, zu zeigen. Die Baummaßzahl ordnet diesem Pfad das Gewicht $p_2 \cdot p_3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_{2/2,} \cdot p_{2/3}$ zu.

Natürlich gibt es auch andere Pfade innerhalb dieses Baumes, bei denen a_1 einmal, a_2 zweimal und a_3 zweimal auftaucht. Ihnen würde jedoch durch die Baummaßzahl das gleiche Gewicht $p_1 \cdot p_{2/2} \cdot p_{2/3}$ zugeordnet.

Wir müssen daher, um $m(1, 2, 2; p_1, p_2, p_3)$ zu bestimmen, dies Gewicht mit der Anzahl der Pfade multiplizieren, die die angegebene Anzahl der einzelnen Ergebnisse enthalten.

Wir sehen, daß der Pfad a_2, a_3, a_1, a_2, a_3 durch die dreizellige Aufspaltung $[\{3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}]$ der Zahlen von 1 bis 5 beschrieben werden kann. Die erste Zelle zeigt hierbei den Versuch, dessen Ergebnis a_1 ist, die zweite Zelle enthält die beiden Versuche, die a_2 ergeben, und die dritte zeigt die

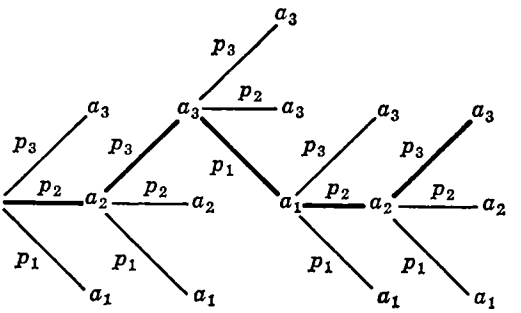


Abb. 16

zwei Fälle, die a_3 ergeben. Jede solcher Aufspaltungen der Zahlen von 1 bis 5 mit einem Element in der ersten Zelle, zweien in der zweiten und dreien in der dritten Zelle entsprechen einem Pfad der gewünschten Art. Die Anzahl solcher Pfade ist daher gleich der Anzahl solcher Aufspaltungen. Da dies

$$\binom{5}{1, 2, 2} = \frac{5!}{1!\,2!\,2!}$$

ist (siehe Kapitel 3, Abschnitt 5), ist die Wahrscheinlichkeit eines einmaligen Auftauchens von a_1, eines zweimaligen Auftauchens von a_2 und von a_3

$$\binom{5}{1, 2, 2} \cdot p_1 \cdot p_{2/2} \cdot p_{3/3}.$$

Das oben Gesagte führt, legt man allgemeine Zahlen zugrunde, für den Fall unabhängiger Versuche mit den Ergebnissen $a_1, a_2, \ldots, a_k$, die mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ auftreten, zu folgendem Lehrsatz:

Die Wahrscheinlichkeit für r_1-maliges Auftreten von a_1, r_2-maliges Auftreten von a_2 usw. wird gegeben durch

$$\mathfrak{m}[(r_1, r_2, \ldots, r_k; p_1, p_2, \ldots, p_k) = \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots p_k^{r_k}.$$

Beispiel 1. Ein Würfel werde 12mal geworfen. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß jede Zahl zweimal auftaucht? Es gibt hier, entsprechend den sechs Seiten des Würfels, sechs mögliche Ergebnisse, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wir ordnen jedem Ergebnis die Wahrscheinlichkeit 1/6 zu. Wir suchen dann also

$$\mathfrak{m}(2, 2, 2, 2, 2, 2; 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6).$$

Dafür erhalten wir

$$\binom{12}{2, 2, 2, 2, 2, 2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0{,}0034\,.$$

Beispiel 2. Nehmen Sie an, wir hätten eine Folge sich wiederholender Versuche mit vier möglichen Ergebnissen, a_1, a_2, a_3, a_4, die mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3, p_4 auftreten. Es kann durchaus vorkommen, daß wir lediglich an der Wahrscheinlichkeit dafür interessiert sind, daß a_1 genau $r_1$mal und a_2 genau $r_2$mal auftritt. Um diese Frage zu beantworten, führen wir einfach einen neuen Versuch mit den möglichen Ergebnissen a_1, a_2 und $a_{\bar{3}}$ ein. Hier entspricht $a_{\bar{3}}$ dem Auftreten entweder von a_3 oder a_4 unseres ursprünglichen Versuches. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten wären dann p_1, p_2 und $p_{\bar{3}}$ mit $p_{\bar{3}} = p_3 + p_4$. Es sei $r_{\bar{3}} = n - (r_1 + r_2)$. Unsere Frage wird dann durch das Finden der Wahrscheinlichkeit dafür, daß in unserem neuen Versuch a_1 genau $r_1$mal auftaucht, a_2 genau $r_2$mal und $a_{\bar{3}}$ genau $r_{\bar{3}}$mal, d. h. durch

$$\binom{n}{r_1, r_2, \bar{r}_3} p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot p_3^{r_3}$$

beantwortet.

In der gleichen Weise können wir bei Versuchen mit einer beliebigen Anzahl von möglichen Ergebnissen vorgehen, wenn die Anzahl des Vorkommens spezieller Ergebnisse zu bestimmen ist. So wird z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem zehnmaligen Werfen eines Würfels die 1 genau zweimal und die 3 genau dreimal auftaucht durch

$$\binom{10}{2, 3, 5} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{4}{6}\right)^5 = 0{,}043$$

gegeben.

ÜBUNGEN

1. Der Durchmesser eines bestimmten Stückes könne innerhalb einer vorgegebenen Toleranz liegen, zu groß oder zu klein sein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von drei willkürlich ausgewählten Stücken eins zu groß ist, eins zu klein ist, und eins innerhalb der vorgegebenen Toleranzen liegt, wenn 10% der von einer Maschine produzierten Stücke zu groß sind und 20% einen zu kleinen Durchmesser haben?
2. Nehmen Sie an, in Übung 1 würden alle die Stücke, die sich innerhalb der vorgegebenen Toleranzen bewegen, mit gut bezeichnet und alle anderen mit schlecht. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, in einer Stichprobe von drei Stück ein gutes und zwei schlechte zu finden?
3. Die Kaffeekäufe eines bestimmten Verbraucherkreises teilen sich wie folgt zwischen drei Marken auf:

Marke	Prozent
A	20
B	30
C	40
alle anderen	10.

Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß sich innerhalb einer zufällig ausgewählten Stichprobe von fünf Käufen (mit Rücklegen) zwei Käufe der Marke C, zwei der Marke B und einer der Marke A befinden? [Lös.: 0,0864.]

4. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß von einer aus fünf Käufen bestehenden Stichprobe genau zwei Käufe die Marke C und ein Kauf die Marke A betreffen? [Lös.: 0,154.]
5. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß in Übung 3 bei einer aus 5 Personen bestehenden Stichprobe mehr als eine Person eine andere Marke als A, B oder C gekauft hat? [Lös.: 0,082]

6. Nehmen Sie an, die folgenden Prozentsätze gelten für den täglichen Kaffeekonsum der Bevölkerung der Vereinigten Staaten:

   25% trinken keinen Kaffee,
   30% trinken eine bis drei Tassen pro Tag,
   30% trinken vier bis sechs Tassen pro Tag,
   15% trinken mehr als sechs Tassen pro Tag.

   Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß in einer zufällig bestimmten Stichprobe von vier Personen der Vereinigten Staaten zwei keinen Kaffee trinken, eine zwischen einer und drei Tassen pro Tag und eine mehr als sechs Tassen pro Tag?

7. Eine Urne enthalte fünf weiße, drei schwarze und drei rote Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß eine aus fünf Kugeln bestehende Stichprobe eine schwarze, eine rote und drei weiße Kugeln enthält, wenn a) die entnommenen Kugeln zurückgelegt werden, b) die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden?

8. Bei einer Folge voneinander unabhängiger Versuche mit drei möglichen Ergebnissen a_1, a_2 und a_3 werden die folgenden ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 zugeordnet:

$$\mathbf{Pr}[(p_1 = 0{,}1) \wedge (p_2 = 0{,}2) \wedge (p_3 = 0{,}7)] = 0{,}6$$
$$\mathbf{Pr}[(p_1 = 0{,}4) \wedge (p_2 = 0{,}2) \wedge (p_3 = 0{,}4)] = 0{,}4.$$

   Bei $n = 6$ Versuchen sei a_1 genau $r_1 = 1$mal beobachtet worden, a_2 genau $r_2 = 4$ mal und a_3 genau $r_3 = 1$mal.

   a) Wie groß ist die nachträgliche Wahrscheinlichkeit
   $\mathbf{Pr}[(p_1 = 0{,}1) \wedge (p_2 = 0{,}2) \wedge (p_3 = 0{,}7) \mid (r_1 = 1) \wedge (r_2 = 4) \wedge (r_3 = 1)]$?
   [Lös.: 0,396.]

   b) Welchen Einfluß hat $r_2 = 4$ auf die Errechnung der nachträglichen Wahrscheinlichkeit? Warum?

   c) Nehmen Sie an, die sechs Beobachtungen seien in der Reihenfolge a_1, a_2, a_3, a_2, a_2, a_2 gemacht worden. Wie beeinflußt diese Information die nachträgliche Wahrscheinlichkeit?

9. Nehmen Sie an, in Übung 8 sei lediglich bekannt, daß bei $n = 6$ Versuchen a_1 genau $r_1 = 1$mal beobachtet worden sei und daß die Werte von r_2 und r_3 unbekannt seien. Welche nachträgliche Wahrscheinlichkeit besteht nun dafür, daß

$$(p_1 = 0{,}1) \wedge (p_2 = 0{,}2) \wedge (p_3 = 0{,}7) \text{ ist?}$$

10. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß wir in Übung 8 bei vier Versuchen $r = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$ beobachten? [Lös.: 0,132.]

11. Ein Ölsucher schätze die Wahrscheinlichkeit für eine Bohrung, bei der er Öl findet, für eine Bohrung, die auf Gas stößt, und für eine erfolglose Bohrung wie folgt:

$$\mathbf{Pr}[\text{Öl}] = 0{,}2,\ \mathbf{Pr}[\text{Gas}] = 0{,}3,\ \mathbf{Pr}[\text{nichts}] = 0{,}5.$$

   Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß bei zehn gebohrten Löchern drei auf Gas stoßen, zwei auf Öl stoßen, und fünf erfolglos sein werden? Die Wahrscheinlichkeiten sollen dabei als unabhängig voneinander betrachtet werden können.

11. Der Erwartungswert

In diesem Abschnitt wollen wir das Konzept des Erwartungswertes betrachten. Obwohl es beim Studieren der Glückspiele entstand, stößt man bei

fast allen Diskussionen, die sich mit Wahrscheinlichkeitsproblemen befassen, darauf.

Definition. Wenn die möglichen Ergebnisse eines Versuches die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sind, die mit der Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, \ldots, p_k$ auftreten, dann wird der Erwartungswert als

$$E = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_k p_k$$

definiert.

Manchmal verwenden wir als Synonym zum „Erwartungswert" den Begriff „Mittelwert".

Der Begriff „Erwartungswert" soll nicht als der Wert interpretiert werden, der unbedingt bei einem einzigen Versuch auftritt. Wettet z. B. eine Person um eine Mark, daß, wenn man eine Münze wirft, das Wappen oben liegen wird, so erwartet sie entweder eine Mark zu gewinnen oder eine Mark zu verlieren. Der Erwartungswert ist dann $(1)\,(1/2) + (-1)\,(1/2) = 0$; er entspricht in diesem Falle also nicht einem der möglichen Ergebnisse. Der Begriff Erwartungswert entstand aus den folgenden Erwägungen: Wenn wir einen Versuch mit dem Erwartungswert E sehr oft wiederholen, und wir erwarten in einem Bruchteil p_1 der Zeit den Wert a_1, in einem Bruchteil p_2 der Zeit den Wert a_2 usw., so ist der Durchschnitt, den wir pro Element erwarten, E. Insbesondere verstehen wir bei einem Glückspiel unter E den durchschnittlich erwarteten Gewinn bei einer großen Anzahl von Spielen. Hat das Spiel einen positiven Erwartungswert, so bezeichnet man es als günstig, hat das Spiel einen Erwartungswert von 0, so bezeichnet man es als fair und hat es einen negativen Erwartungswert, so bezeichnet man es als ungünstig. Diese Begriffe dürfen nicht zu buchstäblich genommen werden, da viele Personen manchmal sehr glücklich sind, wenn sie Spiele spielen können, die, vom Erwartungswert aus gesehen, ungünstig sind.

Beispiel 1. Wir wollen als erstes Beispiel für die Anwendung des Erwartungswertes das Roulettespiel betrachten, wie es in Monte Carlo gespielt wird. Es gibt dabei verschiedene Wettypen, die ein Spieler eingehen kann. Wir wollen zwei davon betrachten: Auf dem Rad sind die Zahlen 0 und 1 bis 36 in gleichmäßigen Abständen aufgetragen. Das Rad wird in Bewegung gesetzt, und eine Kugel kommt auf einer dieser Zahlen zum Stillstand. Hat der Spieler einen Einsatz, sagen wir z. B. eine Mark, auf eine der Zahlen gesetzt, auf der die Kugel zum Stillstand kommt, so bekommt er vom Croupier 36mal seinen Einsatz oder 36 DM zurück. Der erwartete Gewinn für eine Zahlung von 1 DM ist also $36/37 = 0{,}973$ DM. Das kann dahingehend interpretiert werden, daß er langfristig erwarten kann, ungefähr 2,7% seiner Einsätze zu verlieren.
Eine andere Spielart ist die folgende: Ein Spieler setzt auf „rot" oder „schwarz". Die Zahlen von 1 bis 36 sind gleichmäßig auf diese zwei Farben aufgeteilt. Setzt ein Spieler auf rot, und eine rote Nummer erscheint, so erhält er das Zweifache seines Einsatzes. Erscheint eine schwarze Nummer, so verliert er seinen Einsatz. Erscheint eine Null, so wird das Rad solange gedreht, bis es auf einer von 0 verschiedenen Zahl stehenbleibt. Ist diese dann schwarz, so verliert der Spieler, ist sie jedoch rot, so erhält er lediglich

seinen ursprünglichen Einsatz zurück. Bei dieser Spielart bezahlt der Spieler eine DM für einen erwarteten Gewinn von

$$2\left(\frac{18}{37}\right)+1\left(\frac{1}{74}\right)=\frac{73}{74}=0{,}9865\text{ DM}.$$

In diesem Fall kann der Spieler erwarten, ungefähr 1,35% seiner Einsätze, langfristig gesehen, zu verlieren. Der erwartete Verlust ist in diesem Fall nur etwa halb so groß wie im ersten.

Beispiel 2. Ein Spieler werfe einen Würfel und erhalte soviel DM, wie Augen bei seinem Wurf erscheinen. Wieviel sollte der Spieler als Einsatz geben, um ein faires Spiel zu spielen? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns klarmachen, daß der Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/6 jeweils 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 DM gewinnt. Sein erwarteter Gewinn ist daher

$$1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)=3\,\frac{1}{2}\text{ DM}.$$

Sein erwarteter Gewinn wird daher 0 sein, wenn er 3,50 DM einsetzt.

Beispiel 3. Wieviel Erfolge können im Falle von vier unabhängigen Versuchen mit einer Erfolgschance von 1/3 erwartet werden? Wir wissen, daß die Wahrscheinlichkeit für r Erfolge $\binom{4}{r}\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{4-r}$ ist.

Es ist also

$$\begin{aligned}E=&\,0\cdot\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4+1\cdot\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3+2\cdot\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&+3\cdot\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1+4\cdot\binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\\=&\,0+\frac{32}{81}+\frac{48}{81}+\frac{24}{81}+\frac{4}{81}=\frac{108}{81}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Es kann gezeigt werden, daß im allgemeinen bei n Versuchen mit einer Erfolgwahrscheinlichkeit von p die Anzahl der erwarteten Erfolge np ist.

Beispiel 4. Bei einem bestimmten Würfelspiel wird ein Würfelpaar durch einen der Spieler geworfen. Beträgt die Summe der geworfenen Augen 7 oder 11, so gewinnt er. Ist die Summe 2, 3 oder 12, so verliert er. Erreicht er eine andere Summe, so muß er das Würfeln solange fortsetzen, bis er entweder zweimal die gleiche Summe erhält oder eine Augenzahl von 7. Im ersteren Fall gewinnt er, im zweiten verliert er. Lassen Sie uns annehmen, daß er jeweils eine DM gewinne bzw. verliere. Die zwei möglichen Ergebnisse sind dann +1 und —1. Wir wollen den erwarteten Wert des Spieles errechnen. Hierzu müssen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür finden, daß er gewinnt.

Wir stellen diese Möglichkeiten durch ein zweistufiges Baumdiagramm, wie es in Abb. 17 gezeigt wird, dar. Wir können dieses Spiel natürlich bis ins Unendliche fortsetzen. Diese Möglichkeit wollen wir jedoch hier nicht in Betracht ziehen, d. h. unsere Analyse bezieht sich nur auf Spiele, die an irgendeinem Zeitpunkt enden.

Die Zweigmöglichkeiten der ersten Stufe werden durch die 36 Möglichkeiten, die beim Werfen zweier Würfel auftauchen können, bestimmt, wobei vorausgesetzt wird, daß jede Augenzahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geworfen werden kann. Als Zweigwahrscheinlichkeit nehmen wir dann jeweils den Bruchteil der Möglichkeiten, der die-

sem Zweig entspricht. Die Wahrscheinlichkeiten der Zweige auf der zweiten Stufe erhalten wir auf folgende Weise: War z. B. das erste Ergebnis eine 4, so endet das Spiel dann, wenn eine 4 oder eine 7 erscheint. Die möglichen Ergebnisse der Würfe waren dann

$$\{(3, 1), (1, 3), (2, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (5, 2), (1, 6), (6, 1)\}.$$

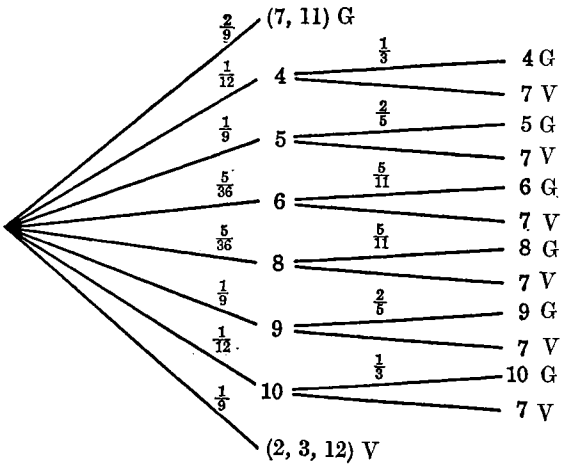


Abb. 17

Wir betrachten diese Möglichkeiten wiederum als gleichwahrscheinlich und ordnen den Zweigen jeweils den Bruchteil der Ergebnisse zu, der ihnen entspricht. So ordnen wir z. B. dem Zweig 4 die Wahrscheinlichkeit 3/9 = 1/3 zu. Die anderen Zweigwahrscheinlichkeiten werden auf ähnliche Weise ermittelt. Haben wir die Baummaßzahl zugeordnet, so haben wir, um die Wahrscheinlichkeit eines Gewinnes zu ermitteln, lediglich die Gewichte aller Pfade zu addieren, die zu einem Gewinn führen. Wir erhalten dann 244/495. Der Erwartungswert des Spielers ist also $1 \cdot (244/495) + (-1)(251/495) = -7/495$ oder ungefähr −0,0141. Der Spieler kann demnach erwarten, ungefähr 1,41% seines Einsatzes, langfristig gesehen, zu verlieren. Es ist interessant zu beobachten, daß das gerade etwas weniger günstig als das Setzen auf „rot" beim Roulette ist.

Beispiel 5. Bei Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit möchten Geschäftsleute oft den erwarteten monetären Wert einer oder mehrerer *Strategien* wissen, wobei wir als eine Strategie eine Reihenfolge von Aktionen verstehen, die jeweils von den tatsächlichen Ereignissen abhängen. Wenn wir für jede Reihenfolge von Ereignissen, die bei einer gegebenen Strategie vorliegen kann, 1) einen monetären Wert und 2) eine Wahrscheinlichkeit errechnen können, so können wir den erwarteten monetären Wert der Strategie ermitteln.

Suchen wir z. B. für den Fall des Ölsuchers von Beispiel 2 des Abschnittes 6 den erwarteten monetären Wert der folgenden Strategie: Durchführung seismographischer Untersuchungen; wenn sie auf eine günstige Erdrindenstruktur hinweisen, Bohren; wenn nicht, verkaufen der Bohrrechte. Nehmen Sie an, es koste 10000 DM, die seismographischen Aufnahmen durchzuführen, und es könnten 50000 DM durch den Verkauf der Bohrrechte erlöst werden, bevor gebohrt worden ist, jedoch nichts, nachdem bereits

eine Bohrung vorgenommen worden ist. Es koste weiterhin 80000 DM, um eine Quelle anzubohren, und der Wert einer Quelle sei 400000 DM. Die monetären Werte der möglichen Ereignisse, die bei der festgelegten Strategie vorkommen können, sind dann

$$\begin{aligned} \sim s \wedge d\text{:} &\quad -\text{DM } 10000 + \text{DM } 50000 = +\text{DM } 40000 \\ \sim s \wedge o\text{:} &\quad -\text{DM } 10000 + \text{DM } 50000 = +\text{DM } 40000 \\ s \wedge d\text{:} &\quad -\text{DM } 10000 - \text{DM } 80000 = -\text{DM } 90000 \\ s \wedge o\text{:} &\quad -\text{DM } 10000 - \text{DM } 80000 + \text{DM } 400000 = +\text{DM } 310000. \end{aligned}$$

Benutzen wir die Wahrscheinlichkeiten des Beispiels 2 von Abschnitt 6, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}[\sim s \wedge d] &= 0{,}4, & \mathbf{Pr}[\sim s \wedge o] &= 0{,}1, \\ \mathbf{Pr}[s \wedge d] &= 0{,}3, & \mathbf{Pr}[s \wedge o] &= 0{,}2. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \mathrm{E} = (0{,}4)\,(\text{DM } 40000) + (0{,}1)\,(\text{DM } 40000) + (0{,}3)\,(-\text{DM } 90000) \\ + (0{,}2)\,(\text{DM } 310000) = +\text{DM } 55000. \end{aligned}$$

Beachten Sie, daß wir die Reihenfolge der möglichen Ereignisse für die gegebene Strategie auch als einen stochastischen Prozeß behandeln könnten. Wir haben in Abb. 18 einen Baum für die gegebene Strategie aufgezeichnet und haben jeden Zweig mit einem DM-Wert und einer bestimmten Wahrscheinlichkeit bezeichnet:

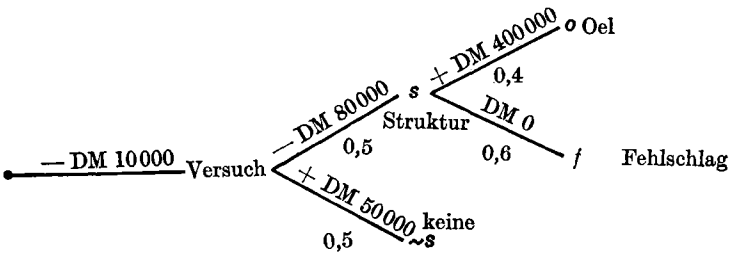


Abb. 18

Natürlich hat die erste Stufe (Versuch) die Wahrscheinlichkeit 1, da gemäß der gegebenen Strategie auf jeden Fall ein Versuch unternommen werden wird. Die Wahrscheinlichkeiten jeder Stufe entsprechen denen des Beispiels. Z. B.

$$\mathbf{Pr}[s \wedge o] = (0{,}5)\,(0{,}4) = 0{,}2.$$

Um den erwarteten Wert dieser Form zu erhalten, können wir auf zweierlei Weise vorgehen: Der erste Weg entspricht dem Weg, auf dem wir den erwarteten Wert schon früher errechneten: Wir errechnen für jeden Pfad zunächst das Pfadgewicht und suchen dann den Wert des Pfades durch die Addition der Werte aller Zweige entlang des Pfades. Wir bilden dann das Produkt aus Pfadgewicht und Pfadwert und addieren die Produkte aller Pfade. So ist das Gewicht für den Pfad „Versuch, Struktur, Öl" (0,5)(0,4) = 0,2. Der Wert ist dann

$$-\text{DM } 10000 - \text{DM } 80000 + \text{DM } 400000 = +\text{DM } 310000$$

und das Produkt ist (DM 310000)(0,2) = DM 62000. Entsprechend ist das Produkt für den Pfad „Versuch, Struktur, Fehlschlag" —DM 27000 und für „Versuch, keine Struktur" +DM 20000, so daß der erwartete Wert wie vorher

$$+\text{DM } 62000 - \text{DM } 27000 + \text{DM } 20000 = +\text{DM } 55000 \text{ ist.}$$

Ein alternativer Weg, diese Rechnung durchzuführen, ist, zunächst die Konsequenzen der letzten Stufe durch ihren Erwartungswert zu ersetzen, diese Größe zum Wert der vorhergehenden Stufe zu addieren und den Erwartungswert der so erhaltenen Werte zu verwenden. So wäre z. B. die erwartete Reineinnahme, wenn wir den Versuch unternommen hätten, auf eine günstige Struktur gestoßen wären, uns entschlossen hätten, eine Bohrung durchzuführen und die erforderlichen DM 80000 ausgegeben hätten, jedoch noch nicht wüßten, ob das Bohrloch auf Öl stößt oder nicht

$$(0{,}4)\,(\text{DM } 400000) + (0{,}6)\,(0) = \text{DM } 160000.$$

Der erwartete Nettowert des Vorgehens entlang des mit „Struktur" bezeichneten Pfades wäre somit der Erwartungswert von DM 160000, abzüglich der Kosten für das Bohren, nämlich DM 80000. Da man mit der Wahrscheinlichkeit von 0,5 entlang dieses Zweiges vorgehen wird und mit der Wahrscheinlichkeit von 0,5 entlang dem mit „keine Struktur" bezeichneten Zweig, der eine bekannte Kostenkonsequenz von + DM 50000 bedeutet, ist der Erwartungswert beim Ausgangspunkt dieser beiden Zweige

$$(0{,}5)\,(\text{DM } 80000) + (0{,}5)\,(\text{DM } 50000) = \text{DM } 65000.$$

Um zu diesem Punkt zu kommen, muß man jedoch 10000 DM für den Versuch ausgeben. Der Erwartungswert für die gesamte Strategie ist daher wiederum 65000 DM — DM 10000 — DM 55000. Diese Analysemethode wird gewöhnlich „rückschreitende Induktion" genannt.

ÜBUNGEN

1. Nehmen Sie an, A werfe zwei Münzen und erhalte 2 DM, wenn zwei Wappen erscheinen, eine DM, wenn ein Wappen erscheint und nichts, wenn kein Wappen erscheint. Wie groß ist für ihn der Erwartungswert des Spieles? [Lös.: 1 DM.]

2. Müller und Schulze knobeln miteinander. Der Gewinner bekomme jeweils eine DM.
   a) Wie hoch ist der erwartete Wert des Spieles für Müller, wenn ein Spiel aus einem zweimaligen Knobeln besteht?
   b) Nehmen Sie an, daß Müller das Spiel beende, wenn er die erste Runde gewinnt, und weiterspiele, wenn er sie verliert. Schulze dürfe das Spiel nicht beenden. Wie hoch ist der Erwartungswert des Spieles für Müller?

3. Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der erscheinenden Wappen, wenn fünf Münzen auf einmal geworfen werden? [Lös.: 5/2.]

4. Eine Münze solle solange geworfen werden, bis zum erstenmal das Wappen erscheint oder bis dreimal hintereinander eine Zahl erschienen ist. Nennen Sie die erwartete Anzahl, die die Münze zu werfen ist.

5. Bei Wetten mit der Gewinnwahrscheinlichkeit von 0,5 ist ein populäres Wett-„System", immer dann fortzufahren, wenn man verliert, und den Einsatz auf jeder Stufe zu verdoppeln, bis man einen Gewinn erzielt. Nehmen Sie an, die erste Wette ging um eine DM, und das Wettkapital betrage 3 DM, so daß der Teilhaber, wenn er zweimal hintereinander verliert, aufhören muß. Welchen Erwartungswert hat das Spiel für ihn? [Lös.: 0.]

6. Wie hoch ist der Erwartungswert des Spieles in Übung 5, wenn das Wettkapital auf a) DM 7, b) DM 15, c) DM 31 begrenzt ist? d) Nehmen Sie an, ein Wetter habe genug Kapital, um zwanzigmal zu spielen und dabei jeweils seinen Einsatz zu verdoppeln. Welchen Erwartungswert hat das Spiel für ihn? Wieviel Kapital ist erforderlich?

7. Beweisen Sie, daß der Erwartungswert eines neuen Experimentes $E + c$ ist, wenn der Erwartungswert des gegebenen Experimentes E ist und eine Konstante c zu jedem der Ergebnisse hinzugezählt wird.

8. Beweisen Sie, daß der Erwartungswert des neuen Experimentes $k \cdot E$ ist, wenn der Erwartungswert eines gegebenen Experimentes E ist und wenn jedes der möglichen Ergebnisse mit der Konstanten k multipliziert wird.

9. Errechnen Sie für das Beispiel des Ölsuchers die Erwartungswerte der folgenden Strategien, indem Sie die entsprechenden Teile des Baumes zeichnen und 1) die Pfadgewichte und Pfadwerte errechnen, 2) sich der „rückschreitenden Induktion" bedienen:
   a) Bohren.
   b) Verkaufen der Bohrrechte.
   c) Durchführung seismographischer Aufnahmen, wenn sie keine günstige Struktur verraten, bohren; wenn sie auf eine günstige Struktur hinweisen, Verkauf der Bohrrechte.

   Welche dieser Strategien ist die beste?

10. Zwei andere mögliche Strategien für Übung 9 sind:
   d) Durchführung seismographischer Aufnahmen, wenn sie auf eine günstige Struktur hinweisen, bohren; wenn sie auf keine günstige Struktur hinweisen, bohren.
   e) Durchführung seismographischer Aufnahmen, wenn sie auf günstige Struktur hinweisen, Verkaufen der Rechte; weisen sie auf keine günstige Struktur hin, Verkaufen der Rechte. Welche erwarteten Werte haben diese Strategien? Warum ist es nutzlos, sie zu betrachten, wenn man nach der besten Strategie sucht.

11. Nehmen Sie an, die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Entwicklung des Bauteiles in Beispiel 3 des Kapitels 1, Abschnitt 6, sei 0,6. Die Wahrscheinlichkeit, dann erfolgreich B zu entwickeln, sei 0,7. Ist jedoch die Reihenfolge der Entwicklung erst B, dann A, so seien die Wahrscheinlichkeiten für einen Erfolg 0,5 bzw. 0,4. Nehmen Sie an, die Entwicklungskosten für das Bauteil seien 100000 DM, die Kosten für die darauffolgende Entwicklung von A 100000 DM, für B zusätzlich 50000 DM. Wird jedoch in der Reihenfolge erst B dann A entwickelt, so betrügen die Kosten für B 150000 DM und für A 50000 DM. Die Erträge der Entwicklungserfolge seien beim Bauteil 150000 DM, bei A 120000 DM und bei B 300000 DM, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Entwicklungen vorgenommen werden.
   Nennen Sie die möglichen Strategien und bestimmen Sie deren Erwartungswerte. Welche der Strategien hat den höchsten Erwartungswert?

12. Zeigen Sie, daß in einer Folge unabhängiger Versuche mit einer Erfolgschance von $p = 0{,}2$ die erwartete Anzahl von Erfolgen bei $n = 8$ Versuchen $np = (0{,}2)(8) = 1{,}6$ ist.

13. Wieviel Treffer können in Übung 7 c des Abschnittes 4 erwartet werden? [Lös.: 3/2.]

14. Beantworten Sie für Übung 3 des Abschnittes 6 die folgenden Fragen:
   a) Wie hoch ist die erwartete Nachfrage an einem Tag?
   b) Zeigen Sie, daß die an zwei aufeinanderfolgenden Tagen zu erwartende Gesamtnachfrage zweimal so hoch ist wie die erwartete Nachfrage eines Tages.
   c) Wie hoch ist die erwartete Gesamtnachfrage an zwei aufeinanderfolgenden Tagen, wenn die Nachfrage für einen der Tage eine Einheit betrug?

d) Wie hoch ist die gesamte erwartete Nachfrage an zwei aufeinanderfolgenden Tagen, wenn die Nachfrage des ersten Tages mit einer Einheit angegeben wird?

15. Wie hoch ist die erwartete Fehlerzahl eines zufällig ausgewählten Stückes in Übung 9 des Abschnittes 3? [Lös.: 0,260.]

16. Beantworten Sie die folgenden Fragen für Übung 13 des Abschnittes 7:
    a) Wie hoch ist die erwartete Fehlerzahl in einer Stichprobe, die aus drei Stücken besteht? [Lös.: 9/20.]
    b) Wie hoch ist die erwartete Fehlerzahl im Los, ehe die Stichprobe entnommen wird? [Lös.: 3/2.]
    c) Wie hoch ist die ursprünglich im Los zu erwartende Fehlerzahl, wenn ein fehlerhaftes Stück in einer Stichprobe von drei Stück gefunden wurde? Wie hoch ist die erwartete Fehlerzahl unter den sieben nicht geprüften Stücken? [Lös.: 1,61, 0,61.]

17. Nehmen Sie in Übung 7 des 4. Abschnittes an, daß die Raketen nacheinander abgefeuert würden, bis eine das Ziel erreicht. Wie viele Raketen müssen erwartungsgemäß abgefeuert werden?

18. Nehmen Sie an, daß in Beispiel 2 des 8. Abschnittes eine Wahrscheinlichkeit von 0,9 dafür bestehe, daß bei einer bestimmten Prüfung ein Stück richtig klassifiziert werde. Betrachten Sie den folgenden Prüfvorgang: Jedes Stück werde solange Prüfungen unterzogen, bis es zweimal als gut oder zweimal als schlecht bezeichnet worden ist. Wie oft muß ein Stück, das wirklich gut ist, einer Prüfung unterzogen werden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es als fehlerhaft klassifiziert wird? [Lös.: 2,18, 0,028.]

19. Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der abzuschießenden Raketen in Übung 13 des 8. Abschnittes, wenn sie nacheinander solange abgeschossen werden, bis 1. das Ziel getroffen wurde oder 2. zehn Raketen abgeschossen worden sind? Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß mehr als zehn Raketen abzufeuern sind, um einen Treffer zu erreichen?

20. Zeigen Sie, daß bei einer Folge unabhängiger Versuche mit je drei möglichen Ergebnissen a_1, a_2 und a_3 und den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 die erwartete Anzahl der sich ergebenden Resultate bei $n = 3$ und $i = 1, 2, 3$ $a_i = np_i = 3p_i$ ist. Benutzen Sie dieses Resultat, um die erwartete Anzahl der Stücke zu errechnen, die in Übung 1 des Abschnittes 10 zu groß bzw. zu klein sind oder die innerhalb der vorgeschriebenen Toleranzgrenzen liegen.

12. Markovsche Ketten

Der Prozeß, mit dem wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen wollen, ist allgemeiner als diejenigen, die wir in den letzten drei Abschnitten betrachteten.

Wir wollen annehmen, wir führten eine Reihe von Versuchen mit den folgenden Eigenschaften durch: Jeder Versuch habe eine endliche Anzahl möglicher Resultate $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Es werde vorausgesetzt, daß die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Resultates a_j bei einem gegebenen Experi-

ment nicht unbedingt unabhängig von den Ergebnissen der vorigen Experimente sei, daß sie jedoch höchstens vom Ergebnis des unmittelbar vorausgehenden Experimentes abhänge. Wir wollen ferner annehmen, daß die gegebenen Zahlen p_{ij} die Wahrscheinlichkeit des Resultates a_j eines gegebenen Experimentes darstellen, wenn das vorangehende Experiment das Resultat a_i hatte; die Ergebnisse $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sollen *Zustände* und die Zahlen p_{ij} *Übergangswahrscheinlichkeiten* genannt werden. Wenn wir annehmen, daß der Prozeß in einem bestimmten Zustand beginnt, so verfügen wir über genug Information, um die Baummaßzahl für den Prozeß zu bestimmen und die Wahrscheinlichkeiten von Aussagen zu errechnen, die zu der Gesamtversuchsfolge in Beziehung stehen. Ein Prozeß der oben beschriebenen Art wird *Markovscher Kettenprozeß* genannt.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten können auf zwei verschiedene Weisen dargestellt werden: Der erste Weg ist der der Darstellung in quadratischer Anordnung. Für eine Markovsche Kette mit den Zuständen a_1, a_2, a_3 sieht das dann wie folgt aus:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Eine solche Anordnung ist ein spezieller Fall einer Matrix. Da Matrizen von grundlegender Bedeutung für das Studium Markovscher Ketten und für das Studium vieler anderer Gebiete der Mathematik sind, sollen sie im einzelnen im nächsten Kapitel betrachtet werden.

Ein zweiter Weg, die Übergangswahrscheinlichkeiten darzustellen, ist der durch ein *Übergangsdiagramm*. Abb. 19 zeigt ein solches Diagramm für einen speziellen Fall. Die Pfeile jedes Zustandes weisen auf die möglichen Zustände hin, in deren Richtung sich der Prozeß bewegen kann.

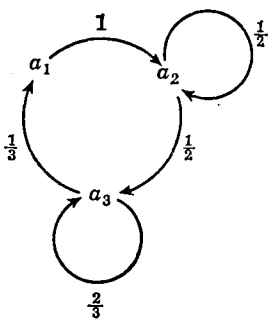


Abb. 19

Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten, die diesem Diagramm entspricht, ist die Matrix

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Der Wert 0 weist darauf hin, daß der Übergang unmöglich ist.

Beachten Sie, daß in der Matrix P die Summe aller Elemente einer Zeile 1 ist; dies muß bei jeder Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten der Fall sein, da die Elemente der i-ten Zeile die Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten darstellen, bei denen sich der Prozeß im Zustand a_i befindet.

Beim Studium der Markovschen Ketten interessiert uns vor allem das folgende Problem: Nehmen Sie an, der Prozeß beginne im Zustand i. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß er sich nach n Stufen im Zustand j befindet? Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit $p_{ij}^{(n)}$. Bitte beachten Sie, daß wir damit nicht die n-te Potenz der Zahl p_{ij} meinen. An dieser Wahrscheinlichkeit sind wir eigentlich für alle möglichen Ausgangspositionen i und alle möglichen Endpositionen j interessiert. Diese Zahlen können vorteilhafterweise wiederum durch eine Matrix dargestellt werden. So können die Wahrscheinlichkeiten einer Markovschen Kette mit n Schritten und drei Zuständen in Form der Matrix

$$p^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & p_{13}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & p_{23}^{(n)} \\ p_{31}^{(n)} & p_{32}^{(n)} & p_{33}^{(n)} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Beispiel 1. Wir wollen für die Markovsche Kette, deren Übergangswahrscheinlichkeiten in Abb. 19 gezeigt werden, die Wahrscheinlichkeit dafür suchen, daß sie nach drei Schritten an den verschiedenen möglichen Zuständen angelangt ist. Wir wollen voraussetzen, daß der Prozeß im Zustand a_1 beginnt.
Wir erhalten diese Wahrscheinlichkeiten durch das Aufstellen eines Baumes und die Ermittlung einer Baummaßzahl, wie es in Abb. 20 gezeigt wird.
Die Wahrscheinlichkeit $p_{13}^{(3)}$ ist z. B. die Summe aller Gewichte, die durch die Baummaßzahl all den Pfaden zugeordnet wurde, die im Zustand a_3 enden. Das ist in diesem Falle

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12}.$$

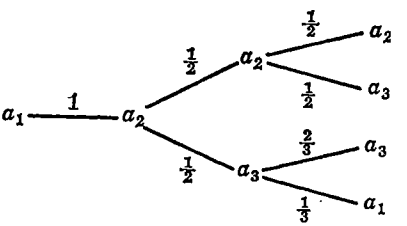


Abb. 20

Entsprechend ist

$$p_{12}^{(3)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ und } p_{11}^{(3)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Setzen wir voraus, daß wir in dem Zustand a_2 beginnen, so können wir durch das Aufstellen einer ähnlichen Baummaßzahl $p_{21}^{(3)}$, $p_{22}^{(3)}$ und $p_{23}^{(3)}$ ermitteln. Das gleiche gilt für $p_{31}^{(3)}$, $p_{32}^{(3)}$ und $p_{33}^{(3)}$. Haben wir diese Operationen durchgeführt (siehe Übung 7), so können wir die Resultate in Form der folgenden Matrix darstellen:

$$P^{(3)} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{36} & \frac{7}{24} & \frac{37}{72} \\ \frac{4}{27} & \frac{7}{18} & \frac{25}{54} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Auch hier sind die Zeilensummen alle gleich 1, entsprechend der Tatsache, daß wir, wenn wir in einem gegebenen Zustand beginnen, nach drei Schritten irgendeinen

anderen Zustand erreicht haben müssen. Beachten Sie bitte, daß alle Elemente der Matrix positiv sind. Das weist darauf hin, daß es möglich ist, jeden Zustand von irgendeinem Zustand in drei Schritten zu erreichen. Im nächsten Kapitel werden wir eine einfache Methode entwickeln, $p^{(n)}$ zu errechnen.

Beispiel 2. Nehmen Sie an, wir wollten die Käufe eines bestimmten Produktes durch einen gegebenen Käufer studieren. Wir wollen langfristige Voraussagen machen und werden daher nicht die Bedingungen betrachten, unter denen bestimmte Käufe geschehen, wie z. B. ungewöhnlich intensive Werbekampagnen, spezielle Preisreduzierungen u. ä. Wir wollen unsere Voraussagen nur auf Erfahrungen der Vergangenheit aufbauen, die wir z. B. aus Verbraucherbefragungen beziehen. Bei der Betrachtung der Käufe der Vergangenheit werden wir zwischen Käufen der Marke A (die wir mit einem A bezeichnen werden) und Käufen irgendeiner anderen Marke (die wir mit X bezeichnen wollen) unterscheiden. Es ist klar, daß uns die Kenntnis bezüglich vergangener Verhaltensweisen bei unseren zukunftsbezogenen Voraussagen beeinflussen würden. Wir wollen jedoch als eine erste Annäherung annehmen, daß uns die Kenntnis über Verhaltensweisen, die weiter als bis zu den letzten Käufen zurückgeht, nicht dazu veranlassen würde, die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse der nächsten Käufe abzuändern. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir eine Markovsche Kette mit den zwei Zuständen A und X und der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{array}{c} \\ A \\ X \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & X \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \end{array}.$$

Die Größen a und b könnten auf Grund der vergangenen Resultate wie folgt geschätzt werden: Wir könnten für a den Bruchteil der Käufe von A, auf die X folgt, einsetzen und entsprechend für b verfahren.
Eine bessere Annäherung erhalten wir jedoch durch die Berücksichtigung der vorausgehenden zwei Käufe. In diesem Falle sind unsere Zustände AA, AX, XA und XX. Sie bezeichnen jeweils die Ergebnisse zweier aufeinanderfolgender Käufe. Befinden wir uns in dem Zustand AA, so bedeutet das, daß die letzten zwei Käufe die Marke A betrafen. Befinden wir uns in dem Zustand XX, so bedeutet das, daß die letzten zwei Käufe die Marke A nicht betrafen; d. h. jedoch nicht unbedingt, daß sie eine gleiche andere Marke betrafen. Befinden wir uns jetzt in dem Zustand XX, und der nächste Kauf betrifft Marke A, so werden wir uns dann in dem Zustand XA befinden. So kann z. B. eine Reihe von Käufen durch $XXXAXAA$ dargestellt werden, wobei sich unser Prozeß vom Zustand XX nach XX, nach XA, nach AX, nach XA und schließlich nach AA bewegt hat. Bitte beachten Sie, daß der erste Buchstabe des Zustandes, in dessen Richtung wir uns bewegen, mit dem zweiten Buchstaben des Zustandes, von dem wir kommen, übereinstimmen muß, da sich diese auf den gleichen Kauf beziehen. Unsere Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten hat also die Form

$$\begin{array}{c} \\ AA \\ XA \\ AX \\ XX \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} AA & XA & AX & XX \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1-b & 0 \\ 0 & 1-c & 0 & c \\ 0 & d & 0 & 1-d \end{pmatrix} \end{array}.$$

Die Werte a, b, c wären wiederum zu schätzen. Wir werden die Betrachtung dieses Beispieles in Kapitel 5, Abschnitt 8, fortsetzen.

Beispiel 3. Das folgende Beispiel einer Markovschen Kette wurde auf dem Gebiete der Physik als ein einfaches Modell der Diffusion von Gasen verwendet.
Wir stellen uns n schwarze und n weiße Kugeln vor, die so auf zwei Urnen verteilt werden, daß sich in jeder Urne n Kugeln befinden. Ein einzelner Versuch besteht daraus, je eine Kugel aus jeder Urne zufällig zu entnehmen und dann die Kugel, die der ersten Urne entnommen wurde, in die zweite und die, die der zweiten entnommen wurde, in die erste zu legen. Als Zustand wählen wir die Anfangszahl der schwarzen Kugeln in der ersten Urne. Kennen wir ihre Anzahl zu irgendeinem Zeitpunkt, so kennen wir die genaue Zusammensetzung der Kugeln in jeder Urne. D. h. befinden sich in der Urne 1 j schwarze Kugeln, so müssen in der Urne 2 $n - j$ schwarze Kugeln und j weiße und in Urne 1 ferner $n - j$ weiße Kugeln sein. Befindet sich der Prozeß im Zustand j, so wird er sich nach dem nächsten Wechsel dann im Zustand $j - 1$ befinden, wenn eine schwarze Kugel aus Urne 1 und eine weiße Kugel aus der Urne 2 gewählt wurde. Er wird sich weiterhin im Zustand j befinden, wenn die zwei ausgewählten Kugeln die gleiche Farbe haben. Wird aus Urne 1 eine weiße Kugel entnommen und aus Urne 2 eine schwarze, so wird er sich dann im Zustand $j + 1$ befinden. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden dann gegeben durch (siehe Übung 14):

$$
\begin{aligned}
p_{jj-1} &= \left(\frac{j}{n}\right)^2 && j > 0 \\
p_{jj} &= \frac{2j(n-j)}{n^2} \\
p_{jj+1} &= \left(\frac{n-j}{n}\right)^2 && j > n \\
p_{jk} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

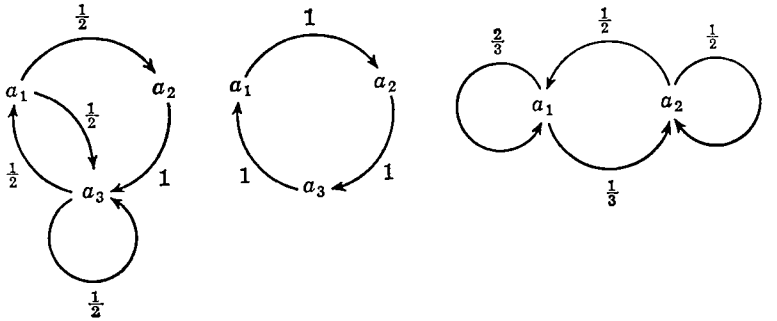
In jedem anderen Falle ist $p_{jn} = 0$.
Ein Physiker wäre z. B. daran interessiert, die Zusammensetzung der Urneninhalte zu kennen, nachdem eine bestimmte Anzahl von Wechseln stattgefunden hat. Sicherlich würde jede Voraussage über die früheren Stufen des Prozesses von der Ausgangszusammensetzung der Urneninhalte abhängen. Hätten wir z. B. in Urne 1 zuerst nur schwarze Kugeln, so würden wir erwarten, daß eine gewisse Zeit lang in Urne 1 mehr schwarze Kugeln wären als in Urne 2. Es könnte jedoch auf der anderen Seite erwartet werden, daß sich der Einfluß dieser Ausgangsverteilung nach einer gewissen Zeit verringert. Wir werden später in Kapitel 5, Abschnitt 8, sehen, daß dies wirklich der Fall ist.

ÜBUNGEN

1. Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm für die Markovsche Kette, deren Übergangswahrscheinlichkeiten durch die folgenden Matrizen gegeben werden.

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
$$

2. Stellen Sie die den folgenden Übergangsdiagrammen entsprechenden Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten auf.



3. Stellen Sie die Matrix p^2 für die durch die folgende Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmte Markovsche Kette auf.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \left[\text{Lös.} \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}.\right]$$

4. Wie heißt die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten für die in Beispiel 3 gegebene Markovsche Kette für den Fall von zwei weißen und zwei schwarzen Kugeln?

5. Stellen Sie die Matrizen $p^{(2)}$, $p^{(3)}$, $p^{(4)}$ für die durch die folgende Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmte Markovsche Kette auf.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie das gleiche für die durch die folgende Matrix gekennzeichnete Markovsche Kette durch.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Nehmen Sie an, eine Markovsche Kette bestehe aus zwei Zuständen a_1 und a_2, und ihre Übergangswahrscheinlichkeiten seien durch die folgende Matrix gegeben.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Der Prozeß beginne mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 im Zustand a_1 und mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 im Zustand a_2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich der Prozeß nach dem ersten Schritt im Zustand a_1 befindet. Beantworten Sie die gleiche Frage für den Fall, in dem der Prozeß mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 im Zustand a_1 beginnt, und mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 im Zustand a_2. [Lös.: 5/12, 4/9.]

7. Bestimmen Sie die Baummaßzahl und die Werte von $p_{21}^{(3)}$, $p_{22}^{(3)}$, $p_{23}^{(3)}$ und $p_{31}^{(3)}$, $p_{32}^{(3)}$, $p_{33}^{(3)}$ für die Markovsche Kette, deren Übergangswahrscheinlichkeiten in Abb. 19 dargestellt sind.

8. Nehmen Sie an, wir wollten das Kaufverhalten in Beispiel 2 unter Berücksichtigung der letzten drei Käufe voraussagen. Stellen Sie dafür die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten auf. Wie viele der Zahlen wären dabei zu schätzen? Wie viele, wenn wir auf den letzten vier Käufen aufbauen wollten? Auf den letzten n Käufen? Was können wir daraus über das Aufstellen immer komplexerer „Modelle" des Kaufverhaltens ersehen? [Teillös.: für n Käufe 2^n.]

9. Nehmen Sie an, wir wollten in Beispiel 2 das Kaufverhalten eines Verbrauchers in bezug auf drei Marken A, B und C und „alle anderen Marken", dargestellt durch X, voraussagen. Stellen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten unter der Annahme eines Markovschen Kettenprozesses und der Berücksichtigung lediglich des letzten Kaufes auf. Wie viele Werte müssen auf Grund der Daten geschätzt werden? Stellen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung der letzten zwei Käufe auf. Wieviel Zahlen müssen nun geschätzt werden?

10. Eine bestimmte Rechenmaschine benutze lediglich die Ziffern 0 und 1. Es werde beabsichtigt, eine dieser Ziffern über mehrere Stufen hin zu übertragen. Auf jeder Stufe bestehe jedoch die Wahrscheinlichkeit p dafür, daß die Ziffer, die in diese Stufe eingeht, beim Austritt aus dieser Stufe geändert wird. Wir bilden eine Markovsche Kette, die den Übertragungsprozeß darstellt und die als Zustände die Ziffern 0 und 1 enthält. Stellen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten auf.

11. Zeichnen Sie für die in Übung 10 gegebene Markovsche Kette ein Baumdiagramm, und ordnen Sie ihm eine Baummaßzahl unter der Annahme zu, daß der Prozeß im Zustand 0 beginnt und drei Stufen umfaßt; welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die Maschine nach drei Stufen die Ziffer 0, d. h. die richtige Ziffer zeigt? Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß die Maschine nie die Ziffer 0 änderte?

12. Nehmen Sie an, der Beruf eines Mannes könne als Facharbeiter, angelernter Arbeiter oder Hilfsarbeiter klassifiziert werden. Nehmen Sie weiterhin an, daß 80% der Söhne von Facharbeitern wiederum Facharbeiter, 10% angelernte Arbeiter und 10% Hilfsarbeiter seien. Die Söhne von angelernten Arbeitern seien wiederum zu 60% angelernte Arbeiter, zu 20% Facharbeiter und zu 20% Hilfsarbeiter. Schließlich seien 50% der Söhne von Hilfsarbeitern wiederum Hilfsarbeiter und je 25% gehören den anderen beiden Klassen an. Nehmen Sie an, jeder Mann habe einen Sohn, und bilden Sie durch das Verfolgen einer Familie über mehrere Generationen eine Markovsche Kette. Stellen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten auf. Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Enkel eines Hilfsarbeiters ein Facharbeiter ist. [Lös.: 0,375.]

13. Wir setzen in Übung 12 voraus, daß jeder Mann einen Sohn hat. Nehmen Sie nun statt dessen an, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß jeder Mann einen Sohn habe, 0,8 ist. Bilden Sie eine Markovsche Kette für vier Zustände. Die drei ersten Zustände sollen dabei die gleichen wie in Übung 12 sein, und der Prozeß soll dann in den Zustand vier eintreten, den er nicht überschreiten kann, wenn ein Mann keinen Sohn hat. Dieser Zustand stellt also die Familien dar, deren männliche Linie ausgestorben ist. Stellen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten auf, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Hilfsarbeiter einen Facharbeiter als Enkel hat. [Lös.: 0,24.]

14. Erklären Sie, warum die Übergangswahrscheinlichkeiten des Beispiels 3 richtig sind.

13*. Monte Carlo Simulation

Bis jetzt haben wir nur sehr einfache stochastische Prozesse, Folgen unabhängiger Versuche mit zwei und mehr möglichen Ergebnissen, die Entnahme endlich vieler Stichproben und den Markovschen Kettenprozeß untersucht. Es gibt noch andere stochastische Prozesse, die zwar mathematisch faßbar sind, die wir jedoch an dieser Stelle nicht betrachten wollen. Wiederum andere stochastische Prozesse sind in ihrem Charakter so kompliziert, daß eine rein mathematische Behandlung auch mit noch so entwickelten Methoden nicht praktisch erscheint. Eine Methode für die Analyse stochastischer Prozesse jedes Schwierigkeitsgrades ist die sogenannte Monte-Carlo-Simulationsmethode.

Wir sahen bereits, daß jeder stochastische Prozeß durch einen Baum beschrieben werden kann. Eine Monte-Carlo-Methode ersetzt einen wirklich vorkommenden stochastischen Prozeß durch einen simulierten Prozeß, der über den gleichen Baum verfügt. Um die Ergebnisse von wirklichen Erscheinungen, die ihrer Natur nach unsicher sind, zu simulieren, benutzt man Hilfsmittel zur Ermittlung von Zufallszahlen. Wir wollen uns bei der Beschreibung von Monte-Carlo-Simulationen gewöhnlich der Flußdiagramme bedienen.

Die zur Ermittlung von Zufallszahlen bei der Simulation benutzten Hilfsmittel können mechanischer Art sein, wie z. B. ein Rouletterad, ein paar Würfel, ein sich drehender Zeiger usw. Da z. B. das Rouletterad 37 gleichmäßige Felder hat, nehmen wir an, daß die 37 möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Das Rouletterad kann entsprechend als Hilfsmittel zur Ermittlung von Zufallszahlen für all die stochastischen Prozesse verwendet werden, für die die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses ein Vielfaches von 1/37 ist.

Beispiel 1. Betrachten Sie z. B. eine Maschine, die gute und fehlerhafte Stücke entsprechend einer Folge voneinander unabhängiger Versuche mit jeweils zwei möglichen Ergebnissen produziert. Lassen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein fehlerhaftes Stück produziert wird, $2/37 = 0{,}054$ sein. Wir können dann den Produktionsprozeß durch das Drehen des Rouletterades simulieren, wenn wir sagen, daß jeweils dann ein fehlerhaftes Stück produziert werde, wenn die Zahlen 0 oder 1 auftauchen, daß jedoch das Erscheinen jeder anderen Zahl die Produktion eines fehlerlosen Stückes bedeute. Wir könnten dann auch den Prozeß einer Stichprobenprüfung von drei Stücken durch den Prozeß des dreimaligen Drehens des Rouletterades simulieren. Wir könnten die binomialen Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{b}(r; 3, 2/37)$ dadurch annähern, daß wir die relative Häufigkeit von $r = 0, 1, 2, 3$ „fehlerhaften" bei einer großen Anzahl solcher Versuche beobachten. Der Bruchteil der Fälle, bei dem innerhalb von 10000 solcher Versuche ein fehlerhaftes gefunden wird, wird von dem Erwartungswert $10000\,\mathbf{b}(1; 3, 2/37)$ in der Weise abweichen, wie es das Gesetz der großen Zahl angibt.

Beachten Sie bitte, daß wir genausogut das Erscheinen der Zahlen 16 und 23 statt der Zahlen 0 und 1 als Indiz für das Auftauchen eines fehlerhaften Stückes hätten ansehen

können. Solche Wechsel beeinflussen keinesfalls die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit.

Die Benutzung mechanischer Hilfsmittel ist dann sehr langsam und umständlich, wenn die Zahl der durchzuführenden Versuche sehr groß ist. Aus diesem Grunde wurden Tabellen mit Zufallszahlen, wie sie Tabelle 2 zeigt, erstellt, deren Benutzung den Gebrauch mechanischer Hilfsmittel ersetzt. Zufallszahlentabellen entstehen grundsätzlich durch das Aufzeichnen der Resultate unabhängiger Versuche mit zehn möglichen Ergebnissen — den Ziffern 0, 1, . . ., 9. Die jeder Ziffer zugeordnete Wahrscheinlichkeit beträgt 1/10. Da die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen jeder Ziffer 1/10 ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer zweiziffrigen Zahl 1/100 und die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen einer dreiziffrigen Zahl 1/1000 usw.

Um ein Ereignis zu simulieren, das mit der Wahrscheinlichkeit von 0,173 erscheint, betrachten wir also 173 der 1000 möglichen dreiziffrigen Zahlen als einen Erfolg. So könnten wir z. B. die Zahlen von 000 bis 172 als Erfolgszahlen bezeichnen. Das gleiche erreichten wir jedoch, wenn wir die Zahlenreihe von 827 bis 999 als Erfolgsträger betrachteten. Wir wählen dann aus der Tabelle der Zufallszahlen eine Zahl aus und halten den Versuch, je nachdem ob die ausgewählte Zahl eine der von uns ausgewählten Erfolgszahlen ist oder nicht, als Erfolg oder Fehlschlag fest. Bei der Verwendung von Zufallszahlentabellen ist es wichtig, nicht immer wieder den gleichen Teil der Tabelle zu benutzen, da dies zu einer fortwährenden Wiederholung der gleichen Experimentenfolge führen würde. Statt dessen sollte man an einem willkürlich gewählten Punkt der Tabelle beginnen und dann entweder in der Zeile oder Spalte auf- oder abwärts oder nach rechts oder nach links fortschreiten. Es erweist sich als vorteilhaft, bei jedem Gebrauch der Tabelle auf andere Weise zu verfahren. Es ist jedoch notwendig, sich für eine bestimmte Vorgehensweise vor Gebrauch der Tabelle zu entscheiden und sich dann an diese Regel zu halten.

Beispiel 2. Wir wollen das Kaufverhalten eines Verbrauchers der drei Kaffeesorten A, B und C gemäß einem Markovschen Kettenprozeß, dessen Übergangsmatrix P durch

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

gegeben ist, simulieren.

Nehmen Sie an, die zuletzt gekaufte Kaffeemarke sei C gewesen. Wir ordnen für den nächsten Kauf die Ziffern 0 und 1 einem Kauf von A zu, die Ziffern 2 und 3 einer Wahl von B und die Ziffern 4 bis 9 einem Kauf von C. Wir zeigen diese Rechnungen in Abb. 21 für 15 Versuche, für die wir als Zufallszahlen jeweils die erste Ziffer jeder fünfziffrigen

Gruppe verwandten, in der ersten Zeile anfingen und dann von links nach rechts weiter vorgingen. Die erste gewählte Zufallszahl war 6, so daß wir gemäß unserer oben angegebenen Abmachung die Marke C wiederwählten.

Versuch	Zufallszahl	Gewählte Marke
1	6	C
2	5	C
3	8	C
4	4	C
5	2	B
6	0	A
7	6	A
8	0	A
9	7	A
10	7	A
11	4	A
12	5	A
13	9	C
14	9	C
15	1	A

Abb. 21

Da die nächsten drei Ziffern 5, 8 und 4 sind, fahren wir also fort, die Marke C zu kaufen. Die fünfte Zahl ist 2, d. h. wir wechseln über zu Marke B, und wir gehen auf die zweite Zeile über. Hier soll 0 die Wahl A bedeuten, die Zahlen 1 bis 7 sollen den Kauf von B und die Ziffern 8 und 9 den Kauf von C bedeuten. Die nächste Ziffer ist 0 und weist damit darauf hin, daß wir Marke A kaufen usw. Der Leser sollte den Rest der Ziffern in Abb. 21 selbst nachprüfen.

Beispiel 3. In einer Fabrik haben sich die Maschinisten ihre Werkzeuge in einem Werkzeuglager abzuholen, wo sie durch einen Lagerverwalter ausgegeben werden. Hier bilde sich von Zeit zu Zeit eine Schlange: Der Verwalter brauche drei Minuten dazu, um einen Maschinisten zu bedienen. Wir möchten nun gerne wissen, wieviel neue Maschinisten innerhalb von drei Minuten eintreffen. Wir nehmen an, daß nur einer innerhalb eines einminütigen Intervalls eintreffen kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich innerhalb einer gegebenen Minute ein Maschinist an die Schlange anschließt, die eine Länge von q hat, werde durch

$$p\left(\frac{s-q}{s}\right)$$

gegeben, wenn s die Anzahl der Maschinisten und p eine festgelegte Zahl zwischen 0 und 1 ist. Wir erhalten eine neue Schlangenlänge von 0, 1, 2 oder 3, wobei die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Schlangenlängen in Abb. 22 für $p = 1/2$ und $s = 5$ gegeben wird.

q	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,125	0,455	0,360	0,060

Abb. 22

Wir haben nun die Wahl, entweder die Schlangenbildung unter Verwendung der Verteilung der Abb. 22 zu simulieren oder durch eine eigentliche Simulation des Entscheidungsprozesses, wann ein Maschinist der Schlange zuzuzählen ist. Wir zeigen in Abb. 23 ein Flußdiagramm für die Durchführung der letzteren Simulation.

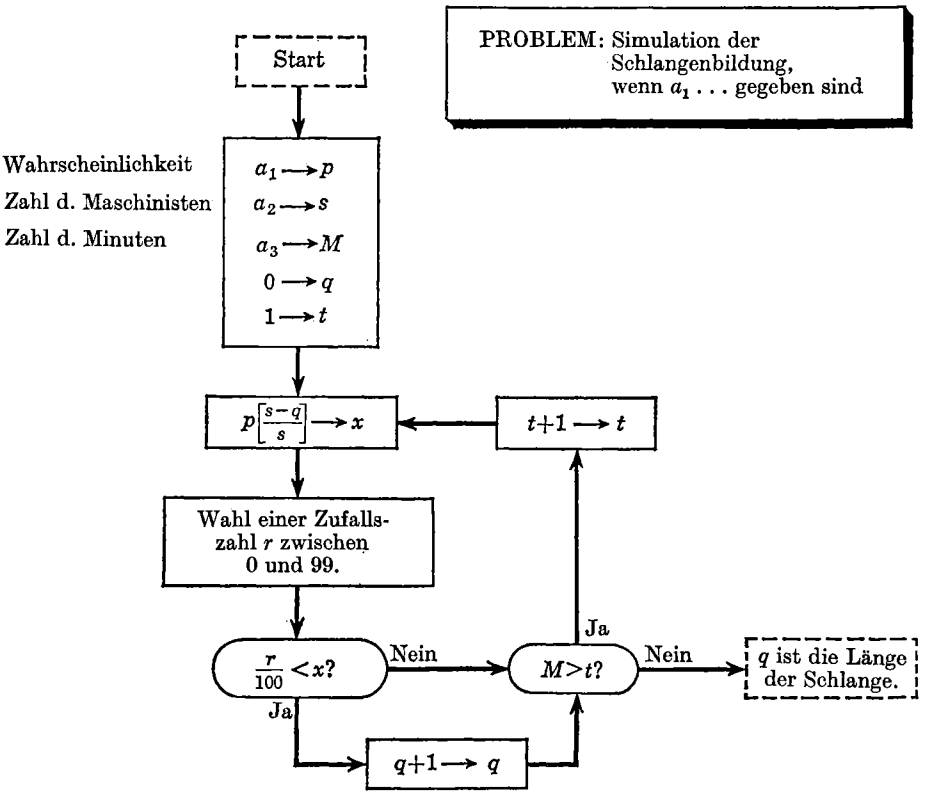


Abb. 23

Dieses Diagramm wird wiederum als Unterprogramm bei einem Simulationsproblem des nächsten Abschnittes verwendet werden.

In Abb. 23 wird die Entscheidung simuliert, ob eine neue Person der Schlange hinzuzufügen ist oder nicht. Gegeben sind hierbei die bereits in der Schlange befindlichen Personen q und die Gesamtzahl der Personen s, die in M-Minuten bedient werden können. Die drei zu benutzenden Ausgangsdaten sind a_1, der Wert für p, $a_2 = s$, die Anzahl der Maschinisten, und a_3, die Anzahl der durchzuführenden Versuche. Der Leser sollte sich die Abbildung daraufhin ansehen, ob sie den oben angegebenen Prozeß simuliert.

Wir zeigen in Abb. 24 16 Läufe der Simulation des in Abb. 23 dargestellten Programmes für $p = 1/2$, $s = 5$ und $M = 3$. Als Zufallszahlen wurden dabei die ersten zwei Ziffern der dritten Spalte in Tabelle 2 verwandt. Die beobachteten Häufigkeiten für Schlangen der Länge 0, 1, 2 und 3 waren $3/16 = 0{,}19$, $7/16 = 0{,}44$, $6/16 = 0{,}38$ und $0/16 = 0$. Es besteht eine überraschend gute Übereinstimmung mit Abb. 22, etwas, was wir normalerweise für eine so geringe Zahl nicht erwartet hätten. Das Gesetz der großen

Zahl garantiert jedoch für zahlreiche Läufe mit hoher Wahrscheinlichkeit eine ausgezeichnete Übereinstimmung. Schlangen der Länge 3 sollten jedoch mit der Wahrscheinlichkeit von 0,06 auftreten, d. h. bei 16 Läufen ist die erwartete Zahl nur 0,96 oder weniger als 1. Wir würden daher erwarten, wesentlich mehr als 16 Läufe durchführen zu müssen, um vernünftige Werte bei dieser Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

Versuch	Zufallszahl	x	q	Versuch	Zufallszahl	x	q
1	80	0,50	0	1	58	0,50	0
2	07	0,50	1	2	14	0,50	1
3	95	0,40	1	3	11	0,40	2
1	40	0,50	1	1	05	0,50	1
2	54	0,40	1	2	91	0,40	1
3	64	0,40	1	3	67	0,40	1
1	60	0,50	0	1	64	0,50	0
2	08	0,50	1	2	56	0,50	0
3	26	0,40	2	3	86	0,50	0
1	59	0,50	0	1	61	0,50	0
2	88	0,50	0	2	13	0,50	1
3	54	0,50	0	3	30	0,40	2
1	57	0,50	0	1	08	0,50	1
2	88	0,50	0	2	78	0,40	1
3	28	0,50	1	3	42	0,40	1
1	83	0,50	0	1	09	0,50	1
2	05	0,50	1	2	00	0,40	2
3	56	0,40	1	3	47	0,30	2
1	83	0,50	0	1	70	0,50	0
2	74	0,50	0	2	48	0,50	1
3	96	0,50	0	3	06	0,40	2
1	40	0,50	1	1	57	0,50	0
2	61	0,40	1	2	89	0,50	0
3	05	0,40	2	3	12	0,50	1

Abb. 24

Es soll noch einmal betont werden, daß Simulationstechniken eigentlich für sehr viel kompliziertere Probleme als das hier illustrierte gedacht sind. Sie sind dann sehr nützlich, wenn es viel zu umständlich ist, explizite Wahrscheinlichkeitsrechnungen durchzuführen. Die oben gegebenen Beispiele illustrieren zwar den Gebrauch der Simulation, sie sind jedoch so einfach,

daß sie mit den in früheren Abschnitten behandelten Techniken gut gelöst werden könnten.

ÜBUNGEN

1. Zeichnen Sie einen Baum für die Möglichkeiten der Stauungssituation des Beispiels 3, wenn $p = 1/2$, $s = 5$ und $M = 3$ ist. Ordnen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu und zeigen Sie, daß die in Abb. 22 gegebenen Werte richtig sind.

2. Führen Sie unter Benutzung des Flußdiagrammes der Abb. 23 und der Zufallszahlentabelle weitere 16 Simulationen der Stauungssituation des Beispiels 3 mit $p = 1/2$, $s = 5$ und $M = 3$ durch. Errechnen Sie die beobachteten Häufigkeiten der einzelnen Schlangenlängen und vergleichen Sie ihre Zahlen mit denen der Abb. 22.

3. Eine Maschine produziere gute und fehlerhafte Teile nach einer Folge unabhängiger Versuche mit der Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$ für ein fehlerhaftes Stück. Simulieren Sie unter Benutzung der Zufallszahlentabelle eine Probe von 20 Stück und zählen Sie die Anzahl der „fehlerhaften" innerhalb der simulierten „Stichprobe". Welche binomiale Wahrscheinlichkeit besteht dafür, diese Anzahl fehlerhafter Stücke zu erhalten? Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß diese Anzahl fehlerhafter Teile oder mehr erreicht wird?

4. Ein Los von 20 Stück enthalte 6 fehlerhafte. Dem Los werde eine Stichprobe von 5 Stück entnommen. Simulieren Sie die Stichprobenentnahme, und zählen Sie die Anzahl der in der Stichprobe befindlichen „fehlerhaften". Welche hypergeometrische Wahrscheinlichkeit besteht dafür, diese Anzahl fehlerhafter Stücke zu erhalten? Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, diese Zahl oder weniger fehlerhafte Teile zu erhalten?

5. Eine Person kaufe die Kaffeemarke X gemäß einem Markovschen Kettenprozeß mit der folgenden Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{array}{r} \\ X \\ \text{nicht } X \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X & \text{nicht } X \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Simulieren Sie zehn aufeinanderfolgende Käufe unter der Voraussetzung, daß a) der letzte Kauf X betraf, b) der letzte Kauf nicht X betraf, c) der letzte Kauf mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/3$ X betraf und mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$ X nicht betraf.

6. Ein Modell für das Kursverhalten der an der New Yorker Börse gehandelten Aktien setzt sich aus Kurssteigerungen, Gleichbleiben des Kurses oder einem Absinken des Kurses von einem Tag zum anderen, und zwar nach einem Markovschen Kettenprozeß, mit der folgenden Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten zusammen:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Steigend} \\ \text{Gleichbleibend} \\ \text{Fallend} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Steigend} & \text{Gleichbleibend} & \text{Fallend} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nehmen Sie fernerhin an, daß den Beträgen, um die die Kurse fallen oder steigen, folgende Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können.

Änderung	Wahrscheinlichkeit
$\frac{1}{2}$	0,30
1	0,40
$1\frac{1}{2}$	0,20
2	0,05
$2\frac{1}{2}$	0,05

Simulieren Sie den Verlauf der nächsten 20 Tage unter der Voraussetzung, daß die Börse gestern mit 100, gleichbleibend, schloß.

7. Ein gebräuchliches Modell für die Absatzvoraussage ist, anzunehmen, daß die Verkäufe durch vier Faktoren beeinflußt werden: Den Trend, zyklische, saisonale und Zufallsschwankungen. Nehmen Sie an, der Trend bestehe aus einem Ansteigen des Absatzes um 2000 Einheiten pro Vierteljahr, der Geschäftszyklus beeinflusse die Verkäufe innerhalb der nächsten 12 Quartale gemäß der unten gezeigten Tabelle 1, die Abweichungen vom durchschnittlichen Absatz seien für jedes der vier Quartale durch die Tabelle 2 gegeben, und die Wahrscheinlichkeiten für die Zufallsschwankungen entsprächen der Tabelle 3. Simulieren Sie die Verkäufe der nächsten drei Jahre, aufgeteilt nach Quartalen, wenn das grundlegende Absatzniveau des nächsten Quartals einschließlich Trend, jedoch ausschließlich zyklischer, saisonaler oder Zufallsschwankungen, 150000 Einheiten beträgt.

Tabelle 1

Quartal	zyklische Schwankung
1	+ 3000
2	+ 5000
3	+ 6000
4	+ 7000
5	+ 7000
6	+ 6000
7	+ 4000
8	+ 2000
9	— 1000
10	— 3000
11	— 4000
12	— 4000

Tabelle 2

Quartal	saisonale Schwankung
1	— 8000
2	— 2000
3	+ 1000
4	+ 9000

Tabelle 3

Zufallsschwankung	Wahrscheinlichkeit
—10,000	0,02
— 8,000	0,04
— 6,000	0,08
— 4,000	0,11
— 2,000	0,15
0	0,20
+ 2,000	0,15
+ 4,000	0,11
+ 6,000	0,08
+ 8,000	0,04
+10,000	0,02

8. Die Gesellschaft X versorge die Gesellschaften A, B, C und D mit bestimmten Teilen. A bestelle alle fünf Tage drei Einheiten. B bestelle alle drei Tage, wobei die Größe der Bestellungen gemäß Tabelle 1 schwanke. C bestelle jeweils fünf Einheiten, wobei die Bestellintervalle sich wie in Tabelle 2 gezeigt verhalten. D bestelle zu verschiedenen Zeitpunkten verschieden viel, wobei der Bestellumfang unab-

hängig vom Zeitintervall sei. Tabelle 3 und 4 zeigen die Schwankungen in D's Bestellumfang und Bestellzeit. Simulieren Sie die Nachfrage während der folgenden 20 Tage:

Tabelle 1		Tabelle 2		Tabelle 3		Tabelle 4	
Größe d. Bestellung von B	Wahrscheinlichkeit	Bestellabstand in Tagen für C	Wahrscheinlichkeit	Größe d. Bestellung von D	Wahrscheinlichkeit	Bestellabstand in Tagen für D	Wahrscheinlichkeit
3	0,2	2	0,4	2	0,2	1	0,1
5	0,3	3	0,3	4	0,2	2	0,2
7	0,4	4	0,2	6	0,3	3	0,3
10	0,1	5	0,1	8	0,3	4	0,4

9. Nehmen Sie an, die Verbraucher kauften die Kaffeemarke X gemäß eines Markovschen Kettenprozesses mit der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten, die in Übung 6 gegeben wird. Nehmen Sie ferner an, jeder Verbraucher kaufe pro Woche 1 Pfund. An einem bestimmten Zeitpunkt unternehme die Gesellschaft X eine dreiwöchige Werbekampagne. Dadurch werde die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt abgeändert:

$$\begin{array}{r} \\ X \\ \text{nicht } X \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X & \text{nicht } X \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es sei jedoch nicht sicher, wann dieser Wechsel spürbar wird, bzw. ob er überhaupt eintritt. Es bestehe die Wahrscheinlichkeit von 0,7 dafür, daß der Wechsel eintritt, wobei er gemäß den in folgender Aufstellung gezeigten Wahrscheinlichkeiten nach der ersten, zweiten oder dritten Woche der Kampagne eintreten könne:

Anzahl der Wochen nach Beginn der Kampagne	Wahrscheinlichkeit
1	0,2
2	0,2
3	0,3

Nehmen Sie an, fünf Verbraucher hätten mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 zuletzt die Marke X gekauft und mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 eine andere Marke. Simulieren Sie die Käufe der fünf Verbraucher während der folgenden zehn Wochen unter der Voraussetzung, daß die Werbekampagne nach dem dritten Kauf einsetzt.

10. Werfen Sie hundertmal eine Münze, und schreiben Sie dabei jedesmal eine 1, wenn ein Wappen erscheint, und eine 0, wenn die Zahl erscheint. Die dadurch entstehende Tabelle soll als eine Tabelle von Zufallsbits angesehen werden (siehe Kapitel 1, Abschnitt 11). Simulieren Sie unter Benutzung dieser Tabelle
    a) eine durch eine Folge unabhängiger Versuche entnommene Stichprobe von fünf Stück mit der Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,5.

b) eine durch eine Folge unabhängiger Versuche entnommene Stichprobe von zehn mit der Erfolgswahrscheinlichkeit von 0,125.

11. Fassen Sie die in der Tabelle der Übung 11 erhaltenen bits in Gruppen zu je vier zusammen. Interpretieren Sie jede der erhaltenen Gruppen als eine dualverschlüsselte Dezimalzahl (siehe Übung 11, Kapitel 1, Abschnitt 12). Sollte eine bestimmte Gruppe keinen Sinn als dualkodierte Dezimalzahl ergeben, so überspringen Sie sie. Zeigen Sie, daß diese Methode zufallsverteilte Dezimalzahlen ergibt. Können Sie sich einen Weg vorstellen, um eine Tabelle zufallsverteilter bits in eine Tabelle zufallsverteilter Dezimalzahlen zu verwandeln, bei der die bits besser genutzt werden?

14*. Analyse von Entscheidungsregeln mit Hilfe der Monte Carlo Methode

Obwohl sich die Monte-Carlo-Methode auch bei der Simulierung stochastischer Prozesse für rein beschreibende Zwecke als nützlich erweist, liegt doch ihr Hauptanwendungsgebiet bei der Analyse von komplexen Systemen, auf die Entscheidungsregeln angewandt werden sollen. Zwar sind in den letzten Jahren erhebliche Fortschritte bei der Entwicklung mathematischer Methoden zur Behandlung von Systemen, wie der Bestandskontrolle, der Warteschlangen usw., erreicht worden; diese Techniken können gewöhnlich jedoch nur dann angewandt werden, wenn die in Frage stehenden Systeme bestimmten, sorgfältig definierten Wahrscheinlichkeitsgesetzen gehorchen. Treffen diese Gesetze nicht zu, so ist gewöhnlich das beste zur Verfügung stehende Analysewerkzeug die Monte-Carlo-Methode.

Wir wollen die Anwendung dieser Technik bei der Lösung von Entscheidungsproblemen, bei der Bestandskontrolle und bei Warteschlangenproblemen illustrieren. Der Leser wird sehr schnell merken, daß die Anzahl der Versuche, die durch manuelle Rechenoperationen simuliert werden können, selten ausreicht, um verläßliche Schlüsse über die Adäquanz einer bestimmten Entscheidungsregel zu erlauben. Dadurch, daß man diese Rechnungen jedoch sehr schnell auf elektronischen Rechenmaschinen durchführen kann, wird die Monte-Carlo-Methode ein praktisches Hilfsmittel bei der Lösung von Entscheidungsregeln. Wir werden an dieser Stelle die Methode zwar nur an Hand manueller Rechnungen illustrieren, die gezeigten Flußdiagramme können jedoch einfach in Rechnerprogramme übertragen werden. Die Leser, denen ein Rechner zur Verfügung steht, können sie dann darauf ausprobieren.

Beispiel 1. *Warteschlange.* Infolge Verschleiß und zum Zwecke des Einrichtens von Maschinen für neue Arbeitsgänge, haben sich die Maschinisten einer Fabrik neue Werkzeuge an der Werkzeugausgabe zu holen. Dort werden sie durch Lageristen bedient. Nehmen Sie an, es dauere genau zwei Minuten, bis ein Lagerist die Anforde-

rungen eines Maschinisten erfüllt habe. Ein Lagerist kann dann 30 Maschinisten in der Stunde abfertigen, und zwei Lageristen schaffen das Doppelte.
Ein Lagerist habe einen Stundenlohn von 2 DM. Die Kosten der Wartezeit einer Maschine, während der der Maschinist nach Werkzeug ansteht, soll mit 24 DM pro Stunde angenommen werden. Wir zeigen in Abb. 25a das Ablaufschema für die Errechnung der Gesamtkosten der Unterhaltung eines Werkzeuglagers mit r Lageristen während H Stunden in einer Fabrik mit f Maschinisten. Das Flußdiagramm der Abb. 23 des vorhergehenden Abschnittes, bei dem die jeweilige neue Ankunft eines Maschinisten in der Schlange simuliert wird, stellt für $M = 1$ ein Unterprogramm des in Abb. 25 gezeigten Programms dar.

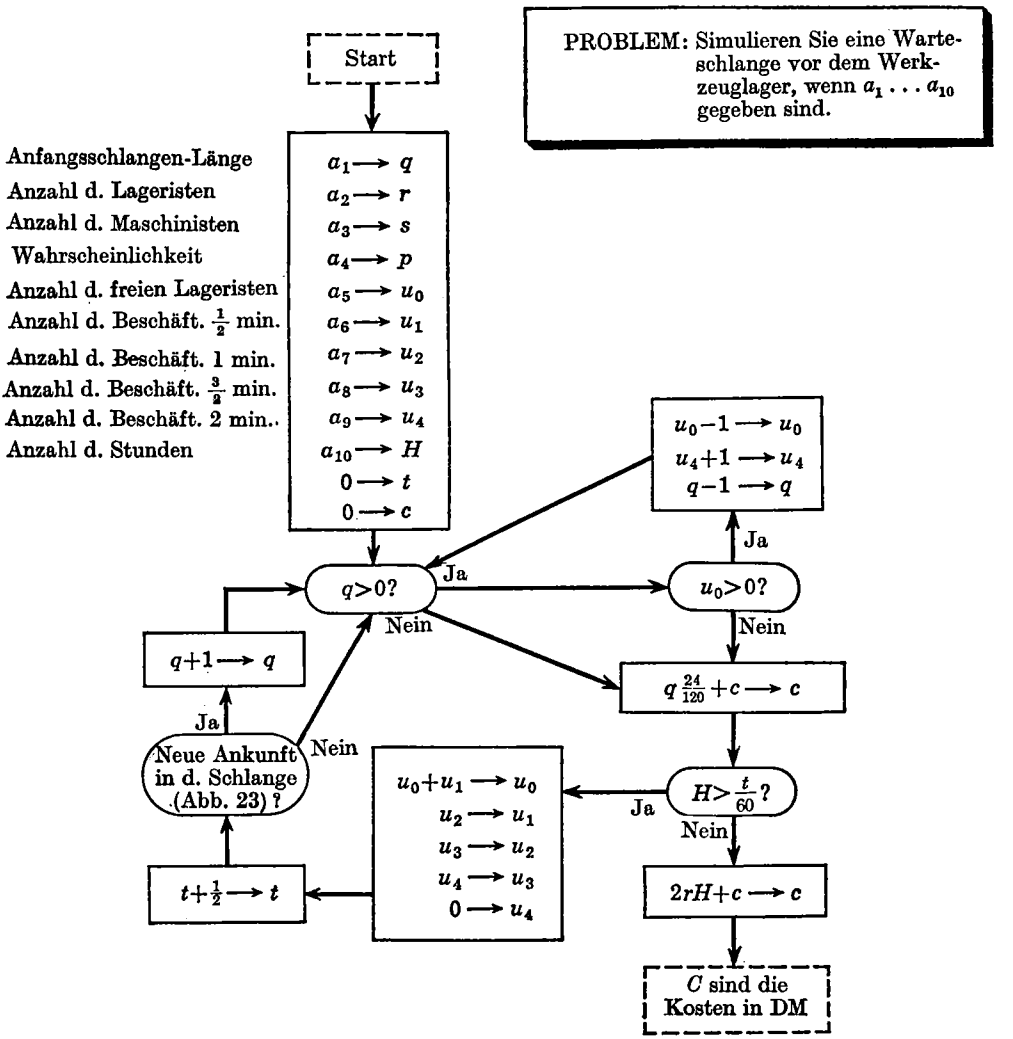


Abb. 25

Als Zeiteinheit gelte eine halbe Minute. Die Größe u_0 gebe die Anzahl der freien Lageristen, u_1 die Anzahl derer, die eine halbe Minute lang beschäftigt sind, u_2 die Anzahl derer, die eine Minute beschäftigt sind, u_3 die Anzahl derer, die 3/2 Minuten lang beschäftigt sind, und u_4 die Anzahl der Maschinisten, die zwei Minuten lang beschäftigt sind, an. Mit q bezeichnen wir die Schlangenlänge zu irgendeinem Zeitpunkt, mit p die Wahrscheinlichkeit, die in dem Schlangenankunfts-Unterprogramm gebraucht wird, und mit t den Zeitablauf, gemessen in 1/2-Minuten-Abständen. Der Leser sollte sich mit dem Ablaufprogramm so lange beschäftigen, bis er davon überzeugt ist, daß dadurch das oben beschriebene Problem simuliert wird.
In den Abb. 26 und 27 wurde eine Simulation des Problems für eine Zeitdauer von 10 Minuten und für eine Lageristenzahl von 2 bzw. 3 durchgeführt.

Zeit	q^*	„Ankunft" zu 001	Zufallszahl	Zahl der Ankünfte	q	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	c
0				0	0	0	0	1	1	0	
1/2	2	450	430	1	1	0	1	1	0	0	0,20
1	3	425	776	0	0	0	1	0	0	1	0,20
3/2	2	450	990	0	0	1	0	0	1	0	0,20
2	1	475	186	1	0	0	0	1	0	1	0,20
5/2	2	450	612	0	0	0	1	0	1	0	0,20
3	2	450	297	1	0	0	0	1	0	1	0,20
7/2	2	450	467	0	0	0	1	0	1	0	0,20
4	2	450	806	0	0	1	0	1	0	0	0,20
9/2	1	475	783	0	0	1	1	0	0	0	0,20
5	1	475	273	1	0	1	0	0	0	1	0,20
11/2	1	475	128	1	0	0	0	0	1	1	0,20
6	2	450	155	1	1	0	0	1	1	0	0,40
13/2	3	425	111	1	2	0	1	1	0	0	0,80
7	4	400	823	0	1	0	1	0	0	1	1,00
15/2	3	425	392	1	1	0	0	0	1	1	1,20
8	3	425	056	1	2	0	0	1	1	0	1,60
17/2	4	400	275	1	3	0	1	1	0	0	2,20
9	5	375	602	0	2	0	1	0	0	1	2,60
19/2	4	400	540	0	1	0	0	0	1	1	2,80
10	3	425	772	0	1	0	0	1	1	0	3,00
				Kosten für 2 Lageristen während 10 Min.							0,67
				Gesamtkosten für 10 Min.							DM 3,67

Abb. 26

Es wurde weiterhin vorausgesetzt, daß 20 Maschinisten ihre Werkzeuge bei diesem Werkzeuglager zu holen haben. Als Ausgangsstadium wurde angenommen, daß gerade zwei Personen bedient werden. Die Größe q^* gibt an, wieviel Personen in dem vorangehenden Zeitintervall bedient wurden bzw. warten mußten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein weiterer Maschinist am Werkzeuglager eintrifft, ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{20-q^*}{20}\right)$$

Die Zufallszahlen zwischen 000 und 999 wurden der Tabelle II entnommen.
Beachten Sie bitte, daß die Gesamtkosten für zwei Lageristen für 10 Minuten 3,67 DM betragen, d. h. eine Stunde kostete 22,02 DM. Auf der anderen Seite würden 10 Minuten

bei drei Lageristen 1,40 DM kosten, d. h. die Stunde kostete in diesem Fall 8,40 DM. Sicher zahlt es sich in diesem Falle aus, drei anstatt zwei Lageristen einzusetzen. Es würde sich sogar lohnen, einen vierten Lageristen einzustellen, da die Stundenkosten

Zeit	q^*	„Ankunft" zu 001	Zufall-zahl	Zahl der Ankünfte	q	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	c
0				0	0	1	0	1	1	0	0
1/2	2	450	430	1	0	0	1	1	0	1	0
1	3	425	776	0	0	1	1	0	1	0	0
3/2	2	450	990	0	0	2	0	1	0	0	0
2	1	475	186	1	0	1	1	0	0	1	0
5/2	2	450	612	0	0	2	0	0	1	0	0
3	1	475	297	1	0	1	0	1	0	1	0
7/2	2	450	467	0	0	1	1	0	1	0	0
4	2	450	806	0	0	2	0	1	0	0	0
9/2	1	475	783	0	0	2	1	0	0	0	0
5	1	475	273	1	0	2	0	0	0	1	0
11/2	1	475	128	1	0	1	0	0	1	1	0
6	2	450	155	1	0	0	0	1	1	1	0
13/2	3	425	111	1	1	0	1	1	1	0	0,20
7	4	400	823	0	0	0	1	1	0	1	0,20
15/2	3	425	392	1	0	0	1	0	1	1	0,20
8	3	425	056	1	0	0	0	1	1	1	0,20
17/2	3	425	275	1	1	0	1	1	1	0	0,40
9	3	425	602	0	0	0	1	1	0	1	0,40
19/2	3	425	540	0	0	1	1	0	1	0	0,40
10	2	450	772	0	0	2	0	1	0	0	0,40
				Kosten für 3 Lageristen während 10 Min.							1,00
				Gesamtkosten für 10 Min.							DM 1,40

Abb. 27

für ihn 8 DM betragen würden und es unwahrscheinlich wäre, daß je ein Maschinist zu warten hätte, wenn vier Lageristen vorhanden wären. Die größtmöglichen Ersparnisse betrügen jedoch lediglich 0,40 DM pro Stunde, so daß die Entscheidung darüber, ob ein weiterer Lagerist eingestellt werden soll oder nicht, von anderen Faktoren abhängen wird.

Die Ergebnisse eines kurzen Simulationslaufes genügen natürlich nicht, um sicherzustellen, daß die gezogenen Schlüsse immer gelten. Mit sehr schnellen Rechenanlagen ist es jedoch möglich, sehr lange Simulationsläufe durchzuführen und die Auswirkungen einer bestimmten Situation über Tage oder gar Monate oder Jahre hinaus zu studieren. Das Gesetz der großen Zahl stellt sicher, daß bei Simulationen in so weitem Rahmen verläßliche Schlußfolgerungen gezogen werden können. Das Hauptproblem bei diesen Studien ist, sicherzustellen, daß die Simulation genau die zu untersuchende Situation beschreibt.

Beispiel 2. *Beständekontrolle.* Ein Händler stelle fest, daß die tägliche Nachfrage nach einem bestimmten Gut zufallsverteilt schwankt. Am Beginn eines jeden Tages könne ein Auftrag über jede Menge des Gutes erteilt werden, wobei die dafür entstehenden Kosten unabhängig von der Anzahl der bestellten Einheiten 2 DM betragen. Wird

kein Auftrag erteilt, so fallen diese 2 DM nicht an. Die bestellten Güter werden am dritten Tage nach Auftragserteilung geliefert und stehen dann verkaufsbereit. Die Lagerkosten pro Einheit betragen für den Händler 0,20 DM pro Tag. Übersteigt die Nachfrage die vorhandenen Bestände, so wird durch die überschüssige Nachfrage ein negativer Bestand oder „Auftragsrückstand" hervorgerufen. Werden die Bestände auf diese Weise negativ, so entstehen pro Tag Kosten von 1 DM pro Einheit. Sobald dann Güter eintreffen, werden diese dazu benutzt, den Auftragsrückstand zu verkleinern. Der verbleibende Rest könne dann dazu benutzt werden, um die laufende Nachfrage zu befriedigen. Trifft eine Sendung ein, wird sie also einfach zu den (negativen oder positiven) Beständen hinzugezählt.
Der Händler stelle ferner fest, daß die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Nachfragegrößen sich wie in Abb. 28 dargestellt verhalten. Ist diese Tabelle vorhanden, so ist es leicht, unter Benutzung der in dem vorhergehenden Abschnitt besprochenen Techniken die Nachfrage zu simulieren.

Zufallszahlen	1–8	9–21	22–37	38–57	58–74	75–85	86–94	95–00
Nachfrage	0	1	2	3	4	5	6	7
Wahrscheinlichkeit	0,08	0,13	0,16	0,20	0,17	0,11	0,09	0,06

Abb. 28

Das Flußdiagramm für die Simulation der obigen Situation wird in Abb. 29 gezeigt. Dort werden auch die Bedeutungen der einzelnen Variablen erklärt. I_t gibt den Bestand zur Zeit t an. Als Anfangszeit wurde $t = 4$ gewählt. Das mit „Suche Nachfrage d_t" bezeichnete Kästchen wird unter Verwendung der in Abb. 28 gegebenen Daten simuliert. Wir ordnen dem Ereignis „Nachfrage ist 0" die zweiziffrigen Zufallszahlen von 01 bis 08 und dem Ereignis „Nachfrage ist 1" die Zahlen von 09 bis 21 usw. zu. Schließlich bedeuten die Zahlen von 95 bis 00 das Ereignis „Nachfrage ist 7". Die Zahlen sind in Abb. 28 angegeben.
Das mit „Bestimme x_t" bezeichnete Kästchen kann auf verschiedene Weisen simuliert werden. Ein Weg ist, die Entscheidungen auf der Grundlage der vorhergehenden Aufträge und des Auftragsrückstandes zu fällen. Entscheiden wir uns für diesen Weg, so haben wir den allgemein als Unternehmensspiel bekannten Fall vor uns, da ein Teil der Simulation die Entscheidungen einer Person enthält. Solche Spiele haben sich in jüngster Vergangenheit als sehr nützliche Werkzeuge, sowohl für Übungszwecke als auch für Simulation und Forschung, erwiesen. Wahrscheinlich werden solche Spiele in der Zukunft noch an Wichtigkeit gewinnen. Während das obige Beispiel ein Unternehmensspiel darstellt, bei dem lediglich eine Person vorhanden ist, sind bereits umfangreichere Spiele mit vielen Teilnehmern entworfen worden.
Der andere Weg, die Kästchen zu simulieren, ist, sie durch eine Entscheidungsregel zu ersetzen, die automatisch x_t für jeden gegebenen Wertesatz der verschiedenen Variablen bestimmt. Beispiele für eine solche Entscheidungsregel können sein:

1. Bestelle jeden zweiten Tag 7 Einheiten und beginne heute.
2. Bestelle jeden Tag so viel, daß die Gesamtzahl der bestellten Einheiten plus der am Lager befindlichen immer 16 beträgt.
3. Bestelle jeweils dann 5 Einheiten, wenn die mit dem letzten Auftrag bestellten und die am Lager befindlichen Güter weniger als 10 Einheiten ausmachen.
4. Bestelle immer dann 10 Einheiten, wenn die mit vorausgehenden Aufträgen bestellten und die am Lager befindlichen Stücke unter 15 Einheiten fallen.

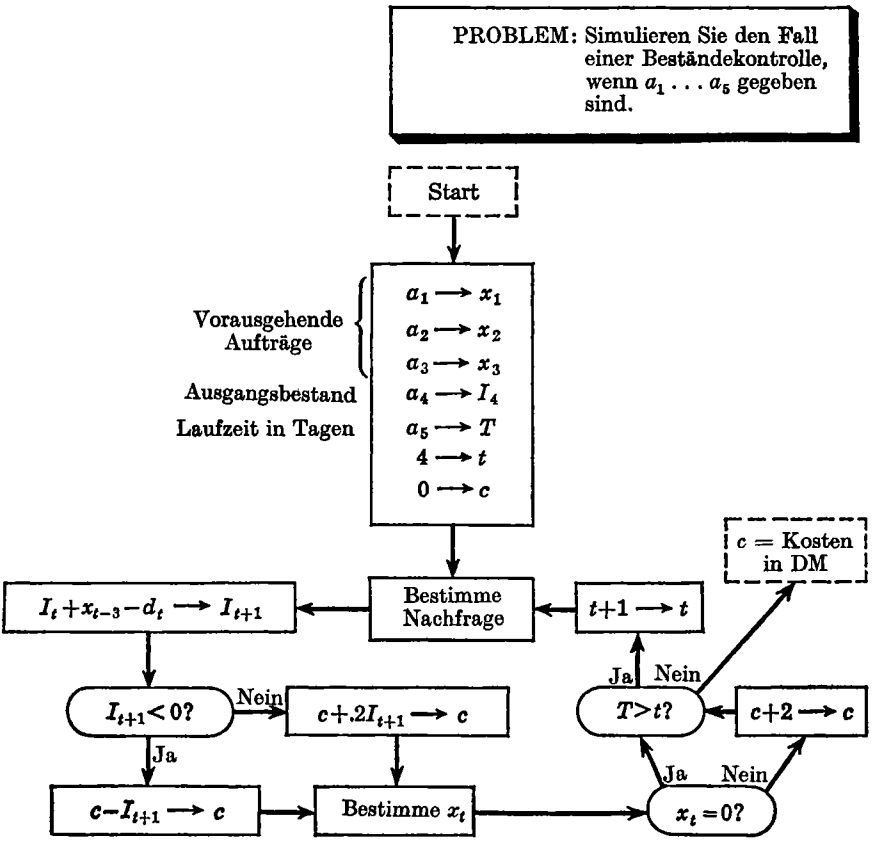


Abb. 29

Die ersten zwei dieser Regeln werden mit „zyklischen Bestellregeln" bezeichnet, da die Aufträge jeweils zu einem vorbestimmten Zeitpunkt erteilt werden. Regeln 3 und 4 bezeichnet man als „Mindestbestandsregeln", da solange nichts unternommen wird, wie die Summe der mit laufenden Aufträgen bestellten Güter und der im Lager befindlichen nicht unter ein vorher bestimmtes Mindestniveau fällt. Der Mindestbestand ist in Regel 3 zehn, während er in Regel 4 fünfzehn beträgt. In diesen Regeln wird die bestellte Menge — 5 oder 10 — „Bestellmenge" genannt.

Wir wollen die Ergebnisse einer Simulation von 10 Tagen, wie sie in Abb. 30 gezeigt wird, zusammenfassen: Bei dieser Simulation wurde zur Bestimmung von x_t die Regel 3 zugrunde gelegt (siehe Übungen 8 bis 10). Es wurde angenommen, daß der Ausgangsbestand 10 betrug und daß 5 Einheiten drei Tage vorher bestellt wurden. Für die Bestimmung der Nachfrage d_t wurden die letzten zwei Ziffern der Zahlen in Spalte 2 der Tabelle II benutzt.

Natürlich ist eine Laufzeit von 20 Tagen zu kurz, um genaue Schätzungen zu unternehmen. Auf einer Hochleistungsrechenanlage wurde daher ein Lauf über 500 Tage durchgeführt.

Tag	Zufalls-zahl	Nach-frage	I_t	x_{t-3}	x_{t-2}	x_{t-1}	I_{t+1}	x_t	c
1 ($t = 4$)	45	3	10	5	0	0	12	0	DM 2,40
2	32	2	12	0	0	0	10	0	4,40
3	07	0	10	0	0	0	10	0	6,40
4	52	3	10	0	0	0	7	5	9,80
5	59	4	7	0	0	5	3	5	12,40
6	33	2	3	0	5	5	1	0	12,60
7	23	2	1	5	5	0	4	5	15,40
8	92	6	4	5	0	5	3	5	18,00
9	70	4	3	0	5	5	—1	5	21,00
10	80	5	—1	5	5	5	—1	5	24,00
11	85	5	—1	5	5	5	—1	5	27,00
12	38	3	—1	5	5	5	1	0	27,20
13	63	4	1	5	5	0	2	5	29,60
14	59	4	2	5	0	5	3	5	32,20
15	06	0	3	0	5	5	3	0	32,80
16	29	2	3	5	5	0	6	0	34,00
17	07	0	6	5	0	0	11	0	36,20
18	01	0	11	0	0	0	11	0	38,40
19	62	4	11	0	0	0	7	5	41,80
20	80	5	7	0	0	5	2	5	44,20

Abb. 30

Dieser Lauf zeigte, daß die Auftragsrückstände dazu neigten, sich zu vergrößern. Die Ergebnisse können dadurch verbessert werden, daß man entweder die Bestellmenge vergrößert oder den Mindestbestand erhöht. Abb. 31 zeigt die Resultate von acht

Melde-bestand	Bestell-menge	Durchschnittl. Gesamtkosten	Kosten für 500 Tage*			
			Gesamt-	Bestell-	Auftrags-rück-stands-	Bestands-
10	5	DM 2,62	DM 1312	DM 656	DM 412	DM 244
10	8	2,11	1054	422	244	388
10	10	2,02	1011	330	175	506
10	11	1,93	965	284	99	582
10	12	2,00	998	272	132	594
10	14	2,11	1055	246	155	654
10	5	2,62	1312	656	412	244
12	5	2,38	1191	632	115	444
15	5	2,76	1381	646	26	709

* Auf volle DM abgerundet.

Abb. 31

verschiedenen Läufen über jeweils 500 Tage, bei denen diese zwei Größen variiert wurden.

Wir sehen z. B., daß wir die durchschnittlichen Tageskosten von 62 DM auf 1,93 DM senken können, wenn wir die Bestellmenge auf 11 erhöhen; das stellt eine Einsparung von mehr als 25% dar.
Aus Abb. 31 kann man ersehen, daß selbst bei Läufen über 500 Tage beträchtliche Abweichungen auftauchen können. Wir würden z. B. erwarten, daß die Kosten für die Auftragsrückstände in die ersten sechs Zeilen der Tabelle fallen. (Warum?) Die Kosten für Auftragsrückstände wurden noch einmal für einen Meldebestand von 10 und Bestellmengen von 10, 11 und 12, bei einem Lauf über 12000 Tage, errechnet. Die Ergebnisse waren 152, 147, 127 pro 500 Tage, im Gegensatz zu den in der Tabelle gegebenen Zahlen 175, 99 und 132. Auf der anderen Seite wichen die neuen Schätzungen der durchschnittlichen Gesamttageskosten von den in Abb. 31 genannten weniger als 0,05 DM ab. Die Läufe über 500 Tage mögen sich daher für viele Zwecke als von Nutzen erweisen.

ÜBUNGEN

1. Nehmen Sie an, daß in Beispiel 1 zum Zeitpunkt der ersten Ankunft gerade fünf Maschinisten einschließlich derer, die gerade bedient wurden, warteten und daß bei all denen, die bedient wurden, die Abfertigung gerade begonnen hatte. Errechnen Sie unter diesen Umständen die für die Warteschlangen notwendigen Daten noch einmal.
2. Nehmen Sie an, daß in Beispiel 1 die Bedienungszeiten nicht konstant zwei Minuten betragen, sondern daß sie gemäß den folgenden Wahrscheinlichkeiten zwischen 1 und 4 Minuten schwankten:

Bedienungszeit (Minuten)	Wahrscheinlichkeit
1	0,20
1,5	0,25
2	0,25
2,5	0,15
3	0,05
3,5	0,05
4	0,05

   Simulieren Sie die Bedienungszeit und die Ankunftszeiten, und ermitteln Sie die Kosten bei dem Vorhandensein von zwei bzw. drei Lageristen. Wie groß ist die erwartete Bedienungszeit?
3. Ergänzen Sie in Beispiel 2 die für den 21. Tag in Abb. 30 geltenden Daten.
   [Lös.: 42, 3, 2, 0, 5, 5, —1, 5, 47, 0, 20.]
4. Modifizieren Sie das Flußdiagramm in Beispiel 2 (Abb. 29), indem Sie auf der Entscheidungsregel aufbauen.
5. Nehmen Sie an, daß in Beispiel 2 die Zeitspanne zwischen der Erteilung eines Auftrages und der Auslieferung zwischen zwei und vier Tagen (inkl.) schwanken könne. Hierfür sollen die folgenden Wahrscheinlichkeiten gelten:

Lieferzeit (Tage)	Wahrscheinlichkeit
2	0,3
3	0,4
4	0,3

Simulieren Sie die Lieferzeit, und ermitteln Sie unter Benutzung der Daten der Abb. 30 die Kosten bei Verwendung der dritten Entscheidungsregel. Wie groß ist die erwartete Lieferzeit?

6. Nehmen Sie an, daß die Lieferzeit in Beispiel 2 konstant sei, daß jedoch die Nachfrage, die dann auftritt, wenn die Lager leer sind, nicht zu Auftragsrückständen führe, sondern als verloren angesehen werden müsse. Der Gewinnausfall bei einem Stück, nach dem Nachfrage besteht, das jedoch nicht geliefert werden kann, sei 3 DM. Revidieren Sie in Abb. 30 die Kosten unter Benutzung der dritten Entscheidungsregel.

7. Nehmen Sie an, daß in Beispiel 2 eine während leerer Lager nachgefragte Einheit manchmal den Auftragsrückstand vergrößert und manchmal als verlorene Nachfrage betrachtet werden müsse. Die Wahrscheinlichkeit für die Vergrößerung des Auftragsrückstandes verringere sich mit dem Anwachsen des Auftragsrückstandes (da die erwartete Verzögerung in der Belieferung vergrößert wird). Diskutieren Sie, wie Sie das in Abb. 29 gezeigte Flußdiagramm und den Simulationsvorgang variieren müßten, um das oben beschriebene zu berücksichtigen. Führen Sie jedoch noch keinerlei Rechnungen durch.

8. Simulieren Sie für Beispiel 2 unter Benutzung der Entscheidungsregel eins 20 Tage.

9. Simulieren Sie für Beispiel 2 unter Verwendung der Entscheidungsregel zwei 20 Tage.

10. Simulieren Sie in Beispiel 2 unter Verwendung der Entscheidungsregel vier 20 Tage.

11. Spielen Sie Beispiel 2 als Unternehmungsspiel, indem Sie die Entscheidungen über die zu bestellende Mengen selbst fällen. Simulieren Sie unter Zugrundelegung Ihrer Entscheidungen 20 Tage, und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen der vier Entscheidungsregeln. Konnten Sie es besser?

12. Formulieren Sie unter Verwendung der Ergebnisse der Übungen 8 bis 11 eine Entscheidungsregel, die den Regeln 1 bis 4 überlegen ist. Gestalten Sie diese Regel so einfach wie möglich.

13. Errechnen Sie für Beispiel 2 die erwartete Gesamtnachfrage während 20 Tagen, und vergleichen Sie sie mit den in Abb. 30 erhaltenen Ergebnissen. Es kann gezeigt werden, daß eine „Standardabweichung" für die Gesamtnachfrage innerhalb von n Tagen $\sqrt{(3{,}72)n}$ ist. Um wieviel Standardabweichungen wich der erhaltene Wert von dem erwarteten Wert ab?

[Lös.: 64,8 weniger als eine Standardabweichung.]

15*. Verläßlichkeit von Bauteilen

In der modernen Technik ist es für das Funktionieren eines Systems oft notwendig, daß jedes einer großen Anzahl von Bauteilen genau funktioniert. Wenn wir voraussetzen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß jedes Bauteil genau funktioniert, kleiner als 1 ist, dann ist die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Gesamtsystem richtig arbeitet, ein Problem elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir wollen zuerst annehmen, daß das System nur dann einwandfrei funktioniere, wenn alle Bauteile einwandfrei arbeiten, und daß das Funktionieren eines Bauteiles unabhängig von dem Zustand der anderen Bauteile sei. Haben wir vier Bauteile A, B, C, D, die mit den Wahrscheinlichkeiten p_A, p_B, p_C, p_D einwandfrei arbeiten, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System S_1 (wie es in Abb. 32 gezeigt wird) einwandfrei arbeitet

$$p_{S1} = p_A \cdot p_B \cdot p_C \cdot p_D.$$

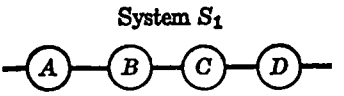


Abb. 32

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System einwandfrei arbeitet, verbessern wollen, so könnten wir z. B. zwei Systeme des Types S_1 so parallel schalten, daß das Gesamtsystem S_2 dann funktioniert, wenn eines der zwei Systeme intakt ist. (Siehe Abb. 33.)

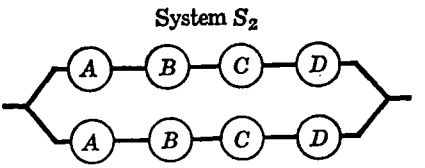


Abb. 33

Ein anderer Weg, die Verläßlichkeit zu verbessern, wäre, das System S_3 durch das Parallelschalten jeweils zweier Bauteile eines Types zu bilden. (Siehe Abb. 34.) Dieses System wird dann einwandfrei arbeiten, wenn wenigstens ein Bauteil jedes Types in Ordnung ist.

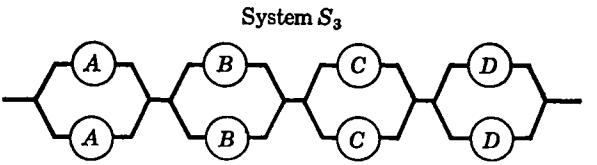


Abb. 34

Um festzustellen, um wieviel wir die Verläßlichkeit des Gesamtsystems verbessert haben, müssen wir die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren jedes der neuen Systeme errechnen. Bevor wir dies tun, beachten Sie jedoch, daß aus rein logischen Gründen das System S_2 wenigstens so gut ist wie das System S_1. Der Grund dafür ist, daß jede Möglichkeit, unter der

System S_1 funktioniert, auch eine Funktionsmöglichkeit von System S_2 darstellt. Jede Möglichkeit, bei der das System S_2 einwandfrei arbeitet, ist ebenfalls eine Arbeitsmöglichkeit für S_3. Dazu treten bei System S_3 weitere zusätzliche Arbeitsmöglichkeiten. Das System S_3 ist daher wenigstens so gut wie das System S_2.

Lassen Sie uns nun die Wahrscheinlichkeit dafür betrachten, daß das System S_2 einwandfrei arbeitet. Nur wenn beide Systeme des Types S_1 nicht arbeiten, funktioniert auch das System S_2 nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $(1 - p_{S1})^2$. Es ist daher

$$p_{S2} = 1 - (1 - p_{S1})^2.$$

Damit das System S_3 richtig arbeitet, müssen alle Bauteilepaare in Ordnung sein. Ein Bauteilepaar kann jedoch nur dann als fehlerhaft angesehen werden, wenn beide Bauteile fehlerhaft sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür daß S_3 einwandfrei arbeitet, ist also

$$p_{S3} = (1 - (1 - p_A)^2)(1 - (1 - p_B)^2)(1 - (1 - p_C)^2)(1 - (1 - p_D)^2).$$

Wir können die Verläßlichkeit des Systems weiterhin dadurch verbessern, daß wir jeweils drei Bauteile eines Types parallel schalten. (Siehe Abb. 35.) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System S_4 einwandfrei arbeitet, ist dann

$$p_{S4} = (1 - (1 - p_A)^3)(1 - (1 - p_B)^3)(1 - (1 - p_C)^3)(1 - (1 - p_D)^3).$$

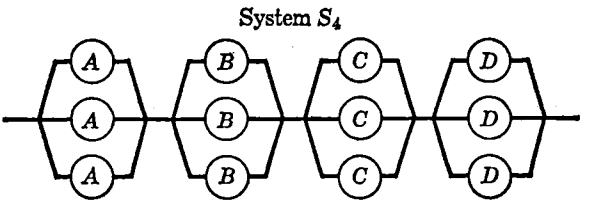


Abb. 35

Die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren ist hier noch größer als bei S_3, da jeder der Faktoren vergrößert wurde. Es ist offensichtlich, daß wir durch das Parallelschalten von genügend Bauteilen jedes Types die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Arbeiten so groß machen können, wie es uns beliebt.

Vom Standpunkt der auftretenden Kosten und des benötigten Raumes her bestehen natürlich gegen ein willkürliches Hinzufügen weiterer Bauteile Beschränkungen. Daneben gibt es jedoch noch eine andere, ungünstige Auswirkung: Nehmen Sie an, unser System bestehe aus einer Anzahl von Stationen, die die Aufgabe haben, bei Feindannäherung bestimmte Raketen auszulösen. Durch die Vergrößerung der Anzahl vorhandener Stationen

erhöhen wir zwar die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens eine Station in der Lage sein wird, den Befehl weiterzugeben. Mit jeder zusätzlichen Station steigt jedoch auch die Möglichkeit irrtümlich ausgesandter Impulse. Wir hätten also auch diesen Faktor zu berücksichtigen.

Zu diesem Zweck wollen wir annehmen, daß für jedes Bauteil eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür bestehe, daß es dann in Aktion tritt, wenn es dies eigentlich nicht tun sollte. Wir werden also annehmen, daß jedes Bauteil mit der Wahrscheinlichkeit p funktioniert, wenn es funktionieren soll, und daß es mit der Wahrscheinlichkeit r dann in Kraft tritt, wenn dafür kein Grund vorliegt. Natürlich ist für jedes wirkliche System $0 < p < 1$ und $0 < r < 1$.

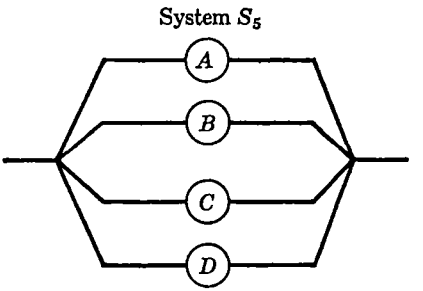


Abb. 36

Betrachten Sie wiederum zuerst den einfachen Fall, bei dem vier Bausteine parallel geschaltet sind: (siehe Abb. 36). Die Voraussetzung für ein einwandfreies Arbeiten ist, daß wenigstens eins der Bauteile in Aktion tritt, wenn ein Signal eingegeben wird, und daß keines der Bauteile funktioniert, solange kein Signal eingegeben wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$P_4 = r^4(1 - (1 - p)^4).$$

Sind m solcher Komponenten vorhanden, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür

$$P_m = r^m(1 - (1 - p)^m).$$

Wir können nun nicht mehr die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren des Systems durch das immer weitere Hinzufügen von Komponenten unendlich steigern. In Wirklichkeit können wir durch die Wahl eines genügend großen m die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System einwandfrei arbeitet, beliebig kleiner werden lassen. (Siehe Übung 8.) Wir wollen um die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit von m zu ermitteln, das Verhältnis

$$t_m = \frac{P_{m+1}}{P_m}$$

bilden.

Setzen wir $q = 1 - p$, so ist

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{r^{m+1}(1 - q^{m+1})}{r^m(1 - q^m)} \\ &= \frac{r(1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^m)}{(1 - q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1})} \\ &= r\left(1 + \frac{q^m}{1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1}}\right). \end{aligned}$$

Für $m = 1, 2, 3$ ergibt sich

$$t_1 = r(1 + q)$$

$$t_2 = r\left(1 + \frac{q^2}{1+q}\right)$$

$$t_3 = r\left(1 + \frac{q^3}{1+q+q^2}\right).$$

Aus der Form von t_m ist klar zu ersehen (siehe Übung 7), daß wir den Wert von t_m durch eine Vergrößerung von m verkleinern. Wir können P_m durch die Vergrößerung von m solange wachsen lassen wie $t_m > 1$. Wir haben also ein Interesse daran, den Wert zu finden, bei dem t_m das erste Mal kleiner als 1 wird. Dies wird von r und p abhängen.

In Abb. 37 haben wir die Gleichungen graphisch dargestellt, die wir für $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$ und $t_5 = 1$ erhalten. Für alle Kombinationen von p und r, die unter der Kurve $p_1 = 1$ liegen, sollten wir nur einen Baustein benutzen. Liegt (p, r) zwischen der Linie $t_1 = 1$ und $t_2 = 1$,

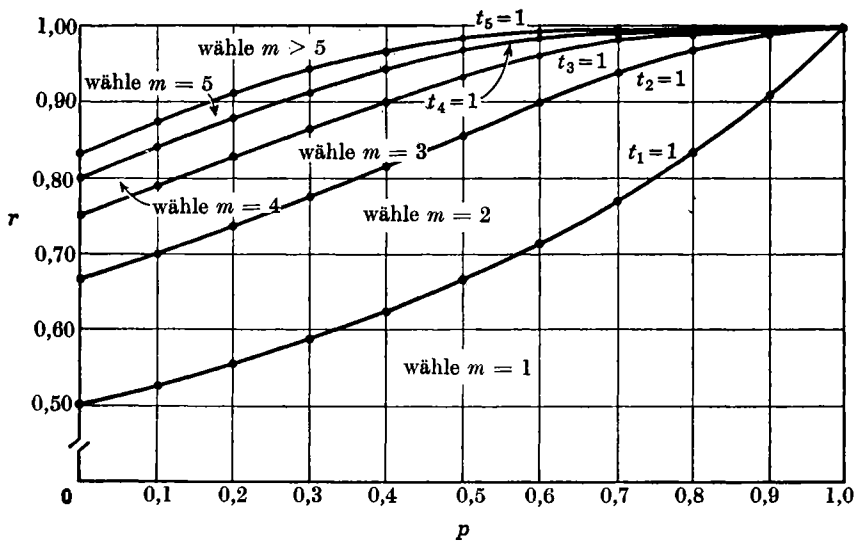


Abb. 37

so benutzen wir am besten zwei Bausteine usw. So brauchten wir z. B. für $p = 0{,}8$ einen Baustein, solange r kleiner als 0,83 ist, und zwei Bausteine, wenn r zwischen 0,83 und 0,97 liegt. Wir sehen z. B., daß wir immer dann zwei Bausteine benötigen, wenn die Werte von p zwischen 0,7 und 1 liegen und r nicht sehr nahe bei 1 liegt. Abb. 38 zeigt in vergrößerter Form einen kritischen Ausschnitt aus der Abb. 37.

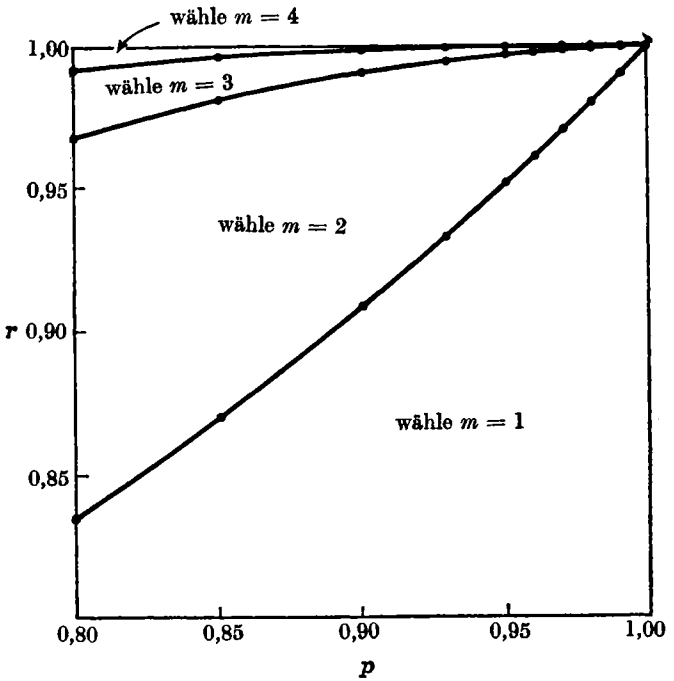


Abb. 38

ÜBUNGEN

Betrachten Sie in den Übungen 1 bis 3 Systeme mit drei Typen von Bauteilen A, B und C. Für das Funktionieren eines Bauteiles der Type A bestehe die Wahrscheinlichkeit von 0,9, für eins der Type B die Wahrscheinlichkeit von 0,7 und für eins der Type C die Wahrscheinlichkeit von 0,8.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das einwandfreie Arbeiten von Systemen des Types S_1, S_2, S_3 und S_4.
2. Bestimmen Sie für die in Übung 1 gegebenen Fälle die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Arbeiten unter der Voraussetzung, daß ein Bauteil der Type A als fehlerhaft bekannt ist.
3. Ein System der Type S_1 werde eine Woche lang einmal am Tag benutzt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß das System jeden Tag funktioniert?
4. Betrachten Sie die zwei in Abb. 39 gezeigten Systeme, deren Komponenten A

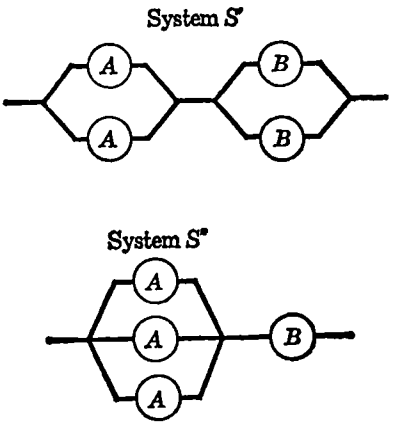


Abb. 39

und B beide mit der Wahrscheinlichkeit von p genau arbeiten. Zeigen Sie, daß das System S' immer besser ist als das System S''.

Die Übungen 5 bis 9 beziehen sich alle auf ein System, in dem gleichartige Bauteile parallel geschaltet werden, wobei jedes Bauteil mit der Wahrscheinlichkeit p einwandfrei arbeite, wenn kein Signal gegeben ist.

5. Es sei $p = 0{,}9$, $r = 0{,}65$. Wie viele Komponenten sollten verwandt werden, um eine maximale Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Arbeiten zu erreichen? [Lös.: 1.]

6. Nehmen Sie an, daß $p = 0{,}9$ sei und r angeglichen werden kann. Es sollen nicht mehr als zwei Bauteile verwandt werden, und die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Arbeiten soll wenigstens 0,9 betragen. Wie groß sollte dann r sein? [Lös.: $r > 0{,}95$.]

7. Beweisen Sie, daß $t_{m+1} < t_m$.

8. Beweisen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Arbeiten durch die Wahl einer genügend großen Anzahl von Bauteilen beliebig klein gemacht werden kann.

9. Für viele Systeme gilt $0{,}90 < p < 0{,}98$ und $0{,}98 < r < 0{,}999$. Zeigen Sie, daß bei all diesen Systemen das maximale P_m bei $m = 2$ oder $m = 3$ liegt.

10. Ein Satellit solle beim Empfang eines Signals von einer Bodenstation eine Botschaft an die Erde zurücksenden. Man sehe für diesen Zweck einen einfachen Schalter vor, der mit der Wahrscheinlichkeit von 0,7 beim Eintreffen eines Signals reagiert und der mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 nicht reagiert, solange kein Signal empfangen wird. Wie viele verschiedene Schalter sollte man einbauen, um die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Botschaft zur rechten Zeit abgesandt wird, zu maximieren? Wie groß ist die maximale Wahrscheinlichkeit? [Lös.: 3, 0,83.]

11. Ein Spion solle eine gefährliche Mission erfüllen. Es bestehe die Wahrscheinlichkeit von 0,3, daß er die gewünschte Information erhält; er wird jedoch nur mit der Wahrscheinlichkeit von 0,9 zurückkehren. Wir wollen annehmen, daß diese Wahrscheinlichkeiten voneinander unabhängig seien und daß dies auch für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Spione gelte. Wie viele Spione sollten ausgesandt werden, um die Wahrscheinlichkeit für das Erhalten der Information ohne den Verlust eines Spiones zu maximieren? Wie groß ist die maximale Wahrscheinlichkeit? [Lös.: 4, 0,499.]

12. Eine Bombe solle zu einer bestimmten Zeit durch einen Zünder gezündet werden. Jeder der Zünder werde die Bombe zu ungefähr der richtigen Zeit mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 zur Explosion bringen. Es bestehe jedoch die Wahrscheinlichkeit von 0,01 dafür, daß der Zünder die Bombe infolge technischer Mängel zu früh auslöst. Wie viele Zünder sollte man benutzen, um die Wahrscheinlichkeit einer Explosion zur richtigen Zeit zu maximieren? Wie groß ist die maximale Wahrscheinlichkeit?

16*. Entscheidungstheorie

In Abschnitt 6 sahen wir, daß die nach der Durchführung eines Testes oder nach der Entnahme einer Stichprobe errechnete Wahrscheinlichkeit durch-

aus von der Wahrscheinlichkeit abhängen kann, die vor dem Test oder der Stichprobe einem bestimmten Ergebnis zugeordnet wurde. Ist dies der Fall, so können wir sagen, daß der Test oder die Stichprobe uns Information lieferte.

In dem wiederholt diskutierten Beispiel des Ölsuchers konnten wir uns entweder sofort für eine endgültige Verhaltensweise (Bohren oder Verkaufen der Bohrrechte) entscheiden, oder wir könnten zunächst durch die Durchführung seismographischer Aufnahmen versuchen, zusätzliche Informationen zu erhalten. Erhielten wir neue Informationen, so standen wir dann vor dem Problem, zu entscheiden, wie uns diese bei der Festlegung unserer endgültigen Verhaltensweise helfen konnte. Wir standen jedoch nie vor dem Problem zu entscheiden, *wieviel* Information wir uns beschaffen sollten. Urteilen wir nach dem Gefühl, so scheint es offensichtlich zu sein, daß eine sehr kleine Stichprobe im allgemeinen zwar einige, aber nicht sehr viel Information liefert, während eine sehr große Stichprobe uns vielleicht alle Information liefern kann, die wir brauchen. Warum geben wir uns dann je mit einer kleineren als möglichen Stichprobe zufrieden? Die Antwort darauf ist natürlich, daß die Entnahme von Stichproben Geld kostet. Je größer die Stichprobe, desto höher sind die anfallenden Kosten. Wir sehen uns daher gezwungen, einen Weg zu suchen, auf dem wir den Wert der Information messen können. Haben wir das erst einmal erreicht, so kann die Frage danach, wieviel Information beschafft werden sollte, durch die Anwendung des Prinzips gelöst werden, daß die Information so lange vergrößert werden sollte, als der Grenzwert ihres Zuwachses die durch die Informationsbeschaffung anfallenden Grenzkosten übersteigt.

Um dieses Prinzip zu illustrieren, ohne die erforderlichen Rechnungen zu umfangreich zu gestalten, wollen wir unsere Diskussion auf ein einfaches Beispiel beschränken. Eine Maschine produziere gemäß einer Folge unabhängiger Versuche mit zwei möglichen Ergebnissen gute und fehlerhafte Stücke. Die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen eines fehlerhaften Stückes sei p. Ist die Maschine einwandfrei eingerichtet, so soll der Wert für $p = 0{,}1$ sein, wurde sie nur oberflächlich eingerichtet, so sei $p = 0{,}3$. Wird die Maschine mit den üblichen Hilfsmitteln eingerichtet, so ist der Wert von p nicht mit Sicherheit bekannt. Er kann jedoch dadurch bestimmt werden, daß man ein Musterstück durch die Maschine laufen läßt und dabei die Einstellung der Maschine überprüft, so daß man ein p von 0,1 garantieren kann. Die Kosten für einen solchen Durchlauf eines Musterstückes und eine eventuelle Korrektur der Einstellung betragen 25 DM.

Es solle ein Los von 1000 Stück hergestellt werden. Fehlerhafte Stücke könnten zu 25 Pfg. pro Stück nachgearbeitet werden. Ehe man mit der Fertigung des Loses beginnt, könne eine Stichprobe vorbestimmter Größe auf der Maschine gefertigt werden. Auf Grund des Ergebnisses dieser Stichprobe kann dann entschieden werden, ob man den Musterlauf durchführt

oder nicht. Die Prüfung jedes Stückes der Stichprobe koste 0,40 DM. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir voraussetzen, daß die Stichprobe kein Teil des zu produzierenden Loses sei.

Wir stehen nun vor zwei möglichen Verhaltensweisen: „Fertigen" und „Korrigieren". Es gibt zwei mögliche, durch den Wert für p bestimmte Zustände der Maschine: „$p = 0{,}1$" und „$p = 0{,}3$". Für jede Kombination eines Zustandes mit einer Handlungsweise fallen bestimmte Kosten an. So wird z. B. die Handlungsweise „Fertigen" erwartete 1000 p fehlerhafte ergeben, von denen jedes 0,25 DM kostet, so daß die erwarteten Kosten von „Fertigen" 250 DM $\cdot\, p$ betragen. Ist $p = 0{,}1$, so betragen also die Kosten 25 DM. Ist $p = 0{,}3$, so betragen sie 75 DM. Betrachten wir nun die mit der Verhaltensweise „Korrigieren" verbundenen Kosten: Es ist offensichtlich, daß diese Handlungsweise unabhängig vom ursprünglichen Zustand der Maschine 25 DM für das Neueinrichten zuzüglich der erwarteten Kosten für fehlerhafte Produkte beim Zustand „$p = 0{,}1$" der Maschine ergibt. Wir sahen bereits, daß für das letztere ein Betrag von 25 DM einzusetzen ist, so daß die erwarteten Kosten von „Korrigieren" unabhängig davon, ob sich die Maschine ursprünglich im Zustand „$p = 0{,}1$" oder „$p = 0{,}3$" befand, 50 DM betragen. Wir haben den möglichen Kostenanfall in Abb. 40 dargestellt.

	Verhaltensweise	
	Fertigen	Korrigieren
Zustand $p = 0{,}1$	25 DM	50 DM
$p = 0{,}3$	75 DM	50 DM

Abb. 40

Nehmen Sie nun an, es sei auf Grund vorliegender Erfahrungen festgestellt worden, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die Maschine ursprünglich im Zustand $p = 0{,}1$ befindet, 0,6 ist, und dafür, daß sie sich im Zustand $p = 0{,}3$ befindet, 0,4 ist. Wir können dann leicht die erwarteten Kosten der zwei Verhaltensweisen errechnen, wenn wir uns plötzlich für eine davon entscheiden müssen. Wir zeigen in Abb. 41 einen Entscheidungsbaum der vier möglichen Zustand-Verhaltensweise-Kombinationen, mit den jeweils dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten und Kosten. Daraus können wir errechnen:

Erwartete Kosten des Fertigens $= E_f = (0{,}6)(25) + (0{,}4)(75) = 25$ DM
Erwartete Kosten des Korrigierens $= E_k = (0{,}6)(50) + (0{,}4)(50) = 50$ DM.

Müssen wir uns für eine endgültige Verhaltensweise entscheiden, so ist die mit den niedrigeren erwarteten Kosten die des Fertigens.

Unser Problem besteht darin, zu bestimmen wieviel wir für zusätzliche Informationen zahlen sollten. Wir wollen zunächst den Wert „perfekter Information" betrachten. Wenn uns jemand den Wert von p sagte, so könnten wir die Entscheidung über die Verhaltensweise unter der Verwendung dieses Wissens fällen. Das Entscheidungsproblem unterscheidet sich also von dem in Abb. 41 gezeigten darin, daß der Zustand vor der Verhaltensweise steht. Wir stellen dieses neue Problem in Abb. 42 dar.

Wir können bei diesem Problem die weniger kostspielige Verhaltensweise in jedem Falle auswählen (in Abb. 42 eingerahmt). Die erwarteten Kosten bei vollständiger Information sind also

$$(0{,}6)(25) + (0{,}4)(50) = 35 \text{ DM}.$$

Da wir unter Zugrundelegung der vorhandenen Information erwartete Kosten von 45 DM dadurch garantieren können, daß wir immer die Verhaltensweisen „Fertigen" wählen, wir auf der anderen Seite diese Kosten durch das Vorhandensein vollständiger Information auf 35 DM senken könnten, würde es sich lohnen, 45 DM — 35 DM = 10 DM für zusätzliche Information auszugeben.

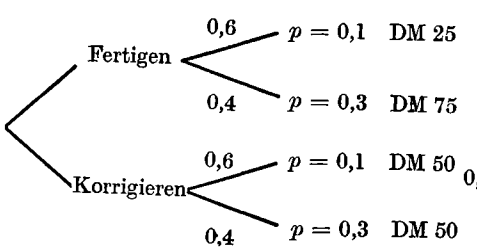


Abb. 41

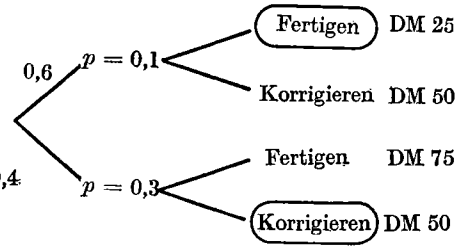


Abb. 42

Wenden wir diese Kenntnis auf die Entnahme von Stichproben an, so bedeutet dies, daß es nie wirtschaftlich sein wird, größere Stichproben als 10 DM: 0,40 DM = 25 Stück zu entnehmen.

Wir wollen nun annehmen, wir wählten eine Stichprobe der Größe n und beobachteten darin r fehlerhafte Teile. Die Wahrscheinlichkeit für r ist dann

$$\begin{aligned}(1)\quad \mathbf{Pr}[r] &= \mathbf{Pr}[r \mid p = 0{,}1]\,\mathbf{Pr}[p = 0{,}1] + \mathbf{Pr}[r \mid p = 0{,}3\,\mathbf{Pr}[p = 0{,}3] \\ &= \mathfrak{b}(r; n, 0{,}1) \cdot (0{,}6) + \mathfrak{b}(r; n, 0{,}3) \cdot (0{,}4),\end{aligned}$$

da der Prozeß, innerhalb dessen gute und fehlerhafte Stücke ausgestoßen werden, dann eine Folge unabhängiger Versuche ist, wenn p gegeben ist. Wir können nun das Bayessche Theorem benutzen, um die Wahrscheinlichkeiten für $p = 0{,}1$ und $p = 0{,}3$ neu festzusetzen. So ist z. B.

$$\mathbf{Pr}[p = 0{,}1 \mid r] = \frac{\mathbf{Pr}[r \mid p = 0{,}1]\,\mathbf{Pr}[p = 0{,}1]}{\mathbf{Pr}[r]}$$

$$= \frac{\mathbf{b}(r; n, 0{,}1) \cdot (0{,}6)}{\mathbf{b}(r; n, 0{,}1) \cdot (0{,}6) + \mathbf{b}(r; n, 0{,}3) \cdot (0{,}4)}$$

$$\mathbf{Pr}[p = 0{,}3 \mid r] = 1 - \mathbf{Pr}[p = 0{,}1 \mid r].$$

Obwohl es uns natürlich freisteht, eine endgültige Verhaltensweise festzulegen, nachdem wir r festgestellt haben, werden wir es nützlich finden, folgende Tatsachen zu beachten: a) Nach den obigen Ausführungen impliziert jeder Wert von r eine ganz bestimmte nachträgliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß $p = 0{,}1$ bzw. daß $p = 0{,}3$ ist. b) Wir können vor der Entnahme irgendeiner Stichprobe die Werte für $\mathbf{Pr}[p = 0{,}1]$, die nach der Stichprobe errechnet werden, angeben, für die „Fertigen" die Verhaltensweise mit den niedrigeren erwarteten Kosten ist. Das gleiche gilt für die Werte, für die „Korrigieren" niedrigere Kosten erwarten läßt. Wir erreichen dies, indem wir die erwarteten Kosten der beiden Verhaltensweisen wie folgt schreiben:

Erwartete Kosten des Fertigens $= E_f =$ DM 25 $\cdot\, \mathbf{Pr}[p = 0{,}1]$
$+$ DM 75$(1 - \mathbf{Pr}[p = 0{,}1]) =$ DM 75 $-$ DM 50 $\mathbf{Pr}[p = 0{,}1]$

Erwartete Kosten des Korrigierens $= E_k =$ 50 DM.

Es ist dann und nur dann $E_k < E_f$, wenn $\mathbf{Pr}[p = 0{,}1] < 0{,}5$ ist.

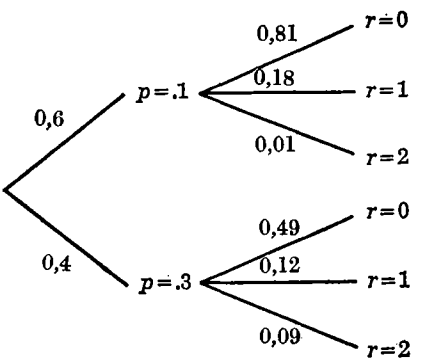


Abb. 43

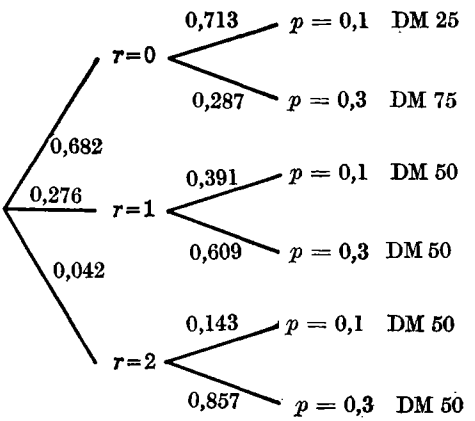


Abb. 44

Wir wollen uns jetzt ein Zahlenbeispiel ansehen: Unsere Stichprobe habe einen Umfang von $n = 2$. Die bedingten (binomialen) Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Ergebnisse und die verschiedenen möglichen Werte von p können aus dem in Abb. 43 gezeigten Baum entnommen werden. Wir erhalten die Wahrscheinlichkeiten von r und die Wahrschein-

lichkeiten von p bei gegebenen r, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten für p und r für alle möglichen Kombinationen errechnen und damit das in Abb. 44 gezeigte Baumdiagramm aufstellen. (Siehe Beispiel 4, Abschnitt 7.) Für jeden Pfad sind die entsprechenden Kosten angegeben. Die Werte stellen die Kosten für die nach der folgenden Methode bestimmten Verhaltensweisen dar: Wenn $r = 0$, so ist $\mathbf{Pr}[p = 0{,}1] = 0{,}713 > 0{,}5$. Ist also $r = 0$ gegeben, so ist „Fertigen" die bessere Verhaltensweise. Ist $p = 0{,}1$, so betragen die Kosten für Fertigen 25 DM. Ist $p = 0{,}3$, so betragen die Kosten für Fertigen 75 DM. Für $r = 1$ ist $\mathbf{Pr}[p = 0{,}1] = 0{,}391 < 0{,}5$. Die Verhaltensweise mit den niedrigeren erwarteten Kosten ist also „Korrigieren", und die dafür erwarteten Kosten von 50 DM fallen unabhängig von der Größe von p an. Ist $r = 2$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $p = 0{,}1$ ist, sicherlich kleiner als wenn $r = 1$ ist. „Korrigieren" ist daher wiederum die vorzuziehende Verhaltensweise.

Um die erwarteten Endkosten zu errechnen, multiplizieren wir jeden Pfadwert mit seinem Gewicht und addieren sie. Der in Abb. 44 gezeigte Baum kann zunächst auf den in Abb. 45 gezeigten reduziert werden, da jeweils dann, wenn r größer als 0 ist, die gleiche Verhaltensweise gewählt wird und da die Kosten unabhängig von p sind. Wir errechnen also nun die erwarteten Endkosten (für $n = 2$) zu

$$0{,}682\,[(0{,}713)\,(25) + (0{,}287)\,(75)] + (0{,}318)\,(50) = \text{DM } 42{,}75.$$

Das ist wesentlich weniger als die erwarteten 45 DM bei der Wahl der besseren Verhaltensweise ohne vorher Stichproben zu entnehmen; es ist jedoch wesentlich mehr, als bei einer Wahl unter vollständiger Information zu erwarten gewesen wäre, nämlich 35 DM.

Um diese Reduzierung der erwarteten Kosten zu erreichen, verursachten wir Stichprobenkosten von DM $0{,}40n = 0{,}80$ DM. Die erwarteten Kosten für die Entnahme einer Stichprobe von 2, das Fertigen, wenn $r = 0$, und das Korrigieren, wenn r ungleich 0, sind daher 42,75 DM + 0,80 DM = 43,55 DM. Die erwarteten Kosten bei der Entnahme einer Stichprobe und der Wahl der auf Grund dieser Stichprobe am günstigsten erscheinenden Verhaltensweise sind selbst dann niedriger, als wenn wir uns für eine Verhaltensweise ohne vorherige Stichprobenprüfung entschieden hätten, wenn wir die Kosten für die Stichprobe berücksichtigen.

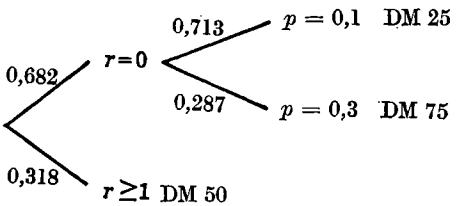


Abb. 45

Es erhebt sich nun die Frage: Können wir das Ergebnis durch eine Stichprobe anderer Größe noch verbessern? Wir wissen, daß n kleiner als 25 sein muß, so daß wir nur eine begrenzte Anzahl von Rechnungen der Art, wie wir sie gerade durchgeführt haben, vorzunehmen haben. Da dies ein sehr aufwendiger Vorgang ist, geben wir Ihnen an dieser Stelle die meisten der Ergebnisse an und bitten Sie, die verbleibenden Lücken im Rahmen der folgenden Übungen auszufüllen. In Abb. 46 werden die Werte von r angegeben, für die, bei n zwischen 1 und 25, die Verhaltensweise mit den niedrigeren Kosten „Fertigen" ist. Wir sehen aus dieser Abbildung ebenfalls die erwarteten Kosten der jeweiligen Verhaltensweise und die erwarteten Gesamtkosten, die die Kosten für die Entnahme der Stichprobe einschließen.

Wir können daraus ersehen, daß die optimale Stichprobengröße $n = 6$ ist. Die erwarteten Gesamtkosten dafür sind 43,31 DM, d. h. 1,69 DM weniger als die zu erwartenden Kosten der besseren Verhaltensweise bei einer Entscheidung ohne vorherige Stichprobenentnahme. Bei einer Stichproben-

n	Werte von r, für die „Fertigen" günstiger ist	Erwartete Endkosten	Erwartete Gesamtkosten
1	?	?	?
2	$r = 0$	DM 42,75	DM 43,55
3	?	?	?
4	$r \leqq 1$	42,30	43,90
5	$r \leqq 1$	41,51	43,51
6	$r \leqq 1$	40,91	43,31
7	$r \leqq 1$	40,54	43,34
8	$r \leqq 1$	40,36	43,56
9	$r \leqq 1$	40,34	43,94
10	$r \leqq 2$	39,88	43,88
11	$r \leqq 2$	39,47	43,87
12	$r \leqq 2$	39,19	43,99
13	$r \leqq 2$	39,03	44,23
14	$r \leqq 2$	38,98	44,58
15	$r \leqq 3$	38,80	44,80
16	$r \leqq 3$	38,48	44,88
17	$r \leqq 3$	38,26	45,06
18	$r \leqq 3$	38,12	45,32
19	$r \leqq 3$	38,06	45,66
20	$r \leqq 4$	38,02	46,02
21	$r \leqq 4$	37,77	46,17
22	$r \leqq 4$	37,58	46,38
23	$r \leqq 4$	37,45	46,65
24	$r \leqq 4$	37,39	46,99
25	$r \leqq 4$	37,37	47,37

Abb. 46

größe von $n = 6$ ist es günstiger, dann zu fertigen, wenn $r = 0$ oder 1 fehlerhafte Teile gefunden werden. Ist $r \geqq 2$, so ist es günstiger zu korrigieren (die Maschine neu einzustellen).

ÜBUNGEN

1. Ergänzen Sie in Abb. 36 die Werte für $n = 1$ und $n = 3$.

2. Ein Irrtum liegt dann vor, wenn wir bei $p = 0{,}3$ „fertigen" oder wenn wir bei $p = 0{,}1$ „korrigieren". Unter Benutzung einer optimalen Strategie und bei $n = 6$
   a) wir groß ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Irrtum bei $p = 0{,}1$? [Lös.: 0,114.]
   b) wie groß ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Irrtum bei $p = 0{,}3$? [Lös.: 0,420.]
   c) wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Irrtum unterläuft? [Lös.: 0,236.]

3. Es wird häufig vorgeschlagen, in Situationen, wie der in diesem Abschnitt beschriebenen, die Stichprobengröße so zu wählen, daß die bedingten Wahrscheinlichkeiten für Irrtümer bei zwei gegebenen Werten für p kleiner als eine vorher bestimmte Zahl sind. So mag z. B. das Ziel sein, die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Irrtum bei gegebenem $p = 0{,}1$ auf 0,05 und bei gegebenem $p = 0{,}3$ auf 0,1 zu begrenzen. Diskutieren Sie diese Methode im Lichte der Ergebnise der Übung 2.

4. Der optimale Weg der Stichprobenentnahme kann für das in diesem Abschnitt angeführte Beispiel durch die Entscheidungsregel $(n, c) = (6{,}1)$ dargestellt werden. (Siehe Übung 17 des Kapitels 1, Abschnitt 5.) Die Regel (6,1) bedeutet: „Entnehmen Sie eine Stichprobe von 6; ist die Anzahl der darin gefundenen fehlerhaften Stücke $r \leqq 1$, so fertigen Sie; ist $r < 1$, korrigieren Sie." Eine *Vorgehenscharakteristik* (siehe Übung 9, Abschnitt 8) zeigt die Wahrscheinlichkeiten für die Wahl einer der Verhaltensweisen — z. B. „Fertigen" — bei Benutzung einer Entscheidungsregel. Stellen Sie die Vorgehenscharakteristik der Entscheidungsregel (6,1) graphisch dar, indem Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit für „Fertigen" für jeden Wert von p in Tabelle 1 errechnen und dann die p-s in der Horizontalen und die Wahrscheinlichkeiten für „Fertigen" in der Vertikalen anordnen.

5. Betrachten Sie das in diesem Abschnitt behandelte Beispiel. Nehmen Sie an, daß bei identischen Kosten p die Werte 0,1, 0,15 und 0,3 annehmen kann und daß

$$\begin{aligned} \mathbf{Pr}[p = 0{,}1] &= 0{,}3 \\ \mathbf{Pr}[p = 0{,}15] &= 0{,}4 \\ \mathbf{Pr}[p = 0{,}3] &= 0{,}3. \end{aligned}$$

   a) Stellen Sie eine Tabelle der erwarteten Kosten für jede Verhaltensweise-Zustands-Kombination auf.
   b) Errechnen Sie die bessere Verhaltensweise, wenn man sich für eine der Möglichkeiten ohne vorherige Stichprobenentnahme entscheiden muß. Wie hoch sind die erwarteten Kosten?
   c) Für welche Verhaltensweise sollten wir uns entscheiden, wenn $p = 0{,}1, p = 0{,}15$, $p = 0{,}3$ ist, und wir kostenlose und perfekte Information über den Wert von p erhalten könnten? Wie hoch sind die erwarteten Kosten für eine optimale Verhaltensweise bei kostenloser und perfekter Information? Leiten Sie aus dieser Rechnung eine obere Grenze für die Stichprobengröße ab.

6. Nehmen Sie an, daß in Übung 5 eine Stichprobe der Größe $n = 6$ entnommen werde.
   a) Für welche Werte von r ist „Fertigen" die günstigere Verhaltensweise? Für welche Werte ist „Korrigieren" günstiger?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Wahl der Verhaltensweise „Fertigen" nach der Stichprobenauswertung? Ehe die Stichprobe entnommen wird?
   c) Errechnen Sie die erwarteten Endkosten einer optimalen Verhaltensweise nach der Stichprobenentnahme.
   d) Errechnen Sie die erwarteten Gesamtkosten der Stichprobenentnahme bei $n = 6$. Vergleichen Sie diese mit denen des Beispiels. Warum liegen sie höher als die erwarteten Kosten des Beispiels?

7. Nehmen Sie an, daß in dem Beispiel dieses Abschnittes eine Stichprobe von 2 entnommen wurde und darin kein fehlerhaftes Stück gefunden wurde. Wie hoch sind die erwarteten Kosten einer optimalen Verhaltensweise? Wie hoch sind die erwarteten Kosten, wenn ein fehlerhaftes Stück gefunden wurde? Wenn zwei fehlerhafte gefunden wurden? [Teillös.: Wenn $r = 0$ 39,37 DM.]

8. Die Urnen 1 und 2 enthalten weiße und schwarze Kugeln. In der Ausgangssituation enthalten die Urnen:

   Urne 1: zwei schwarze, acht weiße,
   Urne 2: sieben schwarze, drei weiße.

   Durch das Werfen einer Münze wird eine der zwei Urnen bestimmt. Aus der auf diese Weise ausgewählten Urne wird eine Stichprobe von n Kugeln entnommen, auf Grund derer versucht werden soll, die Ursprungsurne zu identifizieren. Wird die Urne richtig identifiziert, so gewinnen Sie 50 DM. Die Entnahmekosten für die Stichprobe seien 10 DM · n. Wie groß ist der erwartete Wert dieses „Spieles", wenn die Stichprobengröße im voraus festgelegt werden muß? [Lös.: 27,50 DM.]

Empfohlene Lektüre

Gnedenkow: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1958.
Harberg, G.: Einführung in die formale Logik, Braunschweig 1963.
Lorenzen, P.: Metamathematik, Mannheim 1962.
Cramer, Harold: The Elements of Probability, Wiley, New York, 1955, Teil I.
Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, New York, 1950.
Schlaifer, R.: Probability and Statistics for Business Decisions, McGraw-Hill, New York, 1959.
Whitworth, W. A.: Choice and Chance, with 1000 Exercises, Stechert., New York, 1934.

V. Vektoren und Matrizen

1. Spalten- und Zeilenvektoren

Ein Spaltenvektor ist eine geordnete Anzahl von Werten, die in Form einer Spalte geschrieben worden sind. Beispiele solcher Vektoren sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen Werte dieses Vektors werden *Komponenten* genannt, und die Zahl der Komponenten des Vektors ist eine Charakteristik, in der sich solche Vektoren unterscheiden. So haben die ersten zwei der oben gezeigten Vektoren zwei Komponenten, die nächsten zwei je drei Komponenten und der letzte Vektor vier Komponenten. Sprechen wir allgemeiner von Spaltenvektoren mit n Komponenten, so schreiben wie dies

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}.$$

In Analogie dazu ist ein *Zeilenvektor* eine in Zeilenform geschriebene, geordnete Anzahl von Werten. Beispiele für Zeilenvektoren sind

$$(1, 0), \quad (-2, 1), \quad (2, -3, 4, 0), \quad (-1, 2, -3, 4, -5).$$

Jede der in einem Vektor enthaltenen Zahlen wird wiederum eine Komponente des Vektors genannt, und die Anzahl der Komponenten des Zeilenvektors ist wiederum eine seiner wichtigen Charakteristiken. So enthalten die ersten zwei der oben gezeigten Zeilenvektoren zwei Komponenten, der dritte vier Komponenten und der vierte fünf Komponenten. Der Vektor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ wird als ein Zeilenvektor mit n Komponenten bezeichnet. Zwei Zeilen- oder Spaltenvektoren sind dann und nur dann gleich, wenn entsprechende Komponenten der Vektoren gleich sind. So sehen wir z. B., daß bei den vier Vektoren

$$u = (1, 2), \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = (1, 2), \quad x = (2, 1)$$

$u = w$, jedoch $u \neq v$ und $u \neq x$ ist.

Sind u und v Spaltenvektoren mit je drei Komponenten, so erhalten wir ihre Summe, indem wir die entsprechenden Komponenten wie folgt addieren:

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergibt sich, wenn u und v Zeilenvektoren mit je drei Komponenten sind, ihre Summe als

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3). \end{aligned}$$

Beachten Sie, daß die Summe zweier Vektoren mit je drei Komponenten wiederum ein Vektor mit drei Komponenten ist. Z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$(4, -7, 12) + (3, 14, -14) = (7, 7, -2).$$

Die Summe zweier Vektoren mit n Komponenten erhält man in Analogie dazu durch die Addition der sich jeweils entsprechenden Komponenten. Wir erhalten wiederum einen Vektor mit n Komponenten. Bitte beachten Sie, daß zwei Vektoren nur dann addiert werden können, wenn sie die gleiche Anzahl an Komponenten besitzen.

Da die Reihenfolge zweier Summanden beliebig ist, ist auch die Reihenfolge der zu addierenden Vektoren ohne Einfluß auf das Ergebnis. Es ist also

$$u + v = v + u$$

wobei u und v Zeilen- oder Spaltenvektoren sein können. Wir nennen diese Gesetzmäßigkeit das kommutative Gesetz der Addition. Wir wollen uns dies an einem Zahlenbeispiel ansehen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nachdem wir das Gesetz für die Addition zweier Vektoren formuliert haben, ist es nicht schwierig, es auf die Addition von mehr als zwei Vektoren zu erweitern. Wir haben lediglich jeweils zwei Vektoren zu einem Paar zusammenzufassen und dann die entsprechenden Komponenten dieser Paare zu addieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und

$$(1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) = (1, 2, 0) + (0, 0, 3) = (1, 2, 3)$$
$$= (1, 0, 0) + (0, 2, 3) = (1, 2, 3).$$

Allgemein gesagt besteht die Summe einer Anzahl von Vektoren mit jeweils gleichviel Komponenten aus einem Vektor, dessen erste Komponente die Summe aller ersten Komponenten der Vektoren ist, dessen zweite Komponente die Summe aller zweiten Komponenten der Vektoren ist usw.

Die Multiplikation eines Vektors v mit einer Zahl a geschieht durch eine Multiplikation jedes der Komponenten mit a. Für den Fall von drei Komponenten erhalten wir also:

$$au = a\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \\ au_3 \end{pmatrix}$$

für Spaltenvektoren,

und

$$av = a(v_1, v_2, v_3) = (av_1, av_2, av_3)$$

für Zeilenvektoren.

Stellt u einen Vektor mit n Komponenten dar, so erhalten wir $a \cdot u$ ebenfalls durch eine Multiplikation jeder der Komponenten mit a.

Ist u irgendein Vektor, so definieren wir den dazu negativen Vektor $-u$ als $-u = (-1 \cdot u)$. Für den Fall eines Zeilenvektors mit drei Komponenten erhielten wir also

$$-u = (-1)(u_1, u_2, u_3) = (-u_1, -u_2, -u_3).$$

Nachdem wir einen negativen Vektor definiert haben, können wir auch ohne Schwierigkeiten die Subtraktion zweier Vektoren durchführen: Wir addieren sie einfach „algebraisch". Dies sähe für einen Spaltenvektor mit drei Komponenten wie folgt aus:

$$u - v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix}.$$

Spezielle Fälle für die Subtraktion von Vektoren voneinander finden Sie in den Übungen am Ende dieses Abschnittes.

Ein besonders wichtiger Vektor ist der Nullvektor, ein Vektor, dessen Komponenten ausnahmslos aus Nullen bestehen. Null-Vektoren mit drei Komponenten sind

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } 0 = (0, 0, 0).$$

Wir werden im folgenden, solange keine Verwechslungsgefahr besteht, das Symbol 0 als Bezeichnung für einen Null (Zeilen oder Spalten)-Vektor benutzen. Der Sinn wird jeweils aus dem Zusammenhang klar werden. Der Nullvektor verfügt über eine wichtige Eigenschaft: Ist u ein beliebiger

Vektor, dann ist $u + 0 = u$. Wir wollen dies für einen Spaltenvektor mit drei Komponenten beweisen:

$$u + 0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + 0 \\ u_2 + 0 \\ u_3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u.$$

Eine der hauptsächlichsten Vorteile der Vektorenschreibweise ist, daß man eine ganze Reihe von Zahlen durch einen einzigen Buchstaben wie $u,v,\ldots$ bezeichnen kann und eine solche Zahlenfolge wie einen einzigen Wert behandeln kann. Unter Verwendung des Vektorbegriffes kann man sehr komplizierte Verhältnisse in einfacher Weise darstellen. Dem Leser wird diese Tatsache im Rest dieses Kapitels und in den drei folgenden Kapiteln des Buches an Hand von Beispielen vor Augen geführt werden.

ÜBUNGEN

1. Errechnen Sie die unten angegebenen Werte für die folgenden Vektoren:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) $2u$. $\left[\text{Lös.: } \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.\right]$

   (b) $-v$.

   (c) $2u - v$.

   (d) $v + w$. $\left[\text{Lös.: } \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.\right]$

   (e) $u + v - w$.

   (f) $2u - 3v - w$.

   (g) $3u - v + 2w$. $\left[\text{Lös.: } \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.\right]$

2. Errechnen Sie die Werte der Übung 1 von a) bis g) für die folgenden Vektoren u, v und w:

$$u = (7, 0, -3), \qquad v = (2, 1, -5), \qquad w = (1, -1, 0).$$

3. a) Zeigen Sie, daß der Wert des Nullvektors nicht geändert wird, wenn man ihn mit einer beliebigen Zahl multipliziert.
   b) Zeigen Sie, daß $0 + u = u$, wenn u ein beliebiger Vektor ist.

4. Beweisen Sie, daß $u + 0v = u$ und $0u + v = v$ ist, wenn u und v zwei Zeilen- oder Spaltenvektoren mit jeweils der gleichen Komponentenzahl sind.

5. Wie verhalten sich die Komponenten von u und v zueinander, wenn $2u - v = 0$ ist? [Lös.: $v_i = 2u_i$.]

6. Beantworten Sie die Frage der Übung 5 für die Gleichung $-3u + 5v + u - 7v = 0$. Desgleichen für die Gleichung $20v - 3u + 5v + 8u = 0$.

7. Errechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Summen. Wenn dies nicht möglich ist, geben Sie Gründe dafür an.

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = ?$

(b) $(2, -1, -1) + 0(4, 7, -2) = ?$

(c) $(5, 6) + 7 - 21 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$

(d) $1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$

8. Bestimmen Sie u_1, u_2 und u_3 für

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ [Lös.: 0; —2; —2.]

9. Bestimmen Sie die Komponenten von v für

$$2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

10. Was kann für $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Komponenten u_1, u_2, u_3 gesagt werden?

11. Was kann für $0 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Komponenten u_1, u_2, u_3 gesagt werden?

12. Nehmen Sie an, wir ordneten jeder Person einen Zeilenvektor mit den drei Komponenten Alter, Größe und Gewicht zu. Wäre es sinnvoll, die den einzelnen Personen zugeordneten Vektoren zu addieren? Wäre es sinnvoll, einen dieser Vektoren mit einer Konstanten zu multiplizieren?

13. Nehmen Sie an, wir ordneten jeder Person, die einen Supermarkt verläßt, einen Zeilenvektor zu, dessen Komponente die Mengen der von der Person gekauften Waren darstellt. Beantworten Sie dafür die gleichen Fragen wie in Übung 12.

14. Wir wollen jedem Supermarkt einen Spaltenvektor zuordnen, dessen Komponente aus den Preisen der dort vorhandenen Waren bestehen. Wäre es sinnvoll, zwei der Vektoren zu addieren? Wäre es sinnvoll, einen dieser Vektoren mit einer Konstanten zu multiplizieren? Diskutieren Sie die Unterschiede der in den Übungen 12, 13 und 14 gegebenen Situation.

2. Beispiele für die Multiplikation von Vektoren

Der Leser wird sich vielleicht gefragt haben, ob es notwendig ist, sowohl Zeilen- als auch Spaltenvektoren einzuführen, wenn deren Eigenschaften

die gleichen sind. Diese Frage kann auf verschiedene Weisen beantwortet werden. Zunächst gibt es bei vielen Fällen der Anwendung von Vektoren zwei verschiedene Arten von Quantitäten, die gleichzeitig studiert werden sollen, so daß es angebracht erscheint, die eine Art in Form eines Zeilenvektors, die andere Art in Form eines Spaltenvektors darzustellen. Zweitens gibt es einen Weg, Zeilen- und Spaltenvektoren zu kombinieren, der für bestimmte Rechenarten sehr nützlich ist. Um diese beiden Punkte klarer zu machen, wollen wir uns das folgende, einfache Beispiel ansehen.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, ein Mann namens Schmidt gehe in ein Lebensmittelgeschäft, um je ein Dutzend Brezeln und Hörnchen, je ein halbes Dutzend Äpfel und Brötchen und drei Zitronen zu kaufen. Wir wollen seine Käufe mit Hilfe des folgenden Zeilenvektors darstellen:

$$\begin{aligned} x &= [6(\text{Äpfel}),\ 12(\text{Hörnchen}),\ 3(\text{Zitronen}),\ 12(\text{Brezeln}),\ 6(\text{Brötchen})] \\ &= (6,\ 12,\ 3,\ 12,\ 6). \end{aligned}$$

Nehmen Sie an, die Äpfel kosteten 4 Pf pro Stück, die Hörnchen 6 Pf pro Stück, Zitronen 9 Pf pro Stück, Brezeln 5 Pf pro Stück und Brötchen 7 Pf pro Stück. Wir können dann die Preise dieser Güter als Spaltenvektor darstellen.

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Pf pro Apfel} \\ \text{Pf pro Hörnchen} \\ \text{Pf pro Zitrone} \\ \text{Pf pro Brezel} \\ \text{Pf pro Brötchen.} \end{matrix}$$

Wir sind nun offensichtlich daran interessiert zu wissen, welchen Betrag Schmidt insgesamt zu zahlen hat. Wir würden also gern den Mengenvektor x mit dem Preisvektor y „multiplizieren", um den Gesamtbetrag von Schmidts Rechnung zu erhalten. Wir sehen, daß unsere „Multiplikation" folgende Form haben sollte:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (6,\ 12,\ 3,\ 12,\ 6) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot 4 + 12 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 12 \cdot 5 + 6 \cdot 7 \\ &= 24 + 72 + 27 + 60 + 42 \\ &= 225 \text{ Pf oder DM } 2{,}25. \end{aligned}$$

Selbstverständlich ist dies auch die Rechnung, die der Kassierer ausführt, bei dem Schmidt seine Rechnung bezahlt.

Wir werden das oben Gelernte verallgemeinern, um damit zu einer allgemeinen Regel für die Multiplikation von Zeilen mit Spaltenvektoren zu kommen.

Definition. Ist u ein Zeilenvektor und v ein Spaltenvektor mit jeweils der gleichen Komponente n, so erhalten wir das Produkt

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Beachten Sie, daß wir den Zeilenvektor immer zuerst und den Spaltenvektor immer an zweiter Stelle schreiben und daß dies die einzige Art der Vektormultiplikation ist, die wir hier betrachten wollen. Als Beispiele hierfür seien gegeben:

$$(2, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 1.$$

$$(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0.$$

Beachten Sie, daß das Ergebnis einer Vektormultiplikation immer eine Zahl ist und kein Vektor mehr, im Gegensatz zur Summe.

Beispiel 2. Betrachten Sie eine sehr vereinfachte Volkswirtschaft mit drei Industrien, die wir Kohle, Elektrizität und Stahl nennen wollen, und drei Konsumenten 1, 2 und 3. Nehmen Sie an, jeder der Konsumenten verbrauche einen Teil des Ausstoßes jeder der Industrien und jede Industrie verbrauche ebenso einen weiteren Teil des Ausstoßes jeder der anderen Industrien. Wir wollen voraussetzen, daß die verbrauchten Beträge positiv oder 0 sind, da negative Beträge in diesem Fall zunächst wenig sinnvoll erscheinen. Den Bedarf jedes der Konsumenten und jeder der Industrien können wir durch einen Nachfrage-(Zeilen-)vektor mit drei Konsumenten darstellen, bei dem die erste Komponente die Menge der durch den Konsumenten oder die Industrie benötigte Kohle, die zweite Komponente die Menge der benötigten Elektrizität und die dritte Komponente die Menge des benötigten Stahls irgendeiner in Frage kommenden Einheit darstellt. Nachfragevektoren der drei Konsumenten seien z. B.

$$d_1 = (3, 2, 5), \qquad d_2 = (0, 17, 1), \qquad d_3 = (4, 6, 12),$$

die Nachfragevektoren jeder der Industrien seien

$$d_c = (0, 1, 4), \qquad d_E = (20, 0, 8), \qquad d_S = (30, 5, 0),$$

hierbei bedeute der Index c Kohle, der Index E Elektrizität und der Index S Stahl. Die Gesamtnachfrage nach diesen Gütern durch die Konsumenten wird also durch die Summe

$$d_1 + d_2 + d_3 = (3, 2, 5) + (0, 17, 1) + (4, 6, 12) = (7, 25, 18).$$

Entsprechend wird die Gesamtnachfrage der Industrien nach diesen Gütern durch die Summe

$$d_c + d_E + d_S = (0, 1, 4) + (20, 0, 8) + (30, 5, 0) = (50, 6, 12).$$

Die Gesamtnachfrage wird also dargestellt durch die Summe

$$(7, 25, 18) + (50, 6, 12) = (57, 31, 30).$$

Nehmen Sie nun an, der Preis einer Einheit Kohle sei 1 DM, eine Einheit der Elektrizität 2 DM und eine Einheit Stahl 4 DM. Diese Preise können dann durch den Spaltenvektor

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

Betrachten Sie nun die Stahlindustrie: Sie verkauft insgesamt 30 Einheiten Stahl zu einem Preis von 4 DM pro Einheit, so daß ihr Gesamteinkommen 120 DM ist. Für die

von ihr bezogenen Güter muß sie den durch das folgende Vektorprodukt dargestellten Preis zahlen:

$$ds \cdot p = (30, 5, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 30 + 10 + 0 = \text{DM } 40.$$

Der Profit der Stahlindustrie ist daher 120 DM — 40 DM = 80 DM. In den folgenden Übungen werden wir die Gewinne der anderen Industrien errechnen.

Das gerade besprochene Modell einer Volkswirtschaft ist in zwei Richtungen unrealistisch: Erstens haben wir keine realistischen Größen für die verschiedenen Mengen gewählt, und zweitens haben wir die Tatsache unberücksichtigt gelassen, daß eine Industrie desto mehr verbraucht, je mehr sie produziert. Der zweite Wesenszug wird in Kapitel 8 näher betrachtet werden.

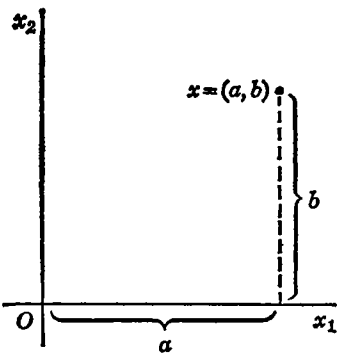


Abb. 1

Beispiel 3. Betrachten Sie das in Abb. 1 gezeigte rechtwinklige Koordinatensystem. Wir können einen Zeilenvektor mit zwei Komponenten $x = (a,b)$ als einen Punkt innerhalb dieses Systems betrachten, der mit Hilfe seiner Koordinaten festgelegt worden ist. Wir erreichen den Punkt x, indem wir uns vom Nullpunkt aus zunächst die Entfernung a entlang der x_1-Achse und dann die Entfernung b auf einer zur x_2-Achse parallel verlaufenden Linie entlang bewegen. Sind zwei solcher Punkte, sagen wir $x = (a,b)$ und $y = (c,d)$ gegeben, so haben die Punkte x und y, $-x$, $-y$, $x-y$, $y-x$, $-x-y$ die in Abb. 2 dargestellte geometrische Lage.

Die Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer festen Zahl kann auch geometrisch interpretiert

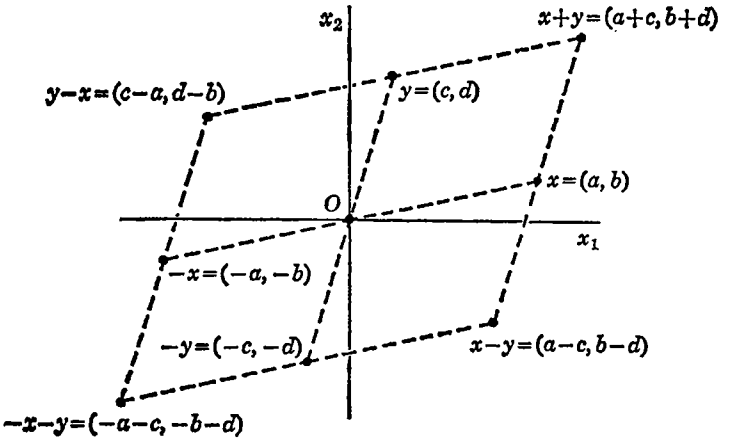


Abb. 2

werden (siehe Abb. 3). Wir haben dort die dem Vektor $x = (1,2)$ sowie $2x$, $1/2x$, $-x$ und $-2x$ entsprechenden Punkte eingezeichnet. Beachten Sie, daß alle diese Punkte auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen. Eine andere Vektorenmenge, die geometrische Bedeutung hat, ist der Vektor $z = ax + (1 - a)y$, wobei a irgendeine Zahl zwischen 0 und 1 ist.

Beachten Sie, daß alle Punkte z in Abb. 4 auf der Verbindungslinie von x und y liegen. Ist $a = 1/2$, so ist der entsprechende Punkt der Mittelpunkt dieser Strecke. Ist also $x = (a,b)$ und $y = (c,d)$, so ist der Punkt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y &= \tfrac{1}{2}(a, b) + \tfrac{1}{2}(c, d) \\ &= \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) \end{aligned}$$

der Mittelpunkt der Strecke x und y.

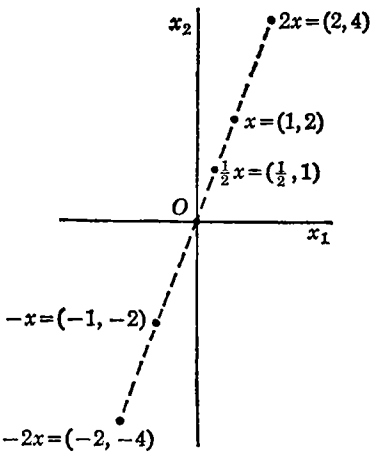


Abb. 3

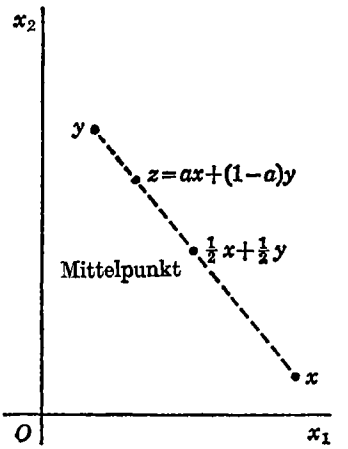


Abb. 4

ÜBUNGEN

1. Errechnen Sie die Werte der folgenden Vektoren:

$$u = (1, -1, 4), \qquad x = (0, 1, 2)$$

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) $u \cdot v + x \cdot y = ?$ [Lös.: 12.]

(b) $(-u + 5x) \cdot (3v - 2y) = ?$

(c) $5u \cdot v + 10[x \cdot (2v - y)] = ?$ [Lös.: 55.]

(d) $2[(u - x) \cdot (v + y)] = ?$

2. Errechnen Sie die durch folgende Vektoren bestimmten Punkte und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem ein. $x = (3,4)$ und $y = (-2,7)$.

(a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. (c) $x - 2y$. (e) $3x - 2y$.

(b) $x + y$. (d) $\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}y$. (f) $4y - 3x$.

3. Wenn $x = (1,-1,2)$ und $y = (0,1,3)$ die Koordinaten eines Punktes im Raum sind, welche Koordinaten hat dann der Mittelpunkt der Verbindung $x—y$?
[Lös.: 1/2, 0, 5/2.]

4. Beweisen Sie, daß $a(uv) = (au)v = u(av)$, wenn u ein Zeilenvektor mit drei Komponenten, v ein Spaltenvektor mit drei Komponenten und a eine feste Zahl ist.

5. Nehmen Sie an, Müller, Meier und Schulze gingen in ein Lebensmittelgeschäft und kauften die folgenden Waren:
Schulze: 2 Äpfel, 6 Zitronen und 5 Brötchen.
Meier: 2 Dutzend Hörnchen, 2 Zitronen und 2 Dutzend Brezeln.
Müller: 10 Äpfel, 1 Dutzend Hörnchen, 2 Dutzend Brezeln und 1/2 Dutzend Brötchen.
   a) Wieviel verschiedene Artikel kauften sie? [Lös.: 5.]
   b) Fassen Sie deren Käufe jeweils in Zeilenvektoren zusammen.
   c) Errechnen Sie unter Zugrundelegung des in Beispiel 1 gegebenen Preisvektors den von jedem Mann zu zahlenden Betrag.
[Lös.: 0,87 DM, 2,82 DM, 2,74 DM.]
   d) Bestimmen Sie durch eine Vektoraddition die Gesamtmenge ihrer Einkäufe in Form eines Zeilenvektors.
   e) Errechnen Sie auf zwei verschiedenen Wegen den Gesamtbetrag der von den obengenannten Personen ausgegeben wurde. [Lös.: 6,53 DM.]

6. Beweisen Sie, daß die Vektorenmultiplikation den folgenden zwei Bedingungen genügt:

$$\text{(i)} \quad u \cdot (av) = a(u \cdot v)$$
$$\text{(ii)} \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w,$$

wobei u einen Zeilenvektor mit drei Komponenten und v und w Spaltenvektoren mit je drei Komponenten darstellen. a sei eine feste Zahl.

7. Die Herstellung eines Buches umfaßt die folgenden Stufen: Zunächst muß es gesetzt werden, dann gedruckt und schließlich gebunden und mit einem Umschlag versehen werden. Nehmen Sie an, das Setzen koste 6 DM die Stunde, das Papier für eine Seite koste 1/4 Pf und der Drucker berechne 11 Pf für jede Laufminute der Druckmaschine. Der Umschlag koste 28 Pf und das Einbinden eines Buches 15 Pf. Nehmen Sie an, ein Verlag beabsichtige, ein Buch herauszugeben, dessen Satz 300 Stunden in Anspruch nehme, das 220 Seiten habe und 5 Minuten pro Buch die Druckerpresse in Anspruch nehme.
   a) Formulieren Sie einen Zeilenvektor mit fünf Komponenten, der die Anforderungen des ersten Buches enthält. Formulieren Sie weitere Zeilenvektoren, die die Erfordernisse für das zweite, dritte ... Buch enthalten. Stellen Sie einen Spaltenvektor mit fünf Komponenten auf, die aus den Preisen für die verschiedenen für die Herstellung des Buches notwendigen Arbeiten bestehen.
   b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Vektormultiplikation die Kosten für die Erstellung eines Buches. [Lös.: 1801,53.]
   c) Ermitteln Sie mit Hilfe der Vektoraddition und -multiplikation die Kosten für das Auflegen von 5000 Exemplaren. [Lös.: 9450 DM.]
   d) Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, daß die Druckstöcke der ersten Auflage wieder verwendet werden können, die Kosten einer zweiten Auflage von 5000 Exemplaren. [Lös.: 7650 DM.]

8. Führen Sie für das Beispiel 2 die folgenden Rechnungen durch:
   a) Errechnen Sie den Betrag, den jede Industrie und jeder Konsument für die von ihm empfangenen Waren zu zahlen hat.
   b) Errechnen Sie den von jeder Industrie gemachten Gewinn.

c) Errechnen Sie den Gesamtbetrag, der von allen Industrien und Konsumenten gezahlt wird.
d) Ermitteln Sie den Anteil des Gesamtbetrages, der in c) durch die Industrien gezahlt wird. Ermitteln Sie ebenfalls den von den Konsumenten gezahlten Betrag.

9. Ein Bauunternehmer erhalte Aufträge für fünf Häuser des Types A, sieben Häuser des Types B und zwölf Häuser des Types C. Stellen Sie einen Zeilenvektor x auf, dessen Komponenten durch die Anzahl der von jedem Typ zu bauenden Häuser gebildet werden. Nehmen Sie an, daß der Bauunternehmer wisse, daß ein Haus des Types A 20 Einheiten Holz, ein Haus des Types B 18 Einheiten und ein Haus des Types C 25 Einheiten benötige. Stellen Sie nun einen Spaltenvektor u auf, dessen Komponenten die verschiedenen Holzmengen, die für jeden Haustyp benötigt werden, darstellen. Ermitteln Sie die Gesamtholzmenge, indem Sie das Vektorprodukt xu errechnen. [Lös.: 526.]

10. Es sei $x = (x_1\, x_2)$,
$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie x_1 und x_2, wenn $x \cdot a = -1$ und $x \cdot b = 7$ ist.
[Lös.: $x_1 = -31$; $x_2 = 23$.]

11. Es sei $x = (x_1\, x_2)$
$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie x_1 und x_2, wenn $x \times a = x_1$ und $x \times b = x_2$.

3. Matrizen und ihre Verbindung mit Vektoren

Unter einer Matrix verstehen wir eine Anzahl von Werten, die in folgender Weise angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Buchstaben a_{ij} sind dabei jeweils reelle Zahlen; m und n sind ganze Zahlen. Beachten Sie, daß m die Zahl der Zeilen und n die Zahl der Spalten der Matrix ist. Wir nennen aus diesem Grunde eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten eine $m \cdot n$ Matrix. Ist $m = n$, so haben wir eine quadratische Matrix vor uns. Als Beispiele für Matrizen können gelten:

$$(1, 2, 3), \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 & 10 \\ 3 & -1 & 14 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das erste Beispiel stellt einen Zeilenvektor dar, der als eine $1 \cdot 3$ Matrix angesehen werden kann. Das zweite ist ein Spaltenvektor, der entsprechend als eine $3 \cdot 1$ Matrix angesehen werden kann. Das dritte Beispiel stellt dann eine quadratische $2 \cdot 2$ Matrix, das vierte eine $4 \cdot 4$ Matrix und das letzte eine $3 \cdot 5$ Matrix dar.

Zwei Matrizen der gleichen Form (d. h. mit der gleichen Anzahl von Zeilen und Spalten) werden dann und nur dann als *gleich* bezeichnet, wenn die entsprechenden Komponenten gleich sind.

Bitte rufen Sie sich ins Gedächtnis zurück, daß wir in Kapitel 4, Abschnitt 12, bei der Betrachtung eines Markovschen Kettenprozesses ganz natürlich auf eine Matrix stießen. Am folgenden Beispiel wollen wir zeigen, wie Matrizen in der Praxis auftauchen und wie sie in Verbindung mit Vektoren benutzt werden können.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, ein Bauunternehmer habe Aufträge über fünf Häuser des Types A, sieben Häuser des Types B und zwölf Häuser des Types C erhalten. Wir können dies mit Hilfe des Zeilenvektors $x = (5,7,12)$ darstellen. Selbstverständlich weiß der Bauunternehmer, welche Rohmaterialien für jeden Haustyp gebraucht werden. Lassen Sie uns annehmen, daß diese Rohmaterialien Stahl, Holz, Glas, Farbe und Arbeit seien. Die Zahlen der folgenden Matrix stellen in einer jeweils passenden Einheit die Mengen dar, die von den einzelnen Rohmaterialien für die verschiedenen Haustypen benutzt werden. (Die Zahlen sind dabei willkürlich gewählt, und sie sollen keine realistische Aussage machen.)

$$\begin{array}{l} \\ \text{Typ } A \\ \text{Typ } B \\ \text{Typ } C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Farbe} & \text{Arbeit} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \end{array} = R.$$

Beachten Sie, daß jede Zeile der Matrix aus einem Zeilenvektor mit 5 Komponenten besteht, der die Mengen jedes Rohmaterials angibt, die für einen bestimmten Haustyp gebraucht werden. Entsprechend kann jede Spalte der Matrix als ein Spaltenvektor mit 3 Komponenten angesehen werden, der die Mengen eines gegebenen Rohmaterials angibt, die für jeden Haustyp benötigt werden. Man sieht klar, daß sich die Information durch eine Matrix auf kürzeste Weise darstellen lassen.

Der Bauunternehmer wolle nun wissen, wieviel von jedem Rohmaterial er braucht, um seine Aufträge auszuführen. Wir wollen die obige Matrix mit R bezeichnen. Er wird also nach dem Produkt $x \cdot R$ suchen. Auf Grund dieses Produktes würde er dann seine Bestellungen vergeben. Das genannte Produkt sähe nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned} xR &= (5, 7, 12)\begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \\ &= (5 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 12 \cdot 6, 5 \cdot 20 + 7 \cdot 18 + 12 \cdot 25, \\ &\quad 5 \cdot 16 + 7 \cdot 12 + 12 \cdot 8, 5 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + 12 \cdot 5, \\ &\quad 5 \cdot 17 + 7 \cdot 21 + 12 \cdot 13) \\ &= (146, 526, 260, 158, 388). \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß der Bauunternehmer 146 Einheiten Stahl, 526 Einheiten Holz, 260 Einheiten Glas, 158 Farbe und 388 Einheiten Arbeit bestellen sollte. Bitte beachten Sie wiederum, daß wir die Antwort in Form eines Zeilenvektors mit 5 Komponenten erhalten und daß jede der Komponenten das Vektorprodukt aus x mal der entsprechenden Spalte der Matrix R darstellt.

Der Bauunternehmer ist natürlich auch an den Preisen interessiert, die er für diese Materialien zu bezahlen hat. Nehmen Sie an, Stahl koste 15 DM pro Einheit, Holz 8 DM pro Einheit, Glas 5 DM pro Einheit, Farbe 1 DM pro Einheit und Arbeit 10 DM pro Einheit. Wir können dann die Kosten in Form des folgenden Spaltenvektors schreiben:

$$y = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Die Kosten für jeden Haustyp werden dann durch das Produkt dargestellt, so daß wir folgende Multiplikation erhalten:

$$\begin{aligned} Ry &= \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 15 + 20 \cdot 8 + 16 \cdot 5 + 7 \cdot 1 + 17 \cdot 10 \\ 7 \cdot 15 + 18 \cdot 8 + 12 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 21 \cdot 10 \\ 6 \cdot 15 + 25 \cdot 8 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 13 \cdot 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

So betragen also die Materialkosten für den Haustyp A 492 DM, für den Typ B 528 DM und für den Typ C 465 DM.

Als letztes mag den Bauunternehmer der Gesamtkostenanfall für alle zu bauenden Häuser interessieren. Es ist leicht zu sehen, daß dieser durch den Vektor xRy dargestellt wird. Diesen Wert können wir auf die folgenden zwei Weisen errechnen:

$$xRy = (xR)y = (146, 526, 260, 158, 388) \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 11{,}736$$

$$xRy = x(Ry) = (5, 7, 12) \cdot \begin{pmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{pmatrix} = 11{,}736.$$

Die Gesamtkosten betragen also 11736 DM.

Im allgemeinen wollen wir uns an die folgenden Regeln für die Multiplikation einer Matrix mit einem Zeilen- oder Spaltenvektor halten:

Definition. A sei eine $m \times n$ Matrix. x sei ein Zeilenvektor mit m Komponenten und u ein Spaltenvektor mit n Komponenten. Wir definieren dann die Produkte xA und Au wie folgt:

$$xA = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1a_{11} + x_2a_{21} + \ldots + x_ma_{m1},\ x_1a_{12} + x_2a_{22} + \ldots + x_ma_{m2},\ \ldots,\ x_1a_{1n} + x_2a_{2n} + \ldots + x_ma_{mn})$$

$$Au = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \ldots \quad\quad \cdot \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \end{pmatrix}.$$

Der Leser wird finden, daß es recht einfach ist, mit diesen Formeln zu arbeiten, wenn er beachtet, daß jeder Wert der Produkte $x \cdot A$ oder $A \cdot u$ durch die Vektormultiplikation von x oder u mit einem Zeilen- oder Spaltenvektor der Matrix A entsteht. Bitte vergessen Sie nicht, daß es für die Multiplikation eines Zeilenvektors einer Matrix Voraussetzung ist, daß die Anzahl der Zeilen der Matrix gleich der Anzahl der Komponenten des Vektors ist und daß das Resultat wiederum ein Zeilenvektor ist. Entsprechend ist es für die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor Voraussetzung, daß die Anzahl der Spalten der Matrix gleich ist der Anzahl der Komponenten des Vektors. Das Ergebnis einer solchen Multiplikation ist dann wiederum ein Spaltenvektor.

Es seien noch einige numerische Beispiele für die Multiplikation von Vektoren mit Matrizen gegeben:

$$(1, 0, -1)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2,\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 8)$$

$$= (1, -7);$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 + 4 \\ 2 - 3 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Auch hier sehen Sie wieder, daß $x \cdot A$ ein Zeilenvektor mit n Komponenten ist, wenn x ein Zeilenvektor mit n Komponenten und A eine $m \times n$ Matrix

ist. Entsprechend bildet Au einen Spaltenvektor mit m Komponenten, wenn u ein Spaltenvektor mit n Komponenten und A eine $m \times n$ Matrix ist.

Beispiel 2. Nehmen Sie in Beispiel 1 des Abschnittes 2 an, daß Schmidt seine Einkäufe in zwei verschiedenen Läden durchführen würde, deren Preise leicht voneinander abweichen. Der Preisvektor für den zweiten Laden sei

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Pfennig pro Apfel} \\ \text{Pfennig pro Hörnchen} \\ \text{Pfennig pro Zitrone} \\ \text{Pfennig pro Brezel} \\ \text{Pfennig pro Brötchen.} \end{matrix}$$

Schmidt hat nun die Wahl, entweder alle seine Einkäufe im Geschäft 1, alle seine Einkäufe in Geschäft 2 oder die jeweils preisgünstigeren in einem der Geschäfte zu tätigen. Um ihm bei dieser Entscheidung zu helfen, bilden wir die folgende Preismatrix:

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Preis} & \text{Preis} & \text{Minimal-} \\ \text{Geschäft 1} & \text{Geschäft 2} & \text{Preis} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \\ 9 & 10 & 9 \\ 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Die erste Spalte zeigt die Preise des ersten Geschäfts, die zweite Spalte die des zweiten Geschäfts, und die dritte Spalte enthält den niedrigeren dieser beiden Preise. Um den von Schmidt alternativ auszugebenden Betrag zu errechnen, ermitteln wir das Produkt $x \cdot P$ wie folgt:

$$xP = (6, 12, 3, 12, 6) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \\ 9 & 10 & 9 \\ 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} = (225, 204, 195).$$

Wir sehen daraus, daß der von Schmidt zu zahlende Betrag 2,25 DM sein wird, wenn er nur im Geschäft 1 kauft, 2,04 DM, wenn er nur in Geschäft 2 kauft, und 1,95 DM, wenn er die einzelnen Artikel dort kauft, wo sie billiger sind.
Wie Schmidt nun wirklich handelt oder handeln sollte, hängt von den näheren Umständen ab. Wenn beide Geschäfte in seiner Nähe liegen, so wird er vielleicht seine Einkäufe aufteilen und dort kaufen, wo der jeweilige Artikel billiger ist. Ist das Geschäft 1 in seiner Nähe, Geschäft 2 jedoch weit entfernt, so mag er alles in Geschäft 1 kaufen. Ist jedoch Geschäft 2 näher als Geschäft 1, so daß sich das Aufteilen der Einkäufe, um 9 Pf zu sparen, nicht lohnt, so mag er in Geschäft 2 kaufen.

Das soeben von uns angeführte Beispiel ist ein Fall eines *Entscheidungsproblemes*. Hier besteht das Problem darin, eine von verschiedenen möglichen Handlungsweisen oder *Strategien* auszuwählen. Man kann für jede dieser Strategien die anfallenden Kosten oder ihren *Wert* errechnen. Der Entscheidungsfällende wird dann die Strategie mit dem optimalen Wert auswählen.

Manchmal kann das Ergebnis nur in psychologischen Einheiten gemessen werden, und wir sprechen dann davon, daß wir die *Wertschätzung* eines Ergebnisses messen. Wir wollen für den Zweck dieses Buches annehmen, daß die Wertschätzung eines Ergebnisses immer in Geldeinheiten ausgedrückt werden könne, so daß wir den Wert zweier verschiedener Ergebnisse vergleichen können. Viele Anwendungen der Mathematik auf dem Gebiet des Geschäftslebens bestehen aus der Formulierung solcher Entscheidungsprobleme und aus der dafür optimal erscheinenden Strategie. Wir werden solche Entscheidungsprobleme im nächsten Beispiel, in Abschnitt 13 dieses Kapitels und in den letzten drei Kapiteln dieses Buches, mehr ins einzelne gehend besprechen.

Beispiel 3. Betrachten Sie das folgende Problem als ein zweites Beispiel eines Entscheidungsproblemes. Eine Urne enthalte fünf rote, drei grüne und eine weiße Kugel. Es werde der Urne eine Kugel entnommen, und je nach Farbe der entnommenen Kugel werden den Besitzern von Lotterielosen entsprechend der folgenden Aufstellung Zahlungen geleistet:

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Rot} & \text{Grün} & \text{Weiß} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{Los 1} \\ \text{Los 2} \\ \text{Los 3.} \end{matrix}$$

Wird also eine rote Kugel gezogen, erhalten die Besitzer des Loses 1 1 DM, die Besitzer des Loses 2 3 DM, und die Besitzer des Loses 3 bekommen nichts. Ist die gewählte Kugel grün, so sind die Zahlungen 4, 1 bzw. 0 DM. Bei einer weißen Kugel erhalten die Besitzer des Loses 3 16 DM und alle anderen nichts. Der Besitz welchen Loses ist am günstigsten?

Für unsere Entscheidung wollen wir das Konzept des erwarteten Wertes, wie wir im vorangehenden Kapitel diskutierten, verwenden. Die Aussagen „Es wird eine rote Kugel gezogen", „Es wird eine grüne Kugel gezogen", bzw. „Es wird eine weiße Kugel gezogen" haben die Wahrscheinlichkeiten von 5/9, 3/9 und 1/9. Auf Grund dieser Wahrscheinlichkeiten können wir den erwarteten Wert des Besitzes der Lotterielose wie in dem letzten Kapitel beschrieben errechnen. Ein wesentlich kürzerer Weg, diese Rechnungen durchzuführen, ist jedoch, das Produkt $M \cdot p$ zu errechnen, wobei p der Wahrscheinlichkeitsvektor

$$p = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{3}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

ist.

Wir erhalten also:

$$Mp = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{3}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{5}{9} + 4 \cdot \frac{3}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} \\ 3 \cdot \frac{5}{9} + 1 \cdot \frac{3}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} \\ 0 \cdot \frac{5}{9} + 0 \cdot \frac{3}{9} + 16 \cdot \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{9} \\ \frac{18}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht zu erkennen, daß die drei Komponenten von $M \cdot p$ die erwarteten Werte des Besitzes der Lotterielose 1, 2 bzw. 3 darstellen. Gemäß diesen Werten ist Los 2 das beste, 1 das nächstbeste und Los 3 das drittbeste.
Der Preis der einzelnen Lose wird darüber bestimmen, welches wir kaufen sollten. Kostete z. B. jedes Los 3 DM, so stünden wir uns besser, wenn wir keins von den dreien kauften, da wir sonst erwarten müßten, Geld zu verlieren. Kostet ein Los 1 DM, so sollten wir Los 2 kaufen, da wir dadurch einen erwarteten Gewinn von 2 DM — 1 DM = 1 DM hätten. Kosten die ersten zwei Lose 2,10 DM und das dritte 1,50 DM, so sollten wir das dritte Los kaufen, da es in diesem Fall das einzige ist, bei dem wir einen positiven Nettogewinn erwarten können.

ÜBUNGEN

1. Führen Sie die folgenden Multiplikationen aus:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$

(b) $(3, -4) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = ?$ [Lös.: $(11, -11)$.]

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \\ -8 & 14 & -5 \\ 9 & 2 & 7 \\ 10 & -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$

(d) $(2, 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = ?$ [Lös.: $(0, 0)$.]

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = ?$

(f) $(0, 2, -3) \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 & 10 \\ 3 & -1 & 14 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = ?$

(g) $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ?$ [Lös.: $(ax_1 + cx_2, bx_1 + dx_2)$.]

(h) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = ?$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = ?$

(j) $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$

2. Welchen Zahlen ähneln die Matrizen von (i) und (j)?
3. Beachten Sie, daß in Übung 1 d das Produkt eines Zeilenvektors, dessen Komponenten alle von 0 verschieden sind, mit einer Matrix, deren Komponenten ebenfalls von 0 verschieden sind, einen Null-Zeilenvektor ergibt. Nennen Sie ein anderes Beispiel, das dem obigen ähnelt. Beantworten Sie die entsprechende Frage für Übung 1 c.

4. Lösen Sie, wenn möglich, die folgenden Aufgaben:

   (a) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = (7, 0)$. Errechnen Sie den Vektor x. [Lös.: (3, 1).]

   (b) $(2, -1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (6, 3)$. Errechnen Sie die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Gibt es in diesem Fall mehr als eine Lösung?

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Errechnen Sie Vektor u.

   (d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$. Errechnen Sie u. Wieviele Lösungen gibt es? $\left[\text{Lös.: } \begin{pmatrix} 4k-3 \\ k \end{pmatrix} \text{ für jeden Wert von } k.\right]$

5. Lösen Sie die folgenden Aufgaben, und interpretieren Sie deren Ergebnisse.

   (a) $(1, -1)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = a(1, -1)$. Errechnen Sie a. [Lös.: $a = 2$.]

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Errechnen Sie u. Wieviele Lösungen gibt es? $\left[\text{Lös.: } u = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \text{ für jeden Wert von } k.\right]$

   (c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Errechnen Sie u. Wieviele Lösungen gibt es?

6. Stellen Sie für Übung 5 des vorhergehenden Abschnittes die 3×5 Matrix auf, deren Zeilen die verschiedenen Einkäufe von Müller, Meier und Schulze darstellen. Multiplizieren Sie diese Matrix mit dem aus 5 Komponenten bestehenden Preis-(Spalten-)vektor, um den Spaltenvektor mit 3 Komponenten zu erhalten, der die von den jeweiligen Personen zu zahlenden Gesamtbeträge zeigt. Multiplizieren Sie diese Matrix ferner mit dem Zeilenvektor $x = (1,1,1)$ und dem Preisvektor, um den Gesamtbetrag zu ermitteln, den sie im Lebensmittelgeschäft ausgaben.

7. Nehmen Sie in Beispiel 1 dieses Abschnittes an, daß der Bauunternehmer sieben Häuser des Types A, drei des Types B und fünf des Types C bauen wolle. Errechnen Sie wiederum auf den zwei im Beispiel gezeigten Wegen der Matrixmultiplikation die Gesamtkosten des Rohmaterials.

8. Die folgende Matrix zeigt die Vitamingehalte dreier verschiedener Lebensmittel in bestimmten Einheiten:

$$\begin{array}{l} \text{Vitamin:} \quad \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \quad \text{D} \\ \begin{array}{ll} \text{Lebensmittel} & \text{I:} \\ \text{Lebensmittel} & \text{II:} \\ \text{Lebensmittel} & \text{III:} \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}. \end{array}$$

   Wieviel jedes Vitamintypes führen wir dem Körper zu, wenn wir 5 Einheiten des Lebensmittel I, 10 Einheiten des Lebensmittel II und 8 Einheiten des Lebensmittel III essen? Wenn wir bei den Lebensmitteln lediglich den Vitamingehalt zahlen und eine Einheit der vier Vitamine 10 Pf, 20 Pf, 25 Pf bzw. 50 Pf kostet,

wieviel kostet dann eine Einheit jedes der drei Lebensmitteltypen? Errechnen Sie auf zwei verschiedene Weisen die Gesamtkosten der gegessenen Lebensmittel.

[Lös.: (6,3, 3,3, 3,6, 5,0); $\begin{pmatrix}15\\13\\33\end{pmatrix}$ DM 4,69.]

9. Um wieviel hätte in Beispiel 2 das Geschäft 1 den Apfelpreis zu senken, um für Schmidt die Einkäufe in Geschäft 1 billiger als in Geschäft 2 werden zu lassen?

10. Ermitteln Sie für Beispiel 2 den Laden, in dem Schmidt die folgenden Mengen am billigsten kaufen kann:
    (a) $x = (4, 1, 2, 0, 1)$.
    (b) $x = (2, 1, 3, 1, 0)$.
    (c) $x = (2, 1, 1, 2, 0)$.

11. Lassen Sie uns in Beispiel 3 annehmen, daß eine Person das Los 1 mit der Wahrscheinlichkeit r_1, das Los 2 mit der Wahrscheinlichkeit r_2 und das Los 3 mit der Wahrscheinlichkeit r_3 wählt. Es sei $r = (r_1, r_2, r_3)$. Interpretieren Sie rMp. Errechnen Sie dies für den Fall, daß $r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$.

12. Eine Gesellschaft stehe vor der Frage, welche von drei Produktionsmethoden sie für die Herstellung der drei Artikel A, B und C verwenden solle. Die Mengen der von den einzelnen Gütern durch die verschiedenen Produktionsmethoden herzustellenden Einheiten zeigt die folgende Matrix:

$$R = \begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Methode 1} \\ \text{Methode 2} \\ \text{Methode 3.} \end{array}$$

Es sei p der Vektor, dessen Komponenten den Gewinn pro Einheit jedes der hergestellten Güter darstellt. Welchen Sinn hat dann der Vektor $R \cdot p$? Formulieren Sie drei verschiedene Vektoren p, so daß bei jedem dieser Gewinnvektoren eine andere Produktionsmethode als die gewinnbringenste erscheint.

4. Die Multiplikation und Addition von Matrizen

Zwei Matrizen der gleichen Form, d. h. mit der gleichen Anzahl von Reihen und Spalten, können durch die Addition ihrer entsprechenden Komponenten addiert werden. Sind z. B. A und B zwei 2×3 Matrizen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sie sehen, daß die Addition von (Reihen- oder Spalten)-Vektoren lediglich ein Spezialfall der Addition von Matrizen ist. Hier noch einige numerische Beispiele der Matrizenaddition:

$$(1, 0, -2) + (0, 5, 0) = (1, 5, -2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \\ 4 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Andere Beispiele dafür finden Sie in einigen der Übungen. Der Leser sollte beachten, daß wir *keine* Matrizen verschiedener Formen addieren. Ist A eine Matrix und k eine feste Zahl, so definieren wir die Matrix kA als

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sie sehen auch hier, daß dies lediglich eine komponentenweise Multiplikation ist, wie wir sie analog dazu bei Vektoren durchführten. Wir geben Ihnen auch hier einige numerische Beispiele für die Multiplikation von Matrizen mit Zahlen:

$$-2 \begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 4 & -16 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 18 & -24 \end{pmatrix}.$$

Natürlich ist die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl ein Spezialfall der Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl.

Unter bestimmten Bedingungen können zwei Matrizen miteinander multipliziert werden, um eine dritte Matrix zu erhalten. So sei z. B. A eine 2×3 und B eine 3×2 Matrix. Wir erhalten dann das Produkt AB als

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{22} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, daß dieses Produkt aus einer 2×2 Matrix besteht. Jeder Wert der neuen Matrix ist das Produkt einer Zeile von A mit einer Spalte von B. So stellt z. B. der Wert der zweiten Zeile und ersten Spalte das Produkt

$$(a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

dar.

Für den allgemeinen Fall der Matrizenmultiplikation gilt:

Definition. Ist A eine $m \times k$ Matrix und B eine $k \times m$ Matrix, so ist das Produkt $C = A \cdot B$ eine $m \times n$ Matrix mit den Komponenten

$$c_{ij} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ik}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$
$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Die wichtigen im Gedächtnis zu behaltenden Punkte dieser Definition sind dabei: Erstens, um eine Matrix A mit einer Matrix B multiplizieren zu können, muß die Zahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B sein. Zweitens, die Produktmatrix $C = A \cdot B$ hat die gleiche Zeilenzahl wie A und die gleiche Spaltenzahl wie B. Schließlich, um den Wert der i-ten Zeile und j-ten Spalte von AB zu erhalten, multiplizieren wir die i-te Zeile von A mit der j-ten Spalte von B. Das Produkt eines Vektors mit einer Matrix ist wiederum ein Spezialfall der Matrixmultiplikation.

Zur Verdeutlichung geben wir noch einmal einige Beispiele für Matrixmultiplikationen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es entsteht nun die naheliegende Frage nach der Multiplikation von mehr als zwei Matrizen miteinander. Ist A eine $m \times h$ Matrix, B eine $a \times k$-Matrix und C eine $k \times n$ Matrix, so können wir sicherlich die Produkte $(AB)C$ und $A(BC)$ errechnen. Es stellt sich nun heraus, daß diese zwei Produkte gleich sind, und wir definieren das Produkt ABC als ihren gemeinsamen Wert, d. h.

$$ABC = A(BC) = (AB)C.$$

Die durch die obige Gleichung ausgedrückte Regel wird gemeinhin als das *assoziative Gesetz* der Multiplikation bezeichnet. Obwohl wir hier dies assoziative Gesetz nicht beweisen wollen, werden wir den Leser bitten, ein Beispiel davon in Übung 5 zu überprüfen.

Sind A und B quadratische Matrizen mit der gleichen Größe, dann können sie in beliebiger Reihenfolge miteinander multipliziert werden. Das be-

deutet jedoch nicht, daß das Produkt $A \cdot B$ notwendigerweise gleich dem Produkt $B \cdot A$ ist! Ist z. B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so erhalten wir

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und für

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus klar ersichtlich ist, daß $AB \neq BA$.

ÜBUNGEN

1. Führen Sie die folgenden Rechenoperationen durch:

(a) $2\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = ?$ $\left[\text{Lös.: } \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -9 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}.\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = ?$

(c) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = ?$

(d) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = ?$ $\left[\text{Lös.: } \begin{pmatrix} 29 & 13 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}.\right]$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = ?$

(f) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = ?$ $\left[\text{Lös.: } \begin{pmatrix} 11 & 2 & 12 \\ -1 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix}.\right]$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ -4 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 9 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = ?$

2. A sei eine beliebige 3×3 Matrix und I die Matrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $AI = IA = A$. Die Matrix I spielt beim Produkt von Matrizen die gleiche Rolle wie die Zahl 1 bei Produkten von Zahlen. Aus diesem Grund wird sie auch die Eins- oder Identitätsmatrix genannt.

3. A sei eine beliebige 3×3 Matrix und 0 die Matrix

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $A0 = 0A = 0$ für jedes A ist. Zeigen Sie ferner, daß $A + 0 = 0 + A = A$ für jedes A ist. Die Nullmatrix spielt bei der Multiplikation der Matrizen die gleiche Rolle wie die Zahl 0 bei der Multiplikation von Zahlen. Aus diesem Grunde wird sie auch die Nullmatrix genannt.

4. Zeigen Sie, daß $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir sehen, daß das Produkt zweier Matrizen auch dann eine Nullmatrix ergeben kann, wenn keine der Matrizen selbst gleich 0 ist. Geben Sie ein anderes Beispiel, das diesen Punkt illustriert.

5. Zeigen Sie die Wirkung des assoziativen Gesetzes an dem folgenden speziellen Fall:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 17 & 57 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie haben die Form einer 2×3, 4×3, 3×3 bzw. 3×2 Matrix. Welche Form hat das Produkt

(a) AC (b) DA (c) AD (d) BC
(e) CB (f) DAC (g) $BCDA$ [Lös.: 4×3.]

7. Errechnen Sie für Übung 6:
   a) die Komponente der zweiten Zeile und zweiten Spalte von $A \cdot C$. [Lös.: 40.]
   b) die Komponente der vierten Zeile und ersten Spalte von $B \cdot C$.
   c) die Komponente der letzten Zeile und letzten Spalte von $B \cdot A$. [Lös.: 58.]
   d) die Komponente der ersten Zeile und ersten Spalte von $C \cdot B$.

8. Wenn A eine quadratische Matrix ist, so kann sie mit sich selbst multipliziert werden. Wir können also (unter Benutzung des assoziativen Gesetzes) definieren:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ A^3 &= A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A \\ &\cdots \\ A^n &= A^{n-1} \cdot A = A \cdot A \cdot \ldots A \ (n \text{ Faktoren}). \end{aligned}$$

Wir nennen die obigen Ausdrücke die „Potenzen" einer Matrix. Errechnen Sie die Potenzen für die folgenden Matrizen:

a) für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, errechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

$$\left[\text{Lös.: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 63 & 64 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 255 & 256 \end{pmatrix}.\right]$$

b) Ermitteln Sie I^2, I_3, I_n, 0^2, 0^3 und 0^n für die in den Übungen 2 und 3 definierten I und 0.

c) Bestimmen Sie A^2, A^3 und A^n für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Bestimmen Sie A^n für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Bestimmen Sie die dritte Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Matrix $P^{(3)}$ des Beispieles 1 im Kapitel 4, Abschnitt 12, und kommentieren Sie das Ergebnis.

10. Betrachten Sie einen zweistufigen Markovschen Prozeß mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

a) Nehmen Sie an, der Prozeß beginne im Zustand 1. Zeichnen Sie das Baumdiagramm und ermitteln Sie die Baummaßzahlen für drei Stufen des Prozesses. Wiederholen Sie das gleiche unter der Annahme, daß der Prozeß im Zustand 2 beginne.

b) Errechnen Sie unter Benutzung des in a) gezeigten Baumes die Größen $P_{11}^{(3)}$, $P_{12}^{(3)}$, $P_{21}^{(3)}$, $P_{22}^{(3)}$. Stellen Sie die Matrix P^3 auf.

c) Errechnen Sie die dritte Potenz P^3 der Matrix P.

d) Vergleichen Sie die für b) und c) gefundenen Antworten miteinander und zeigen Sie, daß $P^{(3)} = P^3$.

11. Zeigen Sie, daß alle Werte der fünften und aller höheren Potenzen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

positiv sind. Zeigen Sie, daß niedrigere Potenzen die Eigenschaft nicht besitzen.

12. Nehmen Sie in Beispiel 1 des Abschnittes 2 an, daß der Bauunternehmer neben den Einkaufskosten auch die Transportkosten des Rohmaterials zum Bauplatz berücksichtigen wolle. Die anfallenden Kosten seien durch folgende Matrix gegeben:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Einkauf} & \text{Transport} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 15 & 4{,}5 \\ 8 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0{,}5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{Stahl} \\ \text{Holz} \\ \text{Glas} \\ \text{Farbe} \\ \text{Arbeit} \end{matrix}$$

a) Ermitteln Sie durch die Errechnung des Produktes $R \cdot Q$ eine 3×2 Matrix, deren Werte die Einkaufs- und Transportkosten der Rohmaterialien für jeden Haustyp angeben.
b) Errechnen Sie das Produkt $x \cdot R \cdot Q$, das aus dem Zeilenvektor mit zwei Komponenten besteht, dessen erste Komponente den gesamten Einkaufspreis und dessen zweite Komponente die Gesamttransportkosten angibt.
c) Es sei $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Errechnen Sie $x \cdot R \cdot Q \cdot z$, die Gesamtkosten für den Kauf und den Transport des Rohmaterials für den Bau aller vorgesehenen Häuser.

[Lös.: 14304 DM.]

5. Die Lösung linearer Gleichungen

Es gibt viele Fälle, bei denen die Lösung simultaner linearer Gleichungen wichtig ist. Wir werden in diesem Abschnitt Methoden dafür entwickeln, festzustellen, ob ein Satz linearer Gleichungen Lösungen hat und, wenn solche vorhanden sind, sie zu bestimmen.

Beispiel 1. Betrachten Sie das folgende Beispiel dreier linearer Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\
&(2) \qquad 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\
&(3) \qquad x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5.
\end{aligned}
$$

Ehe wir die Lösung dieser Gleichungen betrachten, wollen wir uns noch klarmachen, daß sie als eine einzige Gleichung in Matrixform wie folgt geschrieben werden können:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.
$$

Es ist eine der Stärken des Vektor- und Matrixbegriffes, daß man eine große Anzahl linearer Gleichungen in Form einer einfachen Matrixgleichung, wie sie oben gezeigt wird, schreiben kann. Dies führt auch zur Möglichkeit, Gleichungssysteme durch Benutzung der Koeffizientenmatrix zu lösen, wie wir es am Ende dieses Abschnittes und im nächsten Abschnitt diskutieren werden.
Normalerweise würde man die oben angegebenen Gleichungen wie folgt lösen: Zunächst benutzen wir die Gleichung (1), um die Variable x_1 aus den Gleichungen (2) und (3) zu eliminieren, d. h. wir multiplizieren (1) mit (2) und subtrahieren sie dann von (2), subtrahieren dann (1) von (3), so daß wir die folgenden drei Gleichungen erhalten:

$$
\begin{aligned}
&(1') \qquad x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\
&(2') \qquad -3x_2 - 2x_3 = 2 \\
&(3') \qquad -7x_2 - 5x_3 = 4.
\end{aligned}
$$

Als nächstes dividieren wir die Gleichung (2') durch den Koeffizienten von x_2, nämlich -3 und erhalten $x_x + 2/3x_3 = -2/3$. Diese Gleichung benutzen wir nun, um x_2 aus den beiden anderen Gleichungen zu eliminieren. Zu diesem Zweck multiplizieren wir

diese Gleichung mit 4 und subtrahieren sie von (1'), multiplizieren sie mit 7 und addieren sie zu Gleichung (3'). Wir erhalten also

$$(1'') \qquad x_1 + 0 + \tfrac{1}{3}x_3 = \tfrac{11}{3}$$
$$(2'') \qquad x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 = -\tfrac{2}{3}$$
$$(3'') \qquad -\tfrac{1}{3}x_3 = -\tfrac{2}{3}.$$

Als Letztes haben wir (3'') durch —1/3, dem Koeffizienten von x_3, zu dividieren, und erhalten die Gleichung $x_3 = 2$. Diese Gleichung benutzen wir nun wiederum, um x_3 aus den ersten beiden Gleichungen wie folgt zu eliminieren.

$$(1''') \qquad x_1 + 0 + 0 = 3$$
$$(2''') \qquad x_2 + 0 = -2$$
$$(3''') \qquad x_3 = 2.$$

Aus diesen Gleichungen können wir nun die Lösung als $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$ ablesen. Der Leser sollte diese Werte in die Ursprungsgleichungen (1), (2) und (3) einsetzen, um zu sehen, ob dies wirklich die richtigen Lösungen sind.

Wir sahen, daß bei dem gerade diskutierten Beispiel der Satz dreier simultaner Gleichungen mit drei Variablen nur eine Lösung hatte. In Beispiel 2 wird es mehr als eine solche Lösung geben, und Beispiel 3 zeigt den Fall eines Satzes dreier simultaner Gleichungen mit drei Variablen, für den es keine Lösung gibt.

Beispiel 2. Betrachten Sie die folgenden drei linearen Gleichungen:

$$(4) \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2$$
$$(5) \qquad x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14$$
$$(6) \qquad -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0.$$

Gehen wir im letzten Beispiel vor, so benutzen wir Gleichung (4), um die Variable x_1 aus den anderen zwei Gleichungen zu eliminieren. Wir erhalten dann

$$(4') \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2$$
$$(5') \qquad -2x_2 - 10x_3 = 12$$
$$(6') \qquad -x_2 - 5x_3 = 6.$$

Nun dividieren wir Gleichung (5') durch —2 und erhalten die Gleichung $x_2 + 5x_3 = -6$. Diese Gleichung benutzen wir, um die Variable x_2 aus den beiden anderen Gleichungen zu eliminieren, indem wir die Gleichung mit 2 multiplizieren und die Gleichung (4') addieren und sie dann zur Gleichung (6') addieren. Wir erhalten also:

$$(4'') \qquad x_1 + 0 + 7x_3 = -10$$
$$(5'') \qquad x_2 + 5x_3 = -6$$
$$(6'') \qquad 0 = 0.$$

Wir haben damit die letzte Gleichung vollständig eliminiert. Wir sehen ferner, daß die Variable x_3 innerhalb dieser Gleichungen vollkommen willkürlich gewählt werden kann. Um dies noch klarer zu machen, bringen wir alle x_3 enthaltenden Werte auf die rechte Seite und erhalten

$$(4''') \qquad x_1 = -10 - 7x_3$$
$$(5''') \qquad x_2 = -6 - 5x_3.$$

An dieser Stelle sollte der Leser durch Einsetzen dieser Werte für x_1 und x_2 in die Gleichungen (4), (5) und (6) überprüfen, daß sie unabhängig vom Wert für x_3 Lösungen dieser Gleichungen sind. Wir wollen nun auch spezielle Werte für x_3 einsetzen, um numerische Lösungen zu erhalten. Setzen wir für $x_3 = 1$, 0 oder -2 ein und errechnen die entsprechenden Werte für x_1 und x_2 unter Benutzung der Gleichungen (4‴) und (5‴), so erhalten wir die folgenden numerischen Lösungen:

$$\begin{array}{lll} x_1 = -17, & x_2 = -11, & x_3 = 1 \\ x_1 = -10, & x_2 = -6, & x_3 = 0 \\ x_1 = 4, & x_2 = 4, & x_3 = -2. \end{array}$$

Auch diese Zahlen sollte der Leser in Gleichung (4), (5) und (6) einsetzen, um sich zu versichern, daß sie Lösungen darstellen. Zusammenfassend können wir sagen, daß unser zweites Beispiel unendlich viel Lösungen — je eine für jeden Wert von x_3, den wir in die Gleichungen (4‴) und (5‴) einsetzen — hat.

Beispiel 3. Wir wollen die Gleichung (6) dadurch modifizieren, daß wir die 0 auf der rechten Seite in 2 abändern. Wir erhalten dann

$$\begin{array}{ll} (7) & x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ (8) & x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14 \\ (9) & -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2. \end{array}$$

Führen wir die gleichen Operationen wie bei Beispiel 2 durch und benutzen (7), um x_1 aus Gleichung (8) und (9) zu eliminieren, so erhalten wir

$$\begin{array}{ll} (7') & x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ (8') & -2x_2 - 10x_3 = 12 \\ (9') & -x_2 - 5x_3 = 8. \end{array}$$

Wir dividieren nun (8′) durch -2, den Koeffizienten von x_2 und erhalten wie vorher $x_2 + 5x_3 = -6$. Benutzen wir diese Gleichung, um x_2 aus den beiden anderen Gleichungen zu eliminieren, so erhalten wir

$$\begin{array}{ll} (7'') & x_1 + 0 + 7x_3 = -10 \\ (8'') & x_2 + 5x_3 = -6 \\ (9'') & 0 = 2. \end{array}$$

Sie sehen, daß die letzte der drei Gleichungen falsch ist. Aus der Tatsache, daß unsere Rechenoperationen zu einem falschen Ergebnis führten, schließen wir, daß die Gleichungen (7), (8) und (9) keine Lösung haben. Der Leser sollte sich stets vor Augen halten, daß diese Möglichkeit bei der Betrachtung simultaner Gleichungen durchaus besteht.

In den soeben betrachteten Beispielen waren immer ebensoviel Variable wie Gleichungen vorhanden. Das nächste Beispiel enthält mehr Variable als Gleichungen und das letzte mehr Gleichungen als Variable.

Beispiel 4. Betrachten Sie die folgenden zwei Gleichungen mit drei Variablen:

$$\begin{array}{ll} (10) & -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ (11) & 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{array}$$

Gehen wir nach der gleichen Methode vor wie bisher, so dividieren wir Gleichung (10) durch —4, multiplizieren das Ergebnis dann mit 5 und ziehen es von Gleichung (11) ab. Wir erhalten dann

$$x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 = \tfrac{1}{2} \tag{10'}$$
$$-\tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{7}{2}x_3 = \tfrac{1}{2}. \tag{11'}$$

Multiplizieren wir (11') mit —4 und benutzen es, um x_2 aus (10') zu eliminieren, so erhalten wir

$$x_1 + 0 - 11x_3 = -1 \tag{10''}$$
$$x_2 - 14x_3 = -2. \tag{11''}$$

Wir können nun für x_3 einen beliebigen Wert einsetzen und die Gleichungen für x_1 und x_2 lösen. Wir wollen diese Tatsache betonen, indem wir sie wie in Beispiel 2 in leicht veränderter Form schreiben:

$$x_1 = 11x_3 - 1 \tag{10'''}$$
$$x_2 = 14x_3 - 2. \tag{11'''}$$

Der Leser sollte sich davon überzeugen, daß dies Lösungen sind, und durch die Wahl spezieller Werte für x_3 numerische Lösungen für diese Gleichungen bestimmen.

Beispiel 5. Wir wollen nun die andere Möglichkeit betrachten, nämlich, daß mehr Gleichungen als Variable vorhanden sind. Betrachten Sie dazu die folgenden Gleichungen

$$-4x_1 + 3x_2 = 2 \tag{12}$$
$$5x_1 - 4x_2 = 0 \tag{13}$$
$$2x_1 - x_2 = a. \tag{14}$$

Hierbei soll a eine willkürliche Zahl sein. Benutzen wir Gleichung (12), um x_1 aus den anderen zwei Gleichungen zu eliminieren, so erhalten wir

$$x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 = -\tfrac{1}{2} \tag{12'}$$
$$-\tfrac{1}{4}x_2 = \tfrac{5}{2} \tag{13'}$$
$$\tfrac{1}{2}x_2 = a + 1. \tag{14'}$$

Nun benutzen wir (13'), um x_2 aus der anderen Gleichung zu eliminieren, und erhalten

$$x_1 + 0 = -8 \tag{12''}$$
$$x_2 = -10 \tag{13''}$$
$$0 = a + 6. \tag{14''}$$

Diese Gleichungen erinnern uns an die Situation des Beispieles 3, da wir, wenn a nicht gleich —6 ist, eine falsche Gleichung erhalten. Wir sehen, daß die Gleichungen (12), (13) und (14) die Lösung $x_1 = -8$ und $x_2 = -10$ für den Fall von $a = -6$ haben. Ist $a \neq -6$, so gibt es keine Lösung für diese Gleichungen.

Die oben angeführten Beispiele illustrieren alle Möglichkeiten, die im allgemeinen vorkommen können. Ein Gleichungssystem kann danach keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben.

Die soeben zur Lösung dieser Gleichungen benutzte Methode verwandelt jeden Satz linearer Gleichungen in einen äquivalenten Satz, aus dem das

Vorhandensein von Lösungen und die Lösungen selbst leicht abgelesen werden können. Ein Leser, der gewohnt ist, lineare Gleichungen auf andere Weise zu lösen, wird sich darüber wundern, daß wir die obige Vorgehensweise, die nicht immer der kürzeste Weg der Lösung von Gleichungen ist, gewählt haben. Der Grund hierfür ist, daß diese Methode immer anwendbar ist, d. h. jeder Satz linearer Gleichungen kann damit gelöst werden. Elegantere Methoden sind gewöhnlich nur auf Gleichungen anwendbar, bei denen Lösungen vorhanden sind, und selbst dann findet man manchmal nicht alle Lösungen. Gerade für maschinelle Rechnungen sollte der Wert einer unfehlbaren Standardmethode nicht unterschätzt werden.

Wir wollen uns nun wiederum den Gleichungen des Beispiel 1 zuwenden. Beachten Sie, daß sich die Variablen, die Koeffizienten und die Gleichheitszeichen stets in einer Spalte untereinander befinden und auch während des ganzen Lösungsganges diese Anordnung beibehalten. Offensichtlich ist der Ort eines Koeffizienten eine ausreichende Kennzeichnung, so daß es überflüssig ist, die dazugehörige Variable immer wieder hinzuschreiben. Wir können also von dem folgenden Koeffizientenschema ausgehen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right). \tag{15}$$

Beachten Sie, daß wir die Koeffizienten von x_1 in der ersten Spalte, die Koeffizienten von x_2 in der zweiten Spalte, die von x_3 in der dritten Spalte und die Konstanten der rechten Gleichungsseite in der vierten Spalte finden. Der vertikale Strich stellt die Gleichheitszeichen der Gleichungen dar.

Das in (15) dargestellte Schema wird im folgenden die *erweiterte Matrix* eines Gleichungssystems genannt werden. Wir werden Ihnen in den nächsten Beispielen zeigen, wie man simultane Gleichungen unter Benutzung der erweiterten Matrix lösen kann.

Beispiel 6. Wir führen, ausgehend von der in (15) gezeigten Matrix, die gleichen Rechenoperationen wie in Beispiel 1 aus und kommen damit zu der folgenden Matrixreihe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) \tag{16}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \tag{17}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right). \tag{18}$$

Aus der Matrix (18) können wir leicht die Antwort als $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$ ablesen, die mit der des Beispieles 1 übereinstimmt.
Stellen wir die soeben ausgeführten Rechnungen denen des Beispieles 1 gegenüber, so sehen wir

(1), (2) und (3)	entspricht (15)
(1′), (2′) und (3′)	entspricht (16)
(1″), (2″) und (3″)	entspricht (17)
(1‴), (2‴) und (3‴)	entspricht (18).

Beachten Sie, daß wir bei der Schreibung in Matrixform immer darauf achten müssen, daß alle Koeffizienten, die Null sind, in den einzelnen Spalten ausgeschrieben werden.

Beispiel 7. Nehmen Sie an, wir hätten zwei Systeme simultaner Gleichungen zu lösen, die sich lediglich in den rechten Seiten ihrer Gleichungen unterscheiden. Nehmen Sie z. B. an, wir wollten die folgenden Gleichungen lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist offensichtlich, daß die auf der linken Seite durchzuführenden Rechnungen unabhängig von den rechten Seiten der Gleichungen die gleichen sein werden. Es ist daher möglich, beide Systeme simultaner Gleichungen auf einmal zu lösen. Wir wollen dies an Hand der folgenden Matrixreihe illustrieren:

(20)
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

(21)
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

(22)
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

(23)
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right).$$

Wir erhalten als Lösungen:

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = 2$$

für den ersten Gleichungssatz und

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -4, \qquad x_3 = 5$$

für den zweiten Gleichungssatz. Der Leser sollte sich durch das Einsetzen dieser Lösungen in die Ursprungsgleichungen von deren Richtigkeit überzeugen.

ÜBUNGEN

1. Rechnen Sie noch einmal die Beispiele 2 bis 4 unter Benutzung erweiterter Koeffizientenmatrizen durch.

2. Lösen Sie die folgenden Systeme simultaner Gleichungen:

(a) $\begin{aligned} 4x_1 + 5x_3 &= 6 \\ x_2 - 6x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 4x_3 &= 3. \end{aligned}$ [Lös.: $x_1 = 9$, $x_2 = -38$, $x_3 = -6$.]

(b) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 5x_2 &= 3. \end{aligned}$ [Lös.: keine Antwort.]

(c) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$ [Lös.: $x_1 = -7x_3$, $x_2 = -5x_3$.]

3. Bestimmen Sie alle Lösungen folgender simultaner Gleichungen:

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 4x_1 + 4x_3 &= 8 \\ x_2 - 6x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3. \end{aligned}$

4. Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen unter Verwendung erweiterter Matrizen:

(a) $\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 &= -7 \\ -2x_1 + 9x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -2. \end{aligned}$ [Lös.: $x_1 = -\frac{17}{13}$; $x_2 = \frac{2}{13}$.]

(b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1. \end{aligned}$ [Lös.: Keine Antwort.]

(c) $\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 0. \end{aligned}$

5. Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 11 \\ -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 10x_4 &= 18. \end{aligned}$$

[Lös.: $x_1 = \frac{12}{5} - x_3 - \frac{2}{5}x_4$; $x_2 = \frac{19}{5} - x_3 - \frac{9}{5}x_4$, x_3 und x_4 Willkürlich.]

6. Wir wollen drei verschiedene Lebensmittel kaufen. Lebensmittel 1 enthalte 1 Einheit Vitamin A, 3 Einheiten Vitamin B und 4 Einheiten Vitamin C. Lebensmittel 2 enthalte 2, 3 bzw. 5 Einheiten. Lebensmittel 3 enthalte je 3 Einheiten der Vitamine A und C und kein Vitamin B. Wir benötigen 11 Einheiten Vitamin A, 9 Einheiten Vitamin B und 20 Einheiten Vitamin C.

a) Bestimmen Sie die möglichen Mengen der drei Lebensmittel, die genau diese Vitaminmengen enthalten.

b) Gibt es eine Lösung, für die genau 1 DM zu zahlen ist, wenn eine Einheit des Lebensmittel 1 60 Pf und je eine Einheit der anderen Lebensmittel 10 Pf kostet? [Lös. b): Ja, 1, 2, 2.]

7. Lösen Sie die folgenden vier Systeme simultaner Gleichungen, deren rechte Seiten der Gleichungen unter a), b), c) und d) angegeben sind. Benutzen Sie dabei erweiterte Matrizen.

		(a)	(b)	(c)	(d)
$4x_1 + 5x_3$	$=$	1	1	0	0
$x_2 - 6x_3$	$=$	2	0	0	1
$3x_1 + 4x_3$	$=$	3	0	1	0.

[Lös.: (a) $x_1 = -11$, $x_2 = 56$, $x_3 = 9$.]

8. Lösen Sie die folgenden vier Systeme simultaner Gleichungen, die sich lediglich in den rechten Seiten der Gleichungen unterscheiden.

		(a)	(b)	(c)	(d)
$x_1 + x_2 + x_3$	$=$	3	0	12	0
$x_1 - x_2 + 2x_3$	$=$	2	-1	7	0
$2x_1 + x_2 - x_3$	$=$	2	3	11	0.

9. Lösen Sie die folgenden drei Systeme simultaner Gleichungen

		(a)	(b)	(c)
$x_1 + x_2 + x_3$	$=$	1	2	0
$x_1 - x_2 + 2x_3$	$=$	-2	2	0
$3x_1 - x_2 + 5x_3$	$=$	-3	2	0.

10. Zeigen Sie, daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 + ax_3 &= c \\ 5x_1 - 4x_2 + bx_3 &= d \end{aligned}$$

für alle Werte von a, b, c und d jeweils eine Lösung haben.

11. Bestimmen Sie für a, b und c die Bedingungen, unter denen die Gleichungen

$$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &= a \\ 5x_1 - 4x_2 &= b \\ -3x_1 + 2x_2 &= c \end{aligned}$$

[Lös.: $2a + b = c$.]

eine Lösung haben.

12. a) Es sei $x = (x_1, x_2)$ und A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x_a = x$. [Lös.: $x = 0{,}0$.]

b) Es sei $x = (x_1, x_2)$ und A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $xA = x$.
[Lös.: $x = (k,k)$ für jeden Wert von k.]

13. Es sei $x = (x_1, x_2)$ und P die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $xP = x$.
b) Wählen Sie die Lösung aus, für die $x_1 + x_2 = 1$.

14. Es sei $x = (x_1, x_2, x_3)$ und A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix},$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $xA = x$.
[Lös.: $x = (-k/2, 5k/4, k)$ für jeden Wert von k.]

15. Es sei $x = (x_1, x_2, x_3)$ und P die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $xP = x$. Bestimmen Sie die einzige Lösung, für die $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

16. a) Zeigen Sie, daß die simultanen, linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

als einzige Matrix-Spaltenvektorgleichung in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

interpretiert werden können.

b) Zeigen Sie, daß jedes System simultaner, linearer Gleichungen als eine Matrixgleichung in Form $Ax = b$ interpretiert werden kann, wobei A eine $m \times n$-Matrix, x einen Spaltenvektor mit n Komponenten und b einen Spaltenvektor mit m Komponenten darstellt.

17. a) Zeigen Sie, daß die Gleichungen der Übung 16a) als eine Zeilenvektor-Matrixgleichung der Form

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 0)$$

interpretiert werden können.

b) Zeigen Sie, daß jedes System simultaner, linearer Gleichungen als eine Matrixgleichung der Form $xA = b$ interpretiert werden kann, wobei A eine $m \times n$-Matrix, x einen Zeilenvektor mit m Komponenten und b einen Zeilenvektor mit n Komponenten darstellt.

18. a) Zeigen Sie, daß die simultanen, linearen Gleichungen der Übung 16a) als die Frage nach allen möglichen Wegen der Darstellung des Spaltenvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ interpretiert werden können.

b) Zeigen Sie, daß jedes System linearer Gleichungen als die Frage nach allen möglichen Weisen der Darstellung eines Spaltenvektors durch einen anderen gegebenen Spaltenvektor interpretiert werden kann.

6. Die Inverse einer quadratischen Matrix

Ist A eine quadratische Matrix und B eine andere quadratische Matrix der gleichen Größe, und es besteht zwischen diesen beiden Matrizen der Zusammenhang $B \cdot A = I$ (wobei I die Einsmatrix ist), so bezeichnen wir B als die *Inverse* von A. Wir wollen die Inverse von A, wenn sie existiert, mit dem Symbol A^{-1} bezeichnen. Wir wollen dafür ein numerisches Beispiel geben:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Es gilt dann:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Multiplizieren wir diese Matrizen in anderer Reihenfolge miteinander, so erhalten wir wiederum die Einsmatrix. Es ist also auch

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Man kann beweisen, daß, wenn A eine quadratische Matrix mit ihrer Inversen A^{-1} ist, die Gleichung

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

gilt.

Es ist leicht zu sehen, daß eine quadratische Matrix nur eine Inverse haben kann. Nehmen Sie an, es gäbe zusätzlich zu A^{-1} eine Matrix B, die die Bedingung

$$B \cdot A = I$$

erfüllt.

Es gilt dann

$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

Die Bestimmung der Inverse einer Matrix kann als Analogie zur Errechnung des reziproken Wertes einer normalen Zahl angesehen werden. Die Analogie ist hierbei jedoch nicht vollständig: Jede von 0 verschiedene Zahl hat einen reziproken Wert, im Gegensatz dazu hat nicht jede Matrix (außer der Null-Matrix) eine Inverse. Ist z. B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus folgt, daß weder A noch B eine Inverse haben kann. Um zu zeigen, daß keine Inverse von A existiert, wollen wir zunächst annehmen, A habe eine Inverse A^{-1}. Wir können dann schreiben

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0.$$

Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß B ungleich 0. Der Beweis dafür, daß B keine Inverse haben kann, entspricht dem für A durchgeführten.

Wir wollen nun versuchen, die Inverse der Matrix A in (1) zu berechnen. Speziell wollen wir zunächst die erste Spalte von A^{-1} bestimmen. Es seien

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

die gesuchten Komponenten der ersten Spalte. Aus der Gleichung $AA^{-1} = I$ sehen wir dann, daß wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen haben.

Entsprechend haben wir zur Bestimmung der zweiten und dritten Spalte von A^{-1} die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen.

Wir stehen also vor drei Systemen simultaner Gleichungen, die lediglich in den rechten Seiten ihrer Gleichungen voneinander abweichen. Das ist jedoch genau die Situation, die wir in Beispiel 6 des vorigen Abschnittes beschrieben. Um sie zu lösen, beginnen wir mit der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und führen damit die im letzten Abschnitt beschriebenen Rechnungen aus. Dadurch erhalten wir die folgende Matrixreihe. In 3) dividieren wir zunächst die erste Zeile durch 4, behalten die zweite Zeile bei und multiplizieren die neue erste Zeile mit 3, um sie dann von der alten dritten Zeile abzuziehen. Dadurch erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Als nächstes multiplizieren wir die dritte Zeile von 4) mit 4, multiplizieren die neue dritte Zeile mit 6 und addieren sie zur alten zweiten Zeile; dann multiplizieren wir die neue dritte Reihe mit 5/4 und subtrahieren sie von der alten ersten Reihe. Damit erhalten wir als abschließende Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Wir sehen, daß die Inverse A^{-1}, wie wir sie in 2) sehen, zur Rechten der vertikalen Linie der Matrix 5) erscheint.

Auf die gerade beschriebene Weise können wir die Inverse jeder quadratischen Matrix aus A finden, vorausgesetzt, daß eine Inverse von A existiert. Wir können also wie folgt zusammenfassen:

Regel zur Bestimmung der Inversen einer Matrix: A sei eine Matrix, zu der eine Inverse existiert. Um diese Inverse von A zu ermitteln, geht man von der erweiterten Matrix

$$(A \mid I)$$

aus und verwandelt sie durch Zeilentransformation (wie in Abschnitt 5 beschrieben) in die erweiterte Matrix

$$(I \mid B)$$

um.

Die resultierende Matrix B ist die Inverse A^{-1} von A.

Man kann selbst dann, wenn A über keine Inverse verfügt, nach der eben beschriebenen Methode vorgehen. An irgendeinem Punkt wird man dann auf eine Matrix stoßen, die noch nicht die gesuchte, endgültige Form hat, die man jedoch auch nicht mehr durch Zeilentransformation der beschriebenen Art abwandeln kann.

Beispiel 1. Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

über keine Inverse verfügt.

Wir gehen von der folgenden erweiterten Ausgangsmatrix aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nach der Durchführung der ersten Stufe der Zeilentransformationen erhalten wir das zweite folgende Schema:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es ist klar, daß wir über diesen Punkt hinaus nicht fortfahren können, da wir links vom senkrechten Strich auf eine Zeile stoßen, die nur aus Nullen besteht. Wir können daraus schließen, daß A keine Inverse besitzt.

Aus der Form der in 7) gezeigten erweiterten Matrix können wir sehen, daß es unmöglich ist, die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen, da sie gemäß dem in Abschnitt 5 entwickelten Test miteinander unvereinbar sind. Mit anderen Worten, durch die dritte Spalte der inversen Matrix wird eine Lösung unmöglich.

Hieraus wird klar, daß eine $m \times n$ Matrix A dann und nur dann eine Inverse hat, wenn das folgende System simultaner Gleichungen eindeutig gelöst werden kann:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Sätze simultaner Gleichungen können, da sie die linke Seite der Gleichung gemeinsam haben, nur dann eindeutig gelöst werden, wenn die Transformationen zur Errechnung der Inversenmatrix durchgeführt werden können. Damit haben wir das folgende Theorem bewiesen.

Theorem. Eine quadratische Matrix A hat dann und nur dann eine Inverse, wenn die erweiterte Matrix

$$(A \mid I)$$

durch Zeilentransformationen in die erweiterte Matrix

$$(I \mid A^{-1})$$

überführt werden kann.

Beispiel 2. Wir wollen die Inverse der folgenden Matrix bestimmen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir gehen aus von der erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Durch Zeilentransformationen erhalten wir die folgenden Matrizen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right).$$

Die Inverse von A ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Der Leser sollte nachprüfen, daß $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ ist.

ÜBUNGEN

1. Errechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Teillös.: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.]

2. Zeigen Sie, daß die folgenden Matrizen keine Inverse haben.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. A, B und D seien die in Übung 1 genannten Matrizen. Es sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ und } w = (w_1, w_2, w_3);$$

b, c, d, e und f seien die folgenden Vektoren:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad d = (3, 7, -2), \quad e = (1, 1, 1), \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen unter Benutzung der in Übung 1 errechneten Inversen.

(a) $Ax = b$. (b) $Bx = c$. (c) $wD = e$.
(d) $wB = d$. (e) $wA = e$. (f) $Dx = f$.

[Teillös.: (a) $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -40 \\ 6 \end{pmatrix}$; (e) $w = (-10, 1, -4)$; (f) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$.]

4. Lösen Sie noch einmal Übung 7 aus Abschnitt 5, indem Sie die Gleichungen erst in der Form $Ax = b$ schreiben und dann die Inverse von A berechnen.

5. Lösen Sie das folgende Problem, indem Sie zunächst die Inversematrix ermitteln. (Setzen Sie voraus $ad \neq bc$.) Gibt man in einen Fleischwolf x Pfund Rindfleisch und y Pfund fettes Schweinefleisch, so kann man daraus $ax + by$ Pfund Schabefleisch und $cx + dy$ Pfund Gehacktes herstellen. Der Produktionsvektor ist mit anderen Worten

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Welche Mengen von Rindfleisch und fettem Schweinefleisch muß man in den Fleischwolf hineingeben, um 25 Pfund Schabefleisch und 70 Pfund Gehacktes zu erhalten? Wieviel um 20 Pfund Schabefleisch und 100 Pfund Gehacktes zu erhalten?

6. Bestimmen Sie für jede der Matrizen A und D in Übung 2 einen von 0 verschiedenen Vektor, dessen Produkt mit der Matrix 0 ergibt.

7. Zeigen Sie, daß keine der positiven Potenzen A^k über eine Inverse verfügt, wenn keine Inverse der Matrix A vorhanden ist.

8. Die Formel $(A^{-1})^{-1} = A$ besagt, daß dann, wenn A eine Inverse A^{-1} hat, auch eine Inverse von A^{-1} vorhanden ist und daß diese wiederum A ist. Beweisen Sie beide Teile dieser Behauptung.

9. Kleiden Sie die Formel $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ in eine zweiteilige, der in Übung 8 genannten analogen Aussage, und beweisen Sie deren beide Teile.

10. a) Zeigen Sie, daß für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt: $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.
b) Ermitteln Sie $(AB)^{-1}$ auf zwei verschiedene Weisen. [Hinw.: Benutze Übung 9.]

11. Nennen Sie ein Kriterium dafür, daß die 2×2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ über eine Inverse verfügt. [Lös.: $ad \neq bc$.]

12. Nennen Sie eine Formel für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$, wenn eine Inverse vorhanden ist.

13. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verfüge über eine Inverse und habe ganzzahlige Komponenten. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit auch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$ über ganzzahlige Komponenten verfügt?

7*. Das Stücklistenproblem

Eine Fabrik stelle Teile, Baugruppen und aus Teilen zusammengesetzte Fertigprodukte sowie aus Teilen und Baugruppen zusammengesetzte Baugruppen und Fertigprodukte her. Während die Fertigprodukte verkaufs-Fertigprodukte sowie aus Teilen und Baugruppen zusammengesetzte Baugruppen und Fertigprodukte her. Während die Fertigprodukte verkaufsreif seien, seien Teile und Baugruppen lediglich für die Verwendung in anderen Baugruppen oder Fertigprodukten gedacht. Nehmen Sie an, die Fabrik habe einen Auftrag über eine bestimmte Anzahl jeder dieser Fertigprodukte erhalten. Wie viele Teile der verschiedenen Arten müssen hergestellt werden, um alle Fertigprodukte für diesen Auftrag montieren zu können?

Für einfache Fertigprodukte, die lediglich aus wenigen Teilen bestehen, ist dies ein leicht zu lösendes Problem. Enthalten die Fertigprodukte jedoch Tausende von Baugruppen, die wiederum aus tausenden Teilen und Baugruppen bestehen, so wird das Problem außerordentlich kompliziert. Wir werden mit Hilfe von Matrizen Methoden für die vollständige Lösung dieses Problems entwickeln.

Wir wollen voraussetzen, daß n verschiedene Teile, Baugruppen und Fertigprodukte von der Gesellschaft hergestellt werden. Wir wollen diese Produkte mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnen. Es wird sich als nutzbringend erweisen, alle Produkte in einer bestimmten Reihenfolge aufzuführen.

Definition. Die hergestellten Teile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind dann in *technologischer Reihenfolge* aufgeführt, wenn das Teil a_i nicht eher erscheint, ehe nicht alle Teile und Baugruppen, die es enthält, bereits auf unserer Liste genannt wurden.

So kann z. B. ein Benzinmotor nicht eher auf unserer Liste erscheinen, bis nicht alle seine Teile (wie z. B. Kolben, Kolbenringe, Ventile, Bolzen, Zylinderköpfe usw.) in unserer Aufstellung enthalten sind.

Man kann die verschiedenen gefertigten Teile immer in technologischer Reihenfolge aufführen. Wäre das nicht möglich, so müßte es Teilegruppen geben, deren einzelne Teile nicht eher aufgeführt werden können, ehe alle anderen erfaßt sind oder, mit anderen Worten, von denen kein Teil eher hergestellt werden kann, ehe nicht alle anderen fertiggestellt sind. Dies würde jedoch zu einer in der Produktion unmöglichen Situation führen.

Definition. Es sei q_{ij} die Anzahl der Einheiten des Teiles a_j, die direkt dazu benötigt werden, ein Teil a_i zu montieren. Q sei die Matrix aller Komponenten q_{ij}. Wir wollen sie die *Mengenmatrix* nennen. Wenn wir sagen, wir benötigten ein Teil direkt für die Montage eines anderen Teiles, so

meinen wir damit, daß wir für die Montage einer Einheit von a_i genau q_{i1} Einheiten des Teiles a_1, q_{i2} Einheiten des Teiles a_2 usw. und q_{in} Einheiten des Teiles a_n benötigen. Daraus ergibt sich, daß $q_{ii} = 0$ sein muß, da ein Teil nicht für die Montage des gleichen Teiles benötigt werden kann, ohne daß es unmöglich ist, die Teile in technologischer Reihenfolge aufzuführen. Alle Werte, die sich *auf* der Hauptdiagonale von Q befinden, sind daher 0. Ferner sind alle Werte, die sich *oberhalb* der Hauptdiagonale von Q befinden, ebenfalls 0, da das Aufführen der Teile in technologischer Reihenfolge bedeutet, daß dann, wenn a_j benötigt wird, um a_i zu montieren, a_j vor a_i aufgeführt sein muß. Daher muß gelten $j < i$.

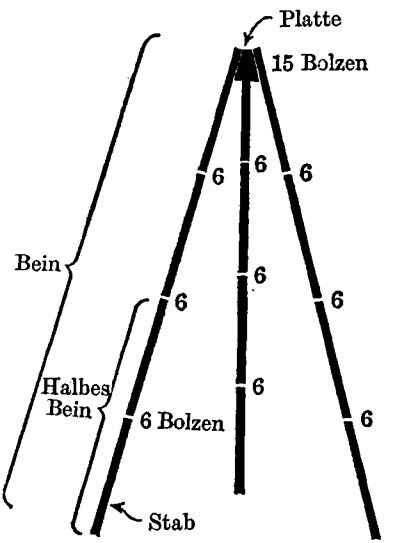


Abb. 5

Beispiel 1. Es solle ein dreibeiniges Stativ, wie es in Abb. 5 gezeigt wird, gebaut werden. Jedes der drei Beine werde auf folgende Weise montiert: Mittels sechs Bolzen werden jeweils zwei Stäbe zu einem halben Bein zusammengefügt und zwei halbe Beine dann wiederum mittels sechs Bolzen zu einem Bein vereinigt. Die drei Beine werden dann am oberen Ende mittels 15 Bolzen an einer Platte befestigt. Natürlich können wir die verschiedenen benötigten Teile leicht zählen. Wir wollen jedoch erst die Mengenmatrix aufstellen. Aus der obigen Beschreibung sehen wir, daß Q durch die in Abb. 6 gezeigte Matrix dargestellt wird. Um das Lesen zu erleichtern, sind die Nullen oberhalb der Hauptdiagonale weggelassen worden.

$$
Q = \begin{array}{l} \\ a_1 \text{ Stäbe} \\ a_2 \text{ Bolzen} \\ a_3 \text{ halbe Beine} \\ a_4 \text{ Beine} \\ a_5 \text{ Platte} \\ a_6 \text{ Stativ} \end{array}
\begin{pmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
0 & & & & & \\
0 & 0 & & & & \\
2 & 6 & 0 & & & \\
0 & 6 & 2 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 15 & 0 & 3 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Abb. 6

Wie sehen, daß alle von 0 verschiedenen Werte unterhalb der Hauptdiagonale erscheinen.

Durch die Struktur des unteren Dreiecks der Matrix Q besitzt sie eine besondere Eigenschaft, die durch das folgende Theorem ausgedrückt wird.

Theorem 1. Ist Q eine $n \times n$ Matrix der oben gezeigten Form, so ist $Q^k = 0$ für $k \geqq n$.

Beweis. Gemäß der Definition der Multiplikation von Matrizen hat Q^2 eine Nulldiagonale unterhalb der Hauptdiagonale, Q^3 hat zwei solcher Nulldiagonalen usw. Es ist daher $Q^n = 0$ und somit für $k \geqq n$, $Q^k = Q^{k-n}Q^n = 0$. Die verschiedenen Potenzen der Matrix Q können in folgender Weise interpretiert werden: $q_{ij}^{(2)}$ sei der i,j-te Wert von Q^2. Gehen wir dann nach der Regel für die Multiplikation von Matrizen vor, so sehen wir, daß

$$q_{ij}^{(2)} = q_{i1}q_{1j} + q_{i2}q_{2j} + \ldots + q_{i,i-1}q_{i-1,j} \tag{1}$$

wobei die Summe in (1) bis $i-1$ läuft, da $q_{ij} = 0$ für $j \geqq i$. Ein solches Produkt kann jedoch nur dann ungleich 0 sein, wenn beide Faktoren ungleich 0 sind. Wenn nun $q_{ik} > 0$ und $q_{kj} > 0$ ist, dann benötigen wir eine positive Anzahl von Einheiten des Teiles a_j, um eine Einheit a_k herzustellen. Um eine Einheit a_i herzustellen, benötigen wir dann wiederum eine positive Anzahl von Einheiten a_k. Wir sprechen in diesem Falle von zweistufigen Anforderungen bezüglich a_j bei der Herstellung von a_i. Wir schließen daraus, daß die Werte von Q^2 die Anzahl der zweistufigen Erfordernisse bestimmter Teile darstellen.

Auf die gleiche Weise kann man zeigen, daß die Werte von Q^3 die dreistufigen Anforderungen der Teile und Q^4 die Anzahl der vierstufigen Anforderungen darstellen.

Wir können, ausgehend von diesen Interpretationen, auch zu einem anderen intuitiven Beweis des Theorems 1 gelangen: Wird Q^k, unabhängig davon wie groß k ist, nie 0, so enthält der Produktionsprozeß von Null verschiedene k-stufige Teilebedürfnisse für jedes k. Um also eine Einheit Ausstoß produzieren zu können, müßte eine beliebig große Anzahl an Teilen vorhanden sein, was offensichtlich eine für die Produktion unmögliche Situation ist. Es gilt also für einige k, $Q^k = 0$, und da lediglich $n-1$ Teile vor dem Endprodukt liegen können, muß $Q^n = 0$ sein. Selbstverständlich kann Q^k auch schon für kleinere k 0 sein.

Nehmen Sie nun an, wir entschieden uns, x_1 Einheiten a_1, x_2 Einheiten a_2 usw. und x_n Einheiten a_n zu produzieren. Wir wollen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den *Produktionsvektor* nennen. Wie viele Einheiten jedes Teiles müssen wir zur Produktion vorsehen? Die Antwort hierauf erhalten wir durch die Mengenmatrix Q und den Produktionsvektor x. Wir werden also, um x_1 Einheiten a_1 zu produzieren, x_1q_{1j} Einheiten a_j herstellen müssen, um x_2 Einheiten a_2 zu produzieren, x_2q_{2j} Einheiten fertigen müssen usw. Schließlich werden wir x_nq_{nj} Einheiten a_j herstellen müssen, um a_n Einheiten x_n produzieren zu können. Addieren wir all dies, so erhalten wir

$$x_1q_{1j} + x_2q_{2j} + \ldots + x_nq_{nj} \tag{2}$$

als die Gesamtzahl der Einheiten a_j, die hergestellt werden müssen, um den Produktionsvektor x produzieren zu können. Man sieht leicht, daß (2) gerade die j-te Komponente des Vektors xQ ist. Der Vektor xQ gibt uns

also gerade die internen Produktionsanforderungen der Fabrik, wenn sie die im Produktionsvektor x genannten Mengen herstellen soll. Wir wollen den Vektor xQ den *internen Nachfragevektor* nennen, da durch ihn die Teilemengen angegeben werden, die hergestellt und intern durch die Fabrik verbraucht werden, um eine Produktion von x aufrechtzuerhalten.

Nehmen Sie nun an, eine Fabrik wolle d_1 Einheiten a_1, d_2 Einheiten a_2 usw. und d_n Einheiten a_n verschicken. Wir wollen $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ den *externen Nachfragevektor* nennen, da er all die Teilemengen angibt, die von der Fabrik hergestellt und versandt werden, die also nicht intern für die weitere Produktion verwandt werden.

Die Frage ist nun, wie groß sollte der Produktionsvektor x sein, um sowohl die interne Nachfrage $x \cdot Q$ als auch die externe Nachfrage d zu befriedigen. Es ist leicht zu erkennen, daß x der folgenden Gleichung genügen muß:

$$x = x \cdot Q + d \tag{3}$$

Wir haben nun lediglich die rein mathematische Aufgabe der Lösung der Gleichung (3) für x auszuführen. Eliminieren wir x auf der linken Seite der Gleichung, so erhalten wir

$$x(I - Q) = d \tag{4}$$

Hat die Matrix $I - Q$ eine Inverse, so ist es leicht, (4) durch die Multiplikation der rechten Seite mit $(I - Q)^{-1}$ zu lösen. Wir erhalten dann

$$x = d(I - Q)^{-1} \tag{5}$$

als die gesuchte Lösung. Wir wollen nun zeigen, daß eine Inverse auf jeden Fall existiert.

Theorem 2. Ist Q eine beliebige Matrix, die das Theorem 1 erfüllt, so wird die Inverse von $I - Q$ durch die Gleichung

$$(I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{k-1} \tag{6}$$

gegeben, wobei k die kleinste Zahl ist, für die $Q^k = 0$ gilt.

Beweis. Für jedes r kann die folgende Identität durch das Ausmultiplizieren der linken Seite behauptet werden:

$$(I - Q)(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{r-1}) = I - Q^r. \tag{7}$$

Definieren wir nun k als die kleinste Zahl, für die $Q^k = 0$ gilt, so sehen wir, daß

$$(I - Q)(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{k-1}) = I \tag{8}$$

gilt, womit bewiesen ist, daß eine Inverse existiert und sie die in Gleichung (6) gegebene Form hat.

Man kann mit Hilfe von (6) zeigen, daß dann, wenn die Werte von Q von 0 verschiedene ganze Zahlen sind, das gleiche dann auch für $(I - Q)^{-1}$ gilt. (Siehe Übung 6.)

Die Errechnung der Inversen von $I - Q$ kann nach der in Abschnitt 6 beschriebenen Art erfolgen. Dabei wird dies durch die Struktur des unteren Dreiecks von Q besonders einfach gemacht.

Beispiel 1. (Fortsetzung.) Für die oben gegebene Matrix Q werden die Matrizen $I - Q$ und $(I - Q)^{-1}$ in den Abb. 7 und 8 gegeben. Die Errechnung von $(I - Q)^{-1}$ mittels des Algorithmus des Abschnittes 6 ist sehr einfach, und wir wollen es dem Leser als eine Übung überlassen.

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ -2 & -6 & 1 & & & \\ 0 & -6 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & -15 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abb. 7

$$(I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 2 & 6 & 1 & & & \\ 4 & 18 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 12 & 69 & 6 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abb. 8

Nehmen Sie nun an, daß ein Kunde zehn solcher Stative und weitere 1000 Bolzen, sechs halbe Beine und zwei Platten als Ersatzteile bestelle. Welche Produktionsanforderungen hat die Fabrik zu erfüllen, um diesen Auftrag ausführen zu können? Wir sehen, daß

$$d = (0, 1000, 6, 0, 2, 10);$$

die erforderlichen Produktionsmengen werden also durch den Vektor

$$x = d(I - Q)^{-1} = (132, 1726, 66, 30, 12, 10)$$

gegeben, was der Leser leicht durch die Ausführung der Matrixmultiplikation nachprüfen kann. Die Fabrik muß also 132 Stäbe, 1726 Bolzen, 66 halbe Beine, 30 Beine, 12 Platten und 10 Stative herstellen. Dann verfügt sie genau über die Teilemenge, die sie zur Belieferung des Auftrages benötigt.

Man mag einwenden, daß das obige Problem dadurch gelöst werden kann, daß einfach ein Angestellter die erforderlichen Teile zählt, und diese Einwendung besteht nicht zu Unrecht. (Danach könnte man $(I - Q)^{-1}$ einfach durch ein Zählen der benötigten Teile errechnen. Siehe dazu Übung 9.) Diese Art von Rechnung hätten wir jedoch für jede der verschiedenen auftretenden Reihenfolgen durchzuführen, d. h. wir hätten die gleichen arithmetischen Rechnungen immer und immer wieder durchzuführen. Obwohl die Arbeit der Ermittlung von $(I - Q)^{-1}$ ziemlich umfangreich ist, rentiert sie sich doch dadurch, daß sie bei der Errechnung der Teileanforderungen in neuen Reihenfolgen immer wieder benutzt werden kann. Die

einzige Rechnung, die man bei jeder neu auftretenden Nachfrage d durchzuführen hat, ist die einfache Matrixmultiplikation $d(I - Q)^{-1}$.

Es sollte dazu noch bemerkt werden, daß sehr schnelle elektronische Rechenanlagen so programmiert werden können, daß sie diese Rechnungen sehr schnell ausführen.

ÜBUNGEN

1. Die Firma Ajax Electric und Co. stellt ein bestimmtes Gerät zur Schockbehandlung, einen sog. Schockapparat her. Ein Schockapparat besteht aus den grundlegenden Bauteilen A und B. Diese Bauteile werden durch einen Widerstand und zwei elektrische Spulen verbunden. Das Bauteil A besteht aus zwei Widerständen und einer elektrischen Spule. Das Bauteil B dagegen aus drei elektrischen Spulen und einem Widerstand. Die Herstellung einer Spule erfordert 20 Einheiten Draht, und für die Verbindung jeder Spule oder jedes Widerstandes mit den anderen Bauteilen werden zwei Einheiten Draht benötigt. Stellen Sie die technologische Matrix für die Herstellung eines Schockapparates auf.

Lös.: $Q =$

	D	S	W	A	B	S
D	0					
S	22	0				
W	2	0	0			
A	0	1	2	0		
B	0	3	1	0	0	
S	0	2	1	1	1	0

2. Ermitteln Sie $(I - Q)^{-1}$ für Übung 1.
3. Errechnen Sie in Übung 1 für jede der folgenden Nachfragen den Produktionsvektor x.
   a) Drei Schockapparate [Lös.: $x = (420, 18, 12, 3, 3, 3)$.]
   b) Zwei Schockapparate, drei Ersatzwiderstände, zwei Ersatzspulen, zehn Einheiten Draht.
   c) Zwei Schockapparate, zwei Ersatzbauteile A und zwei Ersatzbauteile B. [Lös.: $x = (468, 20, 14, 4, 4, 2)$.]
4. Bestimmen Sie für die folgenden zwei Matrizen $(I - Q)^{-1}$.

(a)
$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 2 & 0 & & & \\ 5 & 3 & 0 & & \\ 0 & 1 & 8 & 0 & \\ 10 & 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 7 & 0 & & \\ 2 & 0 & 0 & \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Ermitteln Sie die für die Befriedigung der folgenden externen Nachfragevektoren notwendigen Produktionsvektoren, wenn die Mengenmatrizen denen der Übung 4 entsprechen.

   (a) $d = (2, 0, 3, 10, 15)$. (b) $d = (0, 1, 5, 8)$.

6. Zeigen Sie unter Benutzung des Theorems 2, daß die Komponenten von $(I - Q)^{-1}$ dann von 0 verschiedene ganze Zahlen sind, wenn dies auch auf die Mengenmatrix Q zutrifft.
7. Zeigen Sie, daß Q^3 die dreistufigen Teileanforderungen angibt, wenn Q die Mengenmatrix ist.

8. Schreiben Sie unter Benutzung von 5. und 6. die Lösung x als eine Summe der Elemente dQ^i. Interpretieren Sie die einzelnen Größen und zeigen Sie, daß die Summe wirklich x entspricht.

9. Q sei irgendeine Matrix der in Übung 4 gezeigten Form. Entwickeln Sie eine Methode für die Errechnung von $(I - Q)^{-1}$, indem Sie die Komponenten von Q als Teileanforderungen interpretieren und lediglich die Gesamtteileanforderungen feststellen. Überprüfen Sie Ihre Methode, indem Sie sie für die Matrizen die Übung 4 verwenden und die Ergebnisse dann mit den in Übung 4 gefundenen vergleichen.

10. Errechnen Sie für jede der im folgenden gegebenen Nachfragen und für den Produktionsprozeß des Beispieles 1 den Produktionsvektor.

(a) $d = (10, 500, 50, 0, 20, 300)$.
(b) $d = (0, 2000, 0, 15, 5, 125)$.

8. Anwendungen der Matrizenrechnung auf Markovsche Ketten

In diesem Abschnitt werden wir Ihnen einige Anwendungen der Matrizenrechnung auf Markovsche Ketten zeigen. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir uns auf dreistufige Markovsche Ketten beschränken, obwohl ähnliche Vorgehensweisen auch auf andere Markovsche Ketten anzuwenden sind.

In Abschnitt 12 des Kapitels 4 führten wir aus, daß zu jeder Markovschen Kette eine Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten gehört. Haben wir z. B. die drei Zustände a_1, a_2, a_3, so ist

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

die Übergangsmatrix dieser Kette. Bitte rufen Sie sich ins Gedächtnis zurück, daß die Zeilensummen von P alle gleich 1 sind. Wir nennen eine solche Matrix eine Übergangsmatrix.

Definition. Eine *Übergangsmatrix* ist eine quadratische Matrix, deren Koeffizienten nicht negativ sind und deren Zeilensummen jeweils gleich 1 sind.

Um eine Markovsche Kette zu erhalten, müssen wir zunächst festlegen, wie der Prozeß beginnen soll. Nehmen Sie an, der Ausgangszustand sei durch einen Zufallsapparat, der den Zustand a_j mit der Wahrscheinlichkeit $p_j^{(0)}$ auswählt, festgelegt. Wir können diese Ausgangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Vektors $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)})$ darstellen. Wie wir in Übung 10, Abschnitt 4, zeigten, können wir eine Baummaßzahl für beliebig viele Stufen des Prozesses konstruieren. Es sei nun $p_j^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit

dafür, daß sich der Prozeß nach n Schritten in dem Zustand a_j befindet. Der Vektor dieser Wahrscheinlichkeiten sei $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)})$.

Definition. Ein Zeilenvektor p wird dann ein *Wahrscheinlichkeitsvektor* genannt, wenn die Summe der nicht negativen Komponenten 1 ist.

Offensichtlich sind die Vektoren $p^{(0)}$ und $p^{(n)}$ Wahrscheinlichkeitsvektoren. Außerdem bildet jede Zeile der Übergangsmatrix einen Wahrscheinlichkeitsvektor.

Mit Hilfe der Baummaßzahl kann gezeigt werden, daß diese Wahrscheinlichkeiten den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} p_1^{(n)} &= p_1^{(n-1)}p_{11} + p_2^{(n-1)}p_{21} + p_3^{(n-1)}p_{31} \\ p_2^{(n)} &= p_1^{(n-1)}p_{12} + p_2^{(n-1)}p_{22} + p_3^{(n-1)}p_{32} \\ p_3^{(n)} &= p_1^{(n-1)}p_{13} + p_2^{(n-1)}p_{23} + p_3^{(n-1)}p_{33}. \end{aligned}$$

Es ist nicht sehr schwer, diesen Gleichungen gefühlsmäßig einen Sinn zu geben. So drückt z. B. die erste Gleichung die Tatsache aus, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, nach n Schritten den Zustand a_1 erreicht zu haben, gleich ist der Summe der Wahrscheinlichkeiten dafür, nach $n - 1$ Schritten in einem der drei Zustände zu sein und sich dann mit dem n-ten Schritt nach Zustand a_1 zu begeben. Die Interpretation der anderen Gleichungen ist ähnlich.

Erinnern wir uns an die Definition des Produktes eines Vektors mit einer Matrix, so können wir die obigen Gleichungen als

$$p^{(n)} = p^{(n-1)}P$$

schreiben.

Setzen wir Werte für n ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$p^{(1)} = p^{(0)}P;\ p^{(2)} = p^{(1)}P = p^{(0)}\,p^2;\ p^{(3)} = p^{(2)}P = p^{(0)}P^3.$$

Allgemein kann gezeigt werden, daß

$$p^{(n)} = p^{(0)}P^n.$$

Wir sehen also, daß wir den Vektor $p^{(n)}$, dessen Komponenten Wahrscheinlichkeiten dafür darstellen, sich nach n Schritten in einem dieser Zustände zu befinden, dadurch erhalten, daß wir Vektor $p^{(0)}$ der Ausgangswahrscheinlichkeiten mit der n-ten Potenz der Übergangsmatrix P multiplizieren. Wir wollen als Spezialfall $p^{(0)} = (1,0,0)$ wählen, was einem Prozeßbeginn im Zustand a_1 entspricht. Aus der obigen Gleichung ersehen wir, daß dann $p^{(n)}$ der ersten Zeile der Matrix P^n entspricht. Die Elemente der ersten Zeile der Matrix P^n geben uns dann die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß sich der Prozeß nach n Schritten in einem gegebenen Zustand befindet, wenn man voraussetzt, daß er im Zustand a_1 beginnt.

Auf die gleiche Weise sehen wir, daß, wenn wir $p^{(0)} = (0,1,0)$ wählen, die zweite Reihe von p^n die Wahrscheinlichkeiten dafür gibt, daß sich der

Prozeß nach n Stufen in einem der verschiedenen Zustände befinden wird, wenn man voraussetzt, daß er im Zustand a_2 beginnt. Entsprechend gelten die Wahrscheinlichkeiten, die durch die dritte Zeile gegeben werden, dafür, daß der Prozeß im Zustand a_3 beginnt.

In Kapitel 4, Abschnitt 12, betrachteten wir besondere Markovsche Ketten, die in einem gegebenen, festgelegten Zustand begannen. Wir kamen dabei zu einer Matrix $P^{(n)}$, deren i-te Zeile uns die Wahrscheinlichkeiten dafür angab, daß der Prozeß, wenn er im Zustand a_i begann, in einem der verschiedenen Zustände endete. Vergleichen wir das dort Gesagte mit den jetzigen Ausführungen, so sehen wir, daß die Matrix $P^{(n)}$ lediglich die n-te Potenz von P darstellt, d. h. $P^{(n)} = P^n$. (Vergleiche Übung 10 von Abschnitt 4.) Matrixmultiplikationen bilden somit einen bequemen Weg, die gewünschten Wahrscheinlichkeiten zu errechnen.

Definition. Der Wahrscheinlichkeitsvektor w ist dann ein *Fixpunkt* der Matrix P, wenn $w = wP$ gilt.

Beispiel 1. Betrachten Sie die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}667 & 0{,}333 \\ 0{,}500 & 0{,}500 \end{pmatrix}.$$

Wenn $w = (0{,}6,\ 0{,}4)$, so sehen wir, daß

$$wP = (0{,}6,\ 0{,}4) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (0{,}6,\ 0{,}4) = w$$

d. h. W ist der Fixpunkt der Matrix P.

Hätten wir den Vektor w als unseren Vektor $p^{(0)}$ der Ausgangswahrscheinlichkeiten gewählt, so hätten wir $p^{(n)} = p^{(0)}P^n = wP^n = w = p^{(0)}$ erhalten. In diesem Falle wäre die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich der Prozeß in einem bestimmten Zustand befindet, bei allen Schritten die gleiche. Ein solcher Prozeß befindet sich im *Gleichgewicht*.

Wie wir oben sahen, interessiert uns beim Studium Markovscher Ketten die Potenz der Matrix P. Um zu sehen, welche Rolle die Potenzen spielen, wollen wir das obige Beispiel fortführen.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Nehmen Sie an, wir errechneten die Potenzen der Matrix des obigen Beispieles. Wir erhalten dann

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}611 & 0{,}389 \\ 0{,}583 & 0{,}417 \end{pmatrix}, \qquad P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}602 & 0{,}398 \\ 0{,}597 & 0{,}403 \end{pmatrix}, \qquad \text{usw.}$$

Es sieht so aus, als ob die Matrix P^n sich der Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

annäherte, und man kann in der Tat zeigen, daß dies der Fall ist. (Wenn wir sagen, daß P^n sich W nähert, so meinen wir damit, daß sich jeder Koeffizient der Matrix P^n dem entsprechenden Koeffizienten von W nähert.) Bitte beachten Sie, daß jede Zeile von W den Fixpunkt w der Matrix P darstellt.

Definition. Eine Übergangsmatrix wird dann als *regulär* bezeichnet, wenn irgendeine der Potenzen der Matrix nur aus positiven Koeffizienten besteht. Die in dem Beispiel gezeigte Matrix ist also regulär, da sie nur positive Koeffizienten aufweist, d. h. die erste Potenz der Matrix besteht lediglich aus positiven Koeffizienten. Andere Beispiele für solche Matrizen sind in den Übungen zu finden.

Theorem. Ist P eine reguläre Übergangsmatrix, dann

i) nähert sich die Potenz P^n einer Matrix W.

ii) Stellt jede Zeile von W den gleichen Wahrscheinlichkeitsvektor w dar.

iii) Sind die Koeffizienten von w alle positiv.

Wir wollen auf den Beweis dieses Theorems verzichten, können jedoch das nächste Theorem beweisen.

Theorem. Ist P eine reguläre Übergangsmatrix und W und w sind durch das vorhergehende Theorem bestimmt, so

a) nähert sich pP^n dem Wert w, wenn p ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsvektor ist.

b) ist der Vektor w der einzige Wahrscheinlichkeitsvektor des Fixpunktes von P.

Beweis. Wir wollen zunächst den Vektor pW betrachten. Die erste Spalte von W enthält in jeder Zeile ein w_1. In der ersten Komponenten pW enthält also jeder Koeffizient von p den Faktor w_1. Wir erhalten also w_1 mal die Summe der Koeffizienten von p und damit gleich w_1. Führen wir das gleiche für die anderen Koeffizienten durch, so sehen wir, daß pW ganz einfach w ist. Da jedoch pP^n sich pW nähert, nähert es sich auch w. Wird also irgendein Wahrscheinlichkeitsvektor wiederholt mit P multipliziert, so nähert er sich dem Fixpunkt w. Dadurch ist Teil a) bewiesen.

Da die Potenzen von P sich W annähern, nähert sich $P^{n+1} = P^nP$ sowohl W als auch WP; daher ist $WP = W$. Die Aussage jeweils einer Zeile dieser Matrixgleichung sagt also aus, daß $wP = w$; w ist also daher ein Fixpunkt (und gemäß dem vorangehenden Theorem ein Wahrscheinlichkeitsvektor). Es ist nun noch zu zeigen, daß dies eindeutig gilt. u sei irgendein Wahrscheinlichkeitsvektor mit der Eigenschaft des Fixpunktes P. Von a) wissen wir, daß uP^n sich w annähert. Da jedoch u ein Fixpupkt ist, ist $uP^n = u$. u bleibt also fix, nähert sich jedoch w. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn $u = w$. w ist also der einzige Fixpunkt. Damit wäre auch Teil b) bewiesen.

Das Folgende ist eine wichtige Konsequenz dieses Theorems. Wählen wir für den Vektor $p^{(0)}$ der Ausgangswahrscheinlichkeiten p, so gibt uns der Vektor $pP^n = p^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeiten nach n Schritten, und dieser Vektor nähert sich wiederum w. Nach einer sehr großen Anzahl von Schritten wird also unabhängig von den Ausgangswahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich der Prozeß in dem Zustand a_j befindet, dann sehr nahe w_j sein, wenn P regulär ist.

Wir sahen, daß der Tatsache, daß bei einem Prozeß voneinander unabhängiger Versuche p die Wahrscheinlichkeit für ein gegebenes Ergebnis d ist, durch das Gesetz der großen Zahl eine andere Interpretation gegeben werden kann: Bei einer großen Anzahl von Versuchen ist der Bruchteil der Ergebnisse, bei dem a erscheint, ungefähr p, und die Annäherung an p wird desto besser, je größer die Anzahl der durchgeführten Versuche wird. Für eine reguläre Markovsche Kette spielen die Koeffizienten des Vektors w die analoge Rolle, d. h. der Anteil, wie oft sich die Kette im Zustand a_i befindet, nähert sich ohne Rücksicht auf den Ausgangszustand w_i an.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Wir wollen $p^{(0)} = (0{,}1,\ 0{,}9)$ wählen und sehen, wie sich $p^{(n)}$ ändert. Benutzen wir das P aus dem obigen Beispiel, so erhalten wir für $p^{(1)} = (0{,}5167,\ 0{,}4833)$, $p^{(2)} = (0{,}5861,\ 0{,}4139)$ und $p^{(3)} = (0{,}5977,\ 0{,}4023)$. Erinnern wir uns daran, daß $w = (0{,}6,\ 0{,}4)$ ist, so sehen wir, daß sich diese Vektoren w nähern.

Beispiel 2. Wir wollen als Beispiel die Formeln für den Fixpunkt einer 2×2 Übergangsmatrix mit positiven Koeffizienten ableiten. Eine solche Matrix hat die Form

$$S = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

wobei $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$. Da S regulär ist, hat S nur einen einzigen durch den Wahrscheinlichkeitsvektor $w = (w_1, w_2)$ festgelegten Fixpunkt. Seine Koeffizienten müssen den Gleichungen

$$w_1(1-a) + w_2 b = w_1$$
$$w_1 a + w_2(1-b) = w_2$$

genügen.

Jede dieser Gleichungen kann auf die einfache Gleichung $w_1 a = w_2 b$ reduziert werden. Diese Gleichung wiederum hat unendlich viele Lösungen. Da jedoch w ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist, muß gleichzeitig $w_1 + w_2 = 1$ gelten, und durch die neue Gleichung erhalten wir den Punkt $[b/(a+b)\ a/(a+b)]$ als den einzigen Fixpunkt von S.

Beispiel 3. Nehmen Sie an, der Bundeskanzler erzähle einer Person A, daß er die Absicht habe, bei der nächsten Wahl wiederum zu kandidieren oder nicht. A leite dann diese Nachricht an B weiter, der sie wiederum an C weitergebe usw. Nehmen Sie an, es bestehe eine Wahrscheinlichkeit $p > 0$ dafür, daß irgendeine Person die Nachricht, wenn sie sie erhält, ins Gegenteil verwandele, ehe sie sie weitergibt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht nun dafür, daß der n-ten Person erzählt wird, daß der Bundeskanzler kandidiert? Wir können dies als eine Markovsche Kette mit zwei Zuständen betrachten, die durch „Ja" und „Nein" dargestellt werden. Der Prozeß befindet sich dann im Zustand „Ja", wenn der n-ten Person erzählt wird, daß der Kanzler wieder kandidieren wolle. Er befindet sich im Zustand „Nein", wenn der Person erzählt wird, daß der

Kanzler nicht wieder kandidiere. Es ergibt sich also die folgende Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Ja} \\ \text{Nein} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Ja} & \text{Nein} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \end{array}.$$

Die Matrix P^n gibt dann die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß der n-ten Person eine bestimmte Nachricht unter der Voraussetzung erzählt wird, daß der Bundeskanzler „Ja" (erste Zeile) oder unter der Voraussetzung, daß der Bundeskanzler „Nein" (zweite Zeile) sagte, gegeben wird. Wir wissen, daß sich diese Zeilen w nähern. Mit Hilfe der im letzten Abschnitt ermittelten Formeln können wir $w = (1/2, 1/2)$ bestimmen, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man der n-ten Person „Ja" oder „Nein" erzählt, nähern sich 1/2, unabhängig von der anfänglichen Entscheidung des Kanzlers. Wir können also bei einer großen Personenzahl unabhängig von der wirklichen Entscheidung des Kanzlers erwarten, daß ungefähr die Hälfte davon erzählt bekommt, daß der Kanzler kandidieren wolle, und die andere Hälfte, daß er dies nicht tun wolle.
Nehmen Sie nun an, die Wahrscheinlichkeit a dafür, daß eine Person die Nachricht von einem „Ja" in ein „Nein" abändere, unterscheide sich von der Wahrscheinlichkeit b dafür, daß sie die Neuigkeit von „Nein" in „Ja" ändere. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten wird dann

$$\begin{array}{c} \\ \text{Ja} \\ \text{Nein} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Ja} & \text{Nein} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \end{array}.$$

In diesem Fall ist $w = [b/(a+b), a/(a+b)]$, d. h. es besteht die Wahrscheinlichkeit von ungefähr $b/(a+b)$ dafür, daß der n-ten Person erzählt wird, der Kanzler wolle kandidieren. Nimmt man an, daß n sehr groß sei, so ist diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von der wirklichen Entscheidung des Kanzlers. Für ein großes n können wir in diesem Fall erwarten, daß ungefähr einem Anteil von $b/(a+b)$ erzählt wird, daß der Kanzler kandidieren wolle, und einem Anteil von $a/(a+b)$, daß er dies nicht vorhabe. Der wichtige hierbei zu beachtende Punkt ist, daß aus den von uns gemachten Annahmen folgt, daß nicht der Kanzler die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, daß einer bestimmten Person „Ja" oder „Nein" erzählt wird, sondern die erzählenden Personen selbst, und daß auch die Anteile der beiden Personenkreise auf sie zurückzuführen sind.

Beispiel 4. Wir wollen in diesem Beispiel mit dem Studium des Beispieles 2 des Kapitels 4, Abschnitt 12, fortfahren. Die in diesem Beispiel behandelte erste Annäherung führt zu einer Markovschen Kette mit zwei Zuständen, und die Ergebnisse sind den in Beispiel 1 erhaltenen ähnlich. Die zweite Annäherung führt zu einer Markovschen Kette mit vier Zuständen, deren Übergangswahrscheinlichkeiten durch die folgende Matrix gegeben werden:

$$\begin{array}{c} \\ \text{AA} \\ \text{XA} \\ \text{AX} \\ \text{XX} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{AA} & \text{XA} & \text{AX} & \text{XX} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 1-b & 0 \\ 0 & 1-c & 0 & c \\ 0 & d & 0 & 1-d \end{pmatrix} \end{array}.$$

Wenn a, b, c und d von 0 oder 1 verschieden sind, so enthält diese quadratische Matrix keine Nullen und ist daher regulär. Der festgelegte Wahrscheinlichkeitsvektor wird in der üblichen Weise bestimmt (siehe Übung 18) und ist

$$\left(\frac{bd}{bd+2ad+ca}, \frac{ad}{bd+2ad+ca}, \frac{ad}{bd+2ad+ca}, \frac{ca}{bd+2ad+ca}\right).$$

Beachten Sie, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, sich nach einer großen Anzahl von Schritten im Zustand AX zu befinden, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, sich in dem Zustand XA zu befinden. Dies zeigt, daß im Gleichgewicht ein Wechsel von A nach X gleich wahrscheinlich ist wie ein Wechsel von X nach A.
Auf Grund des festgelegten Vektors können wir die Wahrscheinlichkeit für Käufe von A in der weiteren Zukunft bestimmen. Wir erhalten sie, indem wir die Wahrscheinlichkeit dafür, sich im Zustand A zu befinden, und dafür, sich im Zustand XA zu befinden, addieren. Wir erhalten dann

$$\frac{bd + ad}{bd + 2ad + ca}.$$

Beachten Sie, daß wir um die Wahrscheinlichkeit für einen Kauf von A vor einem Kauf eines anderen Gutes zu errechnen, die Wahrscheinlichkeiten für die Zustände AA und AX zu addieren hätten. Daß wir dabei das gleiche Ergebnis erhalten, entspricht der Tatsache, daß Voraussagen für die ferne Zukunft im wesentlichen unabhängig von der speziellen vorausgesagten Zeitspanne sind. Mit anderen Worten, der Prozeß verhält sich, als ob er sich im Gleichgewicht befände.

ÜBUNGEN

1. Welche der folgenden Matrizen sind regulär?

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. [Regulär]

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. [Regulär]

(e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. [Nicht regulär]

(g) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. (h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$. [Nicht regulär]

2. Zeigen Sie, daß die folgende $2 = 2$ Matrix genau dann eine reguläre Übergangsmatrix ist, wenn entweder

$$\text{(i) } 0 < a \times 1 \text{ und } 0 < b < 1;$$
$$\text{(ii) } 0 < a < 1 \text{ und } 0 < b \leqq 1$$

oder

$$S = \begin{pmatrix} 1 - a & a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie den Fixpunkt, der in Übung 2 genannten Matrix für jeden der dort aufgeführten Fälle. (Hinweis: Die meisten der Fälle sind im vorangehenden Text gelöst worden.)

4. Bestimmen Sie den Fixpunkt w für jede der folgenden regulären Matrizen

(a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. [Lös.: $w = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.]

(b) $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. [Lös.: $w = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$.]

5. Es sei $p^0 = (1/2, 1/2)$. Errechnen Sie für die in Übung 4a und 4b genannten Matrizen $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ und $p^{(3)}$. Nähern sie sich den Fixpunkten der Matrizen?

6. Geben Sie für die Bedingung der Regularität eine Interpretation mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

7. Betrachten Sie die Markovsche Kette mit zwei Zuständen und der Übergangsmatrix

$$P = \begin{matrix} \\ a_1 \\ a_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß sich der Prozeß nach n Schritten im Zustand a_1 befindet, wenn er im Zustand a_2 begann? Wird diese Wahrscheinlichkeit für große n unabhängig von dem Ausgangszustand? Ist dies nicht der Fall, so kann das in diesem Abschnitt genannte Theorem nicht gelten. Warum nicht? Hat die Matrix einen eindeutig festgelegten Wahrscheinlichkeitsvektor als Fixpunkt?

8. Beweisen Sie, daß dann, wenn die Spaltensummen einer regulären $3 \cdot 3$ Übergangsmatrix 1 sind, der Wahrscheinlichkeitsvektor (1/3, 1/3, 1/3) der Fixpunkt ist. Nennen Sie ein ähnliches Ergebnis für eine $n \cdot n$ Übergangsmatrix mit Spaltensummen von 1.

9. Errechnen Sie die ersten fünf Potenzen der Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie auf Grund dessen den Vektor des Fixpunktes. Überprüfen Sie dies durch die Errechnung von w.

10. Zeigen Sie, daß alle Übergangsmatrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

mit $0 < a < 1$ den gleichen eindeutigen Fixpunkt haben. [Lös.: $w = (1/2, 1/2)$.]

11. Ein Professor habe drei Lieblingsfragen, von denen er wenigstens eine bei jeder Prüfung stelle. Die Studenten seien mit seinen Gebräuchen gut vertraut. Er stelle niemals die gleiche Frage zweimal hintereinander. Stellte er die Frage 1 das erste Mal, so werfe er eine Münze und stelle die Frage 2, wenn das Wappen erscheint. Stellt er Frage 2, so werfe er zwei Münzen und wechsele dann zu Frage 3 über, wenn bei beiden das Wappen erscheint. Stellt er schließlich Frage 3, so werfe er drei Münzen und gehe dann zu Frage 1 weiter, wenn bei allen dreien das Wappen erscheint. Welche Frage stellt er langfristig gesehen am meisten, und wie häufig wird sie gestellt? [Lös.: Frage 2 in 40% der Fälle.]

12. Ein Professor versuche zu seinen Seminaren nicht zu oft zu spät zu kommen. Verspätet er sich einmal, so sei er nächstes Mal mit 90%iger Wahrscheinlichkeit pünktlich. Erscheint er pünktlich, so bestehe eine Wahrscheinlichkeit von 30%

dafür, daß er sich das nächste Mal verspäte. Wie oft verspätet er sich auf die Länge der Zeit gesehen?

13. Ein bestimmter Landstrich sei wegen des dort herrschenden schlechten Wetters bekannt. Es habe dort noch nie zwei Tage hintereinander die Sonne geschienen. Wenn es an einem Tag schön ist, so regne oder schneie es am nächsten Tag mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Schneit oder regnet es an einem Tag, so bestehe die gleiche Wahrscheinlichkeit dafür, daß es auch am nächsten Tag schneit bzw. regnet. Ändert sich das Wetter, vom Schneien oder Regnen ausgehend, so ändere es sich nur in der Hälfte der Fälle zum schönen hin. Stellen Sie eine Markovsche Kette mit drei Zuständen auf, die diese Situation beschreibt. Bestimmen Sie die langfristige Wahrscheinlichkeit für Schnee, für Regen und für schönes Wetter. An wie vielen Tagen von 100 regnet es in diesem Landstrich?
[Lös.: Die Wahrscheinlichkeiten sind: schön 1/5, Regen 2/5, Schnee 2/5.]

14. Es sei S die Matrix
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Errechnen Sie den eindeutig festgelegten Fixpunkt von S und beweisen Sie unter Zugrundelegung dieses Ergebnisses, daß S nicht regulär ist.

15. Zeigen Sie, daß die Matrix
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
mehr als einen Fixpunkt hat. Bestimmen Sie die Matrix, der sich S^n annähert, und zeigen Sie, daß die Zeilen dieser Matrix nicht alle gleich sind.

16. P sei eine Übergangsmatrix, bei der alle von 0 verschiedenen Werte durch x ersetzt seien. Entwerfen Sie eine Methode, diese Matrix zu potenzieren, um sie auf ihre Regularität hin zu untersuchen. Illustrieren Sie Ihre Methode, indem Sie zeigen, daß
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
regulär ist.

17. Betrachten Sie eine Markovsche Kette, bei der es möglich ist, von jedem Zustand a_i zu jedem Zustand a_j zu kommen, und bei der p_{kk} für wenigstens einen Zustand a_k ungleich 0 ist. Beweisen Sie, daß diese Kette regulär ist. (Hinweis: Betrachten Sie die Fälle, bei denen es möglich ist, von a_i über a_k zu a_j zu gelangen.)

18. Zeigen Sie, daß der in Beispiel 4 gegebene Vektor der Fixpunkt der Übergangsmatrix ist.

9. Absorbierende Markovsche Ketten

In diesem Abschnitt werden wir eine Art Markovscher Ketten betrachten, die sich von den regulären Ketten wesentlich unterscheidet.

Definition. Ein Zustand einer Markovschen Kette wird dann als *absorbierender Zustand* bezeichnet, wenn es unmöglich ist, ihn zu verlassen. Eine Markovsche Kette wird dann als absorbierend bezeichnet, wenn sie 1. über wenigstens einen absorbierenden Zustand verfügt und 2. es möglich ist, von jedem Zustand zu einem absorbierenden Zustand zu gelangen, (wozu mehr als ein Schritt notwendig sein kann).

Beispiel 1. Ein kleines Teilchen bewege sich auf einer bestimmten Linie. Es bewege sich dabei jeweils mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 eine Einheit nach rechts oder eine Einheit nach links. Wir führen nun Beschränkungen der Art ein, daß jeweils, wenn dieses Teilchen eine dieser Grenzen erreicht, es dort verbleibt. Wir wollen als einfaches Beispiel die Zustände 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen. Dabei seien die Zustände 0 und 4 absorbierend. Die Übergangsmatrix ist dann

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Die Zustände 1, 2, 3 sind nicht absorbierend, und man kann von jedem dieser Zustände die absorbierenden Zustände 0 und 4 erreichen. Die Kette ist daher absorbierend.

Sobald ein Prozeß ein absorbierendes Stadium erreicht, wollen wir ihn als *absorbiert* bezeichnen.

Theorem. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Prozeß einer absorbierenden Markovschen Kette absorbiert wird, ist 1.

Wir wollen hier nur auf die grundlegenden Gedankengänge des Beweises dieses Theorems eingehen. Es ist von jedem nicht absorbierenden Zustand a_j möglich, einen absorbierenden Zustand zu erreichen. Es sei nun n_j die minimale Schrittzahl, die notwendig ist, um einen absorbierenden Zustand vom Zustand a_j aus zu erreichen. p_j sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man, ausgehend vom Zustand a_j, einen absorbierenden Zustand innerhalb von n_j Schritten nicht erreichen wird. p_j ist dann kleiner als 1. Wählen wir n als das größte aller n_j und p als das größte aller p_n. Die Wahrscheinlichkeit dafür, innerhalb von n Schritten keinen absorbierenden Zustand zu erreichen, ist dann geringer als p, innerhalb von zwei n Schritten keinen solchen Zustand zu erreichen, kleiner als p^2 usw. Da $p < 1$, nähern sich diese Wahrscheinlichkeiten 0. Wir wollen drei bezüglich absorbierender Markovscher Ketten interessierende Fragen betrachten: a) Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß der Prozeß auf einem gegebenen absorbierenden Zustand endet? b) Wie lange wird es durchschnittlich dauern, bis der Prozeß absorbiert wird? c) Wie oft wird sich durchschnittlich der Prozeß in jedem nicht absorbierenden Zustand befinden? Im allgemeinen werden

die Antworten auf diese Fragen von dem Ausgangszustand des Prozesses abhängen.

Wir wollen nun eine beliebige, absorbierende Markovsche Kette betrachten. Wir numerieren die zu durchlaufenden Zustände so, daß der erste Zustand ein absorbierender ist. Sind r absorbierende und s nicht absorbierende Zustände vorhanden, so hat die Übergangsmatrix die folgende *Normalform*:

$$P = \begin{array}{c} \\ r \\ s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r \text{ Zustände} & s \text{ Zustände} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline R & Q \end{array}\right) \end{array}.$$

E ist hier eine $r \times r$ Einsmatrix, 0 eine $r \times s$ Nullmatrix, R eine $s \times r$ Matrix und Q eine $s \times s$ Matrix. Die ersten r Zustände sind absorbierend, und die letzten s Zustände sind nicht absorbierend.

Wir sahen in Abschnitt 8, daß die Koeffizienten der Matrix P^n die Wahrscheinlichkeiten dafür darstellten, sich, ausgehend von den verschiedenen Zuständen, nach einer bestimmten Zeit in verschiedenen anderen Zuständen zu befinden. Es ist leicht zu zeigen, daß P^n die Form

$$P^n = \begin{pmatrix} E & O \\ * & Q^n \end{pmatrix}$$

hat, wobei der Stern * für die $s \times r$ Matrix in der linken unteren Ecke von P^n steht, die wir hier nicht errechnen wollen. Die Form von P^n zeigt, daß die Koeffizienten von Q^n die Wahrscheinlichkeiten dafür darstellen, sich, ausgehend von jedem möglichen nicht absorbierenden Ausgangszustand, nach n Schritten in jedem der nicht absorbierenden Zustände zu befinden. (Nach 0 Schritten muß sich der Prozeß in dem gleichen nicht absorbierenden Zustand befinden, von dem er ausgeht. Daher ist $Q^n = E$.) Gemäß unserem ersten Theorem nähert sich die Wahrscheinlichkeit, sich nach n Schritten in einem nicht absorbierenden Zustand zu befinden, 0. Daher muß jeder Koeffizient von Q^n für n nach unendlich nach 0 laufen, d. h. $Q^n \to 0$.

Wir wollen nun die unendliche Reihe

$$E + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots$$

betrachten.

Nehmen Sie an, Q wäre eine nicht negative Zahl x anstatt einer nicht negativen Matrix. Um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß $Q^n \to 0$, wählen wir ein x, das kleiner als 1 ist. Es ist dann

$$1 + x + x^2 + \ldots = (1 - x)^{-1}.$$

In Analogie zu dem Theorem 2 aus Abschnitt 7 kann bewiesen werden, daß sich die Matrixreihe in genau der gleichen Weise verhält, d. h.

$$E + Q + Q^2 + \ldots = (E - Q)^{-1}.$$

Die Matrix $(E - Q)^{-1}$ soll die *Ausgangsmatrix* für die gegebene, absorbierende Kette genannt werden. Für sie gilt folgende wichtige Interpretation:

n_{ij} gäbe an, wie oft sich im Mittel die Kette dann im Zustand a_j befindet, wenn sie im Zustand a_i beginnt (wobei a_i und a_j nicht absorbierende Zustände sind). Die Matrix der Koeffizienten n_{ij} sei N. Wir wollen nun zeigen, daß $N = (E - Q)^{-1}$ ist. Ziehen wir nun die ursprüngliche Verteilung in Betracht (bei der 1 für $i = j$ und 0 in allen anderen Fällen galt), so können wir die Gleichung

$$n_{ij} = d_{ij} + \sum_k p_{ik} n_{ki}$$

schreiben, wobei d_{ij} dann 1 ist, wenn $i = j$ gilt und in allen anderen Fällen 0, und wobei $\sum_k$ die Summe aller $p_{ik} n_{ki}$ für alle nicht absorbierenden Zustände bedeutet. Diese Gleichung können wir dann auch in Matrixform schreiben:

$$N = E + QN.$$

Es gilt dann $(E - Q)N = E$ und daher $N = (E - Q)^{-1}$, was zu beweisen war. Wir haben somit eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation unserer Ausgangsmatrix gefunden: Ihre $_{i,j}$ Koeffizienten sind der Mittelwert dafür, wie oft sich die Kette, ausgehend von a_i im Zustand a_j befindet. Auch für die Tatsache, daß $N = E + Q + Q^2 + \ldots$ ist, kann eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation gegeben werden. Da die $_{i,j}$ Koeffizienten von Q^n die Wahrscheinlichkeiten dafür darstellten, sich nach einem Start von a_i nach n Schritten in a_j zu befinden, konnten wir damit auch zeigen, daß das Mittel, wie oft man sich im Zustand a_j befindet, auch als die Summe der Wahrscheinlichkeiten, sich dort nach bestimmten Schritten zu befinden, beschrieben werden kann. Wir haben also die Frage c) wie folgt beantwortet:

Theorem. Es sei $N = (E - Q)^{-1}$ die Ausgangsmatrix für eine absorbierende Kette. Die Koeffizienten von N stellen dann für jeden nicht absorbierenden Ausgangszustand die Mittelwerte dafür dar, wie oft sich die Kette in jedem, nicht absorbierenden Zustand befindet.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Die Übergangsmatrix des Beispieles 1 lautet in ihrer Normalform

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Daraus können wir die Matrix Q ableiten als

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$E - Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln wir hieraus $(E - Q)^{-1}$, so erhalten wir

$$N = (E - Q)^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Das heißt, wenn der Zustand im Prozeß 2 beginnt, befindet er sich im Mittel, einmal vor seiner Absorption in Zustand 1, zweimal im Zustand 2 und einmal im Zustand 3.

Als nächstes wollen wir Frage b) beantworten: Addieren wir alle Koeffizienten einer Zeile, so erhalten wir eine Zahl, die uns angibt, wie oft sich im Mittel der Prozeß bei einem gegebenen Anfangszustand in irgendeinem der nicht absorbierenden Zustände befindet, d. h. die mittlere Zeit, die vergeht, ehe er absorbiert wird. Dies kann wie folgt beschrieben werden:

Theorem. Betrachten Sie eine absorbierende Markovsche Kette mit s nicht absorbierenden Zuständen. c sei ein Spaltenvektor mit s Komponenten, die alle gleich 1 seien. Die Koeffizienten des Vektors $t = Nc$ stellen dann die mittlere Anzahl der Schritte dar, die benötigt werden, um bei jedem möglichen, nicht absorbierenden Ausgangszustand absorbiert zu werden.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Für Beispiel 1 ergibt sich also

$$t = Nc = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

So sind also im Mittel bis zur Absorption beim Ausgang von Zustand 1 drei Schritte nötig, beim Ausgang von Zustand 2 vier Schritte und beim Ausgang von Zustand 3 wiederum drei Schritte. Da der Prozeß notwendigerweise von 2 nach 1 oder 3 läuft, ist es klar, daß dann ein Schritt mehr benötigt wird, wenn man von 1 oder 3 beginnt, als wenn Zustand 2 das Ausgangsstadium ist.

Wir wollen nun Frage a) betrachten, d. h. welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß eine absorbierende Kette in einem bestimmten absorbierenden Zustand endet? Es ist klar, daß die Wahrscheinlichkeit von dem

Ausgangszustand abhängt und nur dann interessant ist, wenn das Ausgangsstadium nicht absorbierend ist. Wie üblich schreiben wir unsere Matrix in der Normalform

$$P = \left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline R & Q \end{array}\right).$$

Theorem. Es sei b_{ij} die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine absorbierende Kette dann im Zustand a_j absorbiert wird, wenn sie im nicht absorbierenden Zustand a_i beginnt. B sei die Matrix mit dem Koeffizienten b_{ij}. Es ist dann

$$B = NR,$$

wobei N die Ausgangsmatrix und R das gleiche wie in der Normalform darstellen.

Beweis. Es sei a_i ein nicht absorbierender Zustand und a_j ein absorbierender Zustand. Errechnen wir b_{ij} als die Möglichkeiten der Ergebnisse nach dem ersten Schritt, so erhalten wir die Gleichung

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_k p_{ik} b_{kj},$$

in der die Summenbildung sich über alle, nicht absorbierenden Zustände a_k erstrecken soll. Schreiben wir dies in Matrixform, so erhalten wir

$$B = R + QB$$
$$(E - Q)B = R.$$

Daraus folgt

$$B = (E - Q)^{-1}R = NR.$$

Beispiel 1 (Fortsetzung). Im ersten Teil des Beispieles 1 fanden wir, daß

$$N = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Aus der Normalform ersehen wir, daß

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist daher

$$B = NR = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Beginnen wir also im Zustand a_1, so besteht die Wahrscheinlichkeit von 3/4 dafür, daß der Prozeß in a_0 absorbiert wird, und die Wahrscheinlichkeit von 1/4 dafür, daß er in a_4 absorbiert wird.

Wir wollen nun unsere Ergebnisse zusammenfassen. Wir haben gezeigt, daß die Antworten auf die Fragen a), b) und c) alle mit Hilfe der Ausgangsmatrix $N = (E - Q)^{-1}$ gegeben werden können. Die Matrix N selbst sagt uns, wievielmal im Mittel ein Prozeß in den einzelnen Zuständen sich befindet, wenn er in einem bestimmten Ausgangszustand beginnt. Der Spaltenvektor $t = Nc$ gibt uns die mittlere Schrittzahl vor der Absorption wiederum in Abhängigkeit vom Ausgangszustand. Die Matrix $B = NR$ gibt uns wiederum in Abhängigkeit vom Ausgangszustand die Wahrscheinlichkeit für eine Absorption in den verschiedenen absorbierenden Zuständen.

ÜBUNGEN

1. Welche der folgenden Übergangsmatrizen gehören zu absorbierenden Ketten?

(a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

(c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[Lös.: (a) und (d).]

2. Betrachten Sie die Übergangsmatrix mit zwei Zuständen

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Für welches a und b erhalten wir eine absorbierende Kette?

3. Nehmen Sie im Beispiel 1 des vorliegenden Abschnittes an, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach rechts 2/3 und für einen Schritt nach links 1/3 sei. Bestimmen Sie N, t und B. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit denen für eine Wahrscheinlichkeit von 1/2 für einen Schritt nach rechts und 1/2 für einen Schritt nach links.

4. Wir wollen die Übergangsmatrix des Beispieles 13, Abschnitt 8, dadurch ändern, daß wir R zum absorbierenden Zustand erklären. Wir erhalten dann

$$\begin{array}{c} \\ R \\ N \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & N & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ermitteln Sie die Ausgangsmatrix N, t und B. Wie können diese Größen interpretiert werden?

5. Bei der Analyse eines Hockeyspieles zwischen den Mannschaften D und P ergaben sich folgende Daten: Befand sich die Scheibe im Zentrum (C), so war die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie als nächstes in das Gebiet der Mannschaft P (P) gespielt wurde, 0,4, und die, daß sie in das Gebiet der Mannschaft D (D) gespielt wurde, 0,6. Von D aus wurde sie mit der Wahrscheinlichkeit von 0,95 nach C zurückgeschlagen, und mit der Wahrscheinlichkeit von 0,05 ging sie ins Tor von Mannschaft D ($\bar{D}$) (ein Punkt für Mannschaft P). Von P aus wurde sie mit der Wahrscheinlichkeit von 0,9 nach C zurückgeschlagen und mit der Wahrscheinlichkeit von 0,1 ins Tor von P ($\bar{P}$) (und damit erhielt Mannschaft D einen Punkt). Ermitteln Sie die Übergangsmatrix dieser Markovschen Kette mit fünf Zuständen, wenn man davon ausgeht, daß die Scheibe nach jedem Tor wieder nach C gebracht wird. Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Mannschaft D gewinnt.
[Lös.: 3/7.]

6. Es werde willkürlich eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ausgewählt. Wird x gewählt, so werde eine weitere Zahl aus der obigen Klasse ganzer Zahlen festgelegt, die weniger oder gleich x ist. Dieser Prozeß werde solange fortgeführt, bis 1 die ausgewählte Zahl ist. Bilden Sie eine Markovsche Kette, indem Sie die jeweils größtmögliche der zu wählenden Zahlen als Zustand annehmen. Zeigen Sie, daß

$$N = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array} + E$$

ist, wobei E die 4×4 Einsmatrix darstellt. Wie groß ist die mittlere Anzahl der Wahlakte?
[Lös.: 25/12.]

7. Stellen Sie unter Benutzung der Übung 6 Vermutungen über die Form der Ausgangsmatrix an, wenn wir mit den ganzen Zahlen von 1 bis n beginnen. Wie hoch wäre die mittlere Zahl der Wahlakte, wenn wir mit den Zahlen von 1 bis 10 begännen?

8. Drei Panzerwagen bekämpfen sich gegenseitig. Der Panzer A zerstöre mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 den Panzerwagen, den er beschießt. Panzer B zerstöre den von ihm beschossenen Wagen mit der Wahrscheinlichkeit von 1/3, und Panzer C zerstöre sein Ziel mit der Wahrscheinlichkeit von 1/6. Die Panzerwagen schießen gleichzeitig, und zwar jeweils nach dem stärksten, noch nicht zerstörten Gegner. Bilden Sie eine Markovsche Kette, indem Sie als Zustände die Panzerwagen wählen, die jeweils bei einem Schußwechsel überleben. Bestimmen Sie N, t, B und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

9. Das folgende Verfahren stellt eine alternative Methode der Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten für eine Absorption in einem bestimmten absorbierenden Zustand

a_j dar. Bestimmen Sie dabei den Spaltenvektor d, dessen j-ter Koeffizient 1 ist und dessen andere absorbierenden Zuständen entsprechenden Koeffizienten 0 sind und für den $Pd = d$ gilt. Es existiert lediglich ein solcher Vektor. Der Koeffizient d_i ist die Wahrscheinlichkeit für eine Absorption in a_j, wenn der Prozeß in a_i beginnt. Bestimmen Sie unter Benutzung dieser Methode für Beispiel 1 dieses Abschnittes die Wahrscheinlichkeit für eine Absorption im Zustand 1.

10. Im folgenden wird eine alternative Methode zur Ermittlung der mittleren Schrittzahl der Absorption dargestellt. t_i sei die mittlere Schrittzahl bis zur Absorption, wenn man im Zustand a_i beginnt. Diese Zahl muß gleichbleiben, wenn man einen Schritt hinzunimmt und dann für jeden nicht absorbierenden Zustand $a_j p_{ij} t_j$ addiert.

a) Nennen Sie Gründe für die obige Behauptung, daß

$$t_i = 1 + \sum_j p_{ij} t_j,$$

wobei sich die Summierung über alle nicht absorbierenden Zustände erstreckt.

b) Ermitteln Sie t für Beispiel 1 dieses Abschnittes.

c) Beweisen Sie, daß die Lösung mit der im Text gefundenen übereinstimmt.

10*. Ein Beispiel aus der Theorie der Warteschlangen

In diesem Abschnitt wollen wir das folgende Problem behandeln: Es treffen Kunden an einer Tankstelle ein, die nur durch einen einzigen Tankwart bedient wird. Der Kunde wird nur dann bedient, wenn der Tankwart frei ist. Ist dieser beschäftigt, so muß sich der Kunde in einer Schlange einreihen. Beispiele solcher Probleme sind Kunden auf einem Postamt, Flugzeuge, die auf einem Flughafen auf die Freigabe zum Abflug warten, vor einem Theater nach Karten anstehende Menschen, Käufer, die am Ausgang eines Selbstbedienungsladens warten, um ihre Waren bezahlen zu können, Mechaniker, die an der Werkzeugausgabe auf Bedienung warten usw.

Um das Problem zu präzisieren, müssen wir genauere Angaben über die Art der Ankunft der Kunden und über die notwendige Bedienungszeit machen. Die diesbezüglich gemachten Annahmen können weit voneinander abweichen. Wir werden hier jedoch nur einen einfachen Satz von Voraussetzungen betrachten. Wir wollen irgendeine passende, möglichst kleine Zeiteinheit wählen und annehmen, daß innerhalb eines Zeitintervalles höchstens ein Kunde eintreffen kann. Wir wollen ferner voraussetzen, daß dann, wenn ein Kunde bedient wird, eine festgelegte Wahrscheinlichkeit r dafür bestehe, daß die Bedienung unabhängig von der Anzahl der bereits für die Bedienung verbrauchten Zeiteinheiten innerhalb eines Zeitintervalles endet. $\bar{p} = 1 - p$ und $\bar{r} = 1 - r$.

Wir wollen dieses Problem mit Hilfe der Theorie der Markovschen Ketten zu lösen versuchen. Wir wollen eine Markovsche Kette dadurch bilden,

daß wir als Zustand die Anzahl der am Anfang eines Zeitintervalls wartenden Personen (einschl. des bedienten Kunden) wählen. Natürlich kann die Schlange nie größer als eine vorher festgelegte Zahl werden. Diese Zahl könnte z. B. die Anzahl der auf der Welt lebenden Menschen sein. Gewöhnlich werden jedoch die Personen dann abgestoßen, wenn die Schlange über ein gewisses Maß hinaus wächst. Dies gilt sicherlich für den Fall der wegen Theaterkarten anstehenden Personen. Dies gilt auch für viele andere Fälle. Wir wollen annehmen, daß n die maximal mögliche Schlangenlänge ist.

Wir werden sehen, daß ein großer Teil des Verhaltens unseres Systemes mit Hilfe einer Größe u, der Verkehrsdichte, beschrieben werden kann. Sie ist das Produkt von p und der mittleren Bedienungszeit eines Kunden. Um die mittlere Bedienungszeit zu bestimmen, machen wir uns zunächst klar, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Bedienung eines Kunden in der j-ten Zeitperiode beendet wird, $\bar{r}^{j-1}\, r$ ist. Die mittlere Bedienungszeit ist dann

$$\begin{aligned} 1 \cdot r + 2 \cdot \bar{r}r + 3 \cdot \bar{r}^2 r + \ldots &= r(1 + 2\bar{r} + 3\bar{r}^2 + 4\bar{r}^3 + \ldots) \\ &= r[(1 + \bar{r} + \bar{r}^2 + \ldots) + (\bar{r} + \bar{r}^2 + \bar{r}^3 + \ldots) \\ &\qquad + (\bar{r}^2 + \bar{r}^3 + \bar{r}^4 + \ldots) + \ldots] \\ &= r\left(\frac{1}{1-\bar{r}} + \frac{\bar{r}}{1-\bar{r}} + \frac{\bar{r}^2}{1-\bar{r}} + \ldots\right) \\ &= r\,\frac{1}{(1-\bar{r})^2} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Die Verkehrsdichte ist also $u = p/r$. Wir wollen annehmen, daß $p \neq r$, d. h. $u \neq 1$ (siehe Übungen 6 bis 9).

Wir benötigen nun noch eine Abmachung bezüglich des Falles einer leeren Schlange. Wir wollen annehmen, daß ein Kunde nicht während der Zeitspanne, während der er eintrifft, bedient wird, selbst dann nicht, wenn die Schlange „leer" ist. Wir verfügen nun über alle nötigen Informationen, um die Übergangswahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Wir wollen drei Fälle bezüglich der in der Warteschlange wartenden Personen betrachten. Die Anzahl der wartenden Personen soll dabei 0 oder zwischen 0 und n oder n sein.

Ist die Schlange gleich 0, so wird sich während der nächsten Zeiteinheit mit der Wahrscheinlichkeit von p eine Person in der Warteschlange befinden und mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{p}$ keine Person.

Ist die Warteschlange nicht 0 und auch nicht gleich ihrer Maximallänge, so kann ihre Länge gleichbleiben, um eins größer oder um eins kleiner werden. Sie wird dann zunehmen, wenn ein neuer Kunde eintrifft, solange ein anderer noch bedient wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $p \cdot \bar{r}$. Die Schlange wird sich verkürzen, wenn die Bedienung eines Kunden abgeschlossen wird, ohne daß ein neuer Kunde eintrifft. Dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{p} \cdot r$. Schließlich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

die Schlange gleichbleibt gleich der Wahrscheinlichkeit, daß keiner der vorigen zwei Fälle eintritt oder $1 - p \cdot \bar{r} - \bar{p} \cdot r$.

Befinden sich n Kunden in der Schlange, so verkürzt sich diese um einen, wenn die Bedienung eines Kunden abgeschlossen wird, und sie bleibt gleich, wenn er weiterhin bedient wird. Hierfür gelten die Wahrscheinlichkeiten r bzw. $\bar{r}$. Jeder in dieser Periode neu eintreffende Kunde würde abgewiesen. Für den Fall von $n = 4$ ergibt sich die folgende Übergangsmatrix

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 & 0 \\ \bar{p}r & 1-\bar{p}r-p\bar{r} & p\bar{r} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}r & 1-\bar{p}r-p\bar{r} & p\bar{r} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}r & 1-\bar{p}r-p\bar{r} & p\bar{r} \\ 0 & 0 & 0 & r & \bar{r} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Um den festgelegten Vektor zu bestimmen, wollen wir uns einer wichtigen Eigenschaft der speziellen Natur unserer Kette bedienen. Die einzelnen Zustände unserer Kette bestehen aus ganzen Zahlen, und der Prozeß kann sich höchstens um eine Einheit pro Schritt fortbewegen. Wir wissen ferner, daß unsere Kette regulär ist (siehe Übung 17, Abschnitt 8). Sie kehrt also immer wieder in den Zustand a_i zurück. Der Bruchteil der Zeit, in der sich die Kette langfristig gesehen in a_i befindet, wird durch w_i gegeben. Der Bruchteil der Zeit, in dem der Prozeß von i nach $i + 1$ fortschreitet, beträgt $w_i p_{i,i+1}$. Von $i + 1$ bewegt sich der Prozeß im Zeitabschnitt $w_{i+1} p_{i+1,i}$. Da jedoch der Prozeß jedesmal, wenn er von i nach $i + 1$ fortgeschritten ist, auch wieder von $i + 1$ nach i zurückkehren muß, müssen diese beiden Bruchteile gleich sein. Es ergibt sich also

$$w_i p_{i,i+1} = w_{i+1} p_{i+1,i} \text{ oder } \frac{w_i}{w_{i+1}} = \frac{p_{i+1,i}}{p_{i,i+1}}.$$

Unter Benutzung dieser Tatsachen können wir den festgelegten Vektor unserer Kette mit fünf Zuständen als

$$w = \frac{r - p}{r\bar{r} - p\bar{p}s^4} (\bar{r}, s, s^2, s^3, \bar{p}s^4)$$

ermitteln, wobei $s = p\bar{r}/r\bar{p}$.

Beispiel 1. Es sei $p = 0{,}25$ und $r = 0{,}50$. Die Übergangsmatrix ergibt sich dann zu

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}375 & 0{,}500 & 0{,}125 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}375 & 0{,}500 & 0{,}125 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}375 & 0{,}500 & 0{,}125 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

und

$$w = \tfrac{1}{107} (54, 36, 12, 4, 1)$$
$$\approx (0{,}505, 0{,}336, 0{,}112, 0{,}037, 0{,}009).$$

Beispiel 2. Es sei $p = 0{,}8$ und $r = 0{,}4$. Die Übergangsmatrix ergibt sich dann zu

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}44 & 0{,}48 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0{,}44 & 0{,}48 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}08 & 0{,}44 & 0{,}48 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

und

$$w = \tfrac{1}{5178}\,6, 60, 360, 2160, 2592).$$
$$\approx (0{,}001, 0{,}012, 0{,}070, 0{,}417, 0{,}501).$$

Die langfristigen Voraussagen, zu denen wir in diesen beiden Beispielen gelangen, unterscheiden sich wesentlich voneinander. Im ersten Beispiel stellen wir fest, daß Personen sehr unregelmäßig weggeschickt würden. Außerdem wäre das Bedienungspersonal die Hälfte der Zeit nicht beschäftigt. Im zweiten Beispiel dagegen würde während der Hälfte der Zeit eine Person abgewiesen, das Bedienungspersonal dagegen wäre fast immer beschäftigt. Aus der Form des festgelegten Vektors sehen wir, daß diese beiden verschiedenen Verhaltenstypen den Fällen $s < 1$ und $s > 1$ entsprechen. Wir wollen nun herausfinden, was diese Bedingungen bezüglich u bedeuten. Wenn

$$\frac{p\bar{r}}{r\bar{p}} < 1$$

dann ist $p\bar{r} < r\bar{p}$ oder $p - pr < r - pr$, d. h. $p < r$ oder $u < 1$. Demnach entspricht $s > 1$ dem Fall $r < p$ oder $u > 1$, d. h. unsere zwei Verhaltenstypen entsprechen den Verkehrsdichten von $<$ oder $>$ als 1.

Wir wollen nun den allgemeinen Fall betrachten, indem wir eine Schlangenlänge von n zulassen. Der festgelegte Vektor für diesen Fall ist

$$w = \frac{r - p}{r\bar{r} - p\bar{p}s^n}\,(\bar{r}, s, s^2, s^3, \ldots, s^{n-1}, \bar{p}s^n).$$

Zwei Komponenten dieses festgelegten Vektors sind für uns besonders interessant. Es sind w_0 und w_n. Der Wert von w_0 gibt uns den Zeitanteil an, den das Bedienungspersonal langfristig gesehen unbeschäftigt sein wird. In der Praxis sollte er nicht zu groß werden. w_n dagegen gibt uns an, wie oft die Schlangenlänge ihr Maximum erreicht hat und daher Kunden abzuweisen sind. Auch dieser Wert sollte möglichst klein gehalten werden. Wir wollen diese Größen für sehr große Werte von n untersuchen. Ist die Verkehrsdichte kleiner als 1 und n genügend groß, dann ist s^n sehr klein. Daher ist auch w_n klein und w_0 ungefähr

$$\frac{r - p}{r\bar{r}} \cdot \bar{r} = 1 - u.$$

Die Verkehrsdichte sagt uns also, wie lange das Bedienungspersonal im Durchschnitt beschäftigt sein wird. Nähert sich u dem Wert 1, so wird

diese Zeit recht klein sein, ist dagegen der Wert für u sehr klein, so wird die Zeit, in der das Bedienungspersonal beschäftigt ist, groß sein. Entsprechend ist dann, wenn die Verkehrsdichte größer als 1 ist und n ebenfalls groß ist, s^n groß, d. h. w_0 wird sehr klein sein, und w_n kann dadurch angenähert werden, daß man $r \cdot \bar{r}$, das im Vergleich zu $p\bar{p}s^n$ klein ist, vernachlässigt. Wir erhalten dann

$$w_n \approx \frac{p-r}{p} = 1 - \frac{1}{u}.$$

Auch hier sagt uns die Verkehrsdichte wiederum, wie oft langfristig gesehen Kunden abgewiesen werden müssen. Nähert sie sich 1, so wird dies selten der Fall sein, ist sie groß, so werden sehr oft welche abgewiesen werden müssen. Daraus können wir schließen, daß dann, wenn n groß ist und wir das Ziel haben, erstens das Bedienungspersonal beschäftigt zu halten und zweitens wenig Personen abzuweisen, u in der Nähe von 1 liegen sollte. Beachten Sie, daß dies fast immer bedeutet, daß die durchschnittliche Wartezeit für einen Kunden ziemlich groß ist (siehe Gleichung 3 unten). Es wird recht schwierig, die Anforderungen, die an ein gut dimensioniertes System zu stellen sind, zu definieren, wenn wir außerdem das Ziel haben, die Wartezeit für die Kunden möglichst klein zu halten (siehe z. B. Kapitel 4 Abschnitt 14, Beispiel 1).

Eine weitere interessante Größe beim Studium von Warteschlangen ist die durchschnittliche Schlangenlänge, die sich einstellt, nachdem sich das System im Gleichgewicht befindet. Mit Hilfe von w erhalten wir die mittlere Schlangenlänge zu

$$\begin{aligned} m &= w_0 \cdot 0 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 2 + \ldots + w_n \cdot n \\ &= \frac{r-p}{r\bar{r} - p\bar{p}s^n}(s + 2s^2 + 3s^3 + \ldots + (n-1)s^{n-1} + n\bar{p}s^n). \end{aligned}$$

Nehmen wir an, daß die Verkehrsdichte kleiner als 1 ist, sich jedoch dem Wert 1 nicht zu sehr nähert, und setzen wir ferner voraus, daß n groß ist, so kann diese Summe durch

$$m \approx \frac{r-p}{r\bar{r}}(s + 2s^2 + 3s^3 + \ldots)$$

angenähert werden.

Unter Benutzung der zur Errechnung der mittleren Bedienungszeit angewandten Methode erhalten wir dann

$$m \approx \frac{r-p}{r\bar{r}} \frac{s}{(1-s)^2} = \bar{p}\frac{u}{1-u}.$$

ÜBUNGEN

Betrachten Sie für die Übungen 1 bis 3 den Fall, daß $n = 4$, $p = 0{,}2$ und $r = 0{,}6$ ist.

1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P und den festgelegten Vektor w. Überprüfen Sie w mit Hilfe von Gleichung (1).

2. Bestimmen Sie den Zeitanteil, den das Bedienungspersonal langfristig frei ist, und den Zeitanteil, in dem Kunden abgewiesen werden.
3. Bestimmen Sie die mittlere Schlangenlänge bei Gleichgewicht und vergleichen Sie sie mit Gleichung (3).
4. Bestimmen Sie die mittlere Schlangenlänge (Gleichgewicht) für den Fall von $p = 0{,}25$ und $r = 0{,}50$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit Gleichung (3).
5. Nennen Sie gefühlsmäßige Argumente, die zeigen, daß die mittlere Schlangenlänge sich dann n nähert, wenn u bedeutend größer als 1 ist. Überprüfen Sie dies im Falle von $p = 0{,}8$ und $r = 0{,}4$.

   Die Übungen 6 bis 9 seien auf den Fall $u = 1$, $n = 4$ bezogen.

6. Stellen Sie unter Benutzung der Tatsache, daß $p = r$ ist, P auf.
7. Ermitteln Sie den festgelegten Vektor w. Welche Form wird w für allgemeine n haben, wenn $u = 1$ ist?

   [Lös.: $w = \dfrac{1}{n - 1 + 2\bar{p}}\,(\bar{p}, 1, \ldots, 1, \bar{p})$.]
8. Bestimmen Sie den Zeitanteil, in dem das Bedienungspersonal langfristig gesehen frei ist, und den Zeitanteil, in dem die Schlange ihr Maximum erreicht hat.
9. Bestimmen Sie die mittlere Schlangenlänge im Gleichgewicht. [Lös.: $m = 1/2n$.]
10. Vergleichen Sie die Ergebnisse für die Fälle a) $p = 0{,}25$, $r = 0{,}50$; b) $p = 0{,}8$, $r = 0{,}4$; c) $p = r = 0{,}50$. Welcher Fall scheint am zufriedenstellendsten?
    Hängt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Bedienung eines Kunden innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls beendet wird, von der Anzahl der bereits für seine Bedienung aufgewandten Zeiteinheiten ab, so bildet die Schlangenlänge zu den verschiedenen Zeitpunkten keine Markovsche Kette mehr. Wird jedoch die Schlange nur an den Punkten betrachtet, an denen die Bedienung eines Kunden endet, so erhalten wir wiederum eine Markovsche Kette. Die verbleibenden Übungen beziehen sich auf eine solche Kette, bei der die Bedienungszeit für jeden Kunden konstant zwei Zeiteinheiten beträgt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Kundenankunft beträgt wie vorher pro Zeiteinheit p.
11. Zeigen Sie, daß die Übergangsmatrix

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \bar{p}^2 & 2p\bar{p} & p^2 & 0 & 0 \\ \bar{p}^2 & 2p\bar{p} & p^2 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}^2 & 2p\bar{p} & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}^2 & 2p\bar{p} & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

    ist, wenn die maximale Schlangenlänge 4 beträgt.
12. Beweisen Sie, daß der festgelegte Vektor

$$w = \frac{1 - s}{1 - 2ps^3}\,(\bar{p}^2, 1 - \bar{p}^2, s, s^2, \bar{p}^2 s^3)$$

    ist, wobei $s = (p/\bar{p})^2$.
13. Welche Form hat die Übergangsmatrix für den allgemeinen Fall mit einer maximalen Schlangenlänge von n? Zeigen Sie, daß der festgelegte Vektor

$$w = \frac{1 - s}{1 - 2ps^{n-1}}\,(\bar{p}^2, 1 - \bar{p}^2, s, s^2, \ldots, s^{n-2}, \bar{p}^2 s^{n-1})$$

    ist, wobei $s = (p/\bar{p})^2$.

14. Bestimmen Sie die Verkehrsdichte. Für welchen Wert von r erhalten wir in dem in diesem Abschnitt bereits diskutierten Modell die gleiche Verkehrsdichte?

15. Zeigen Sie, daß der Zeitabschnitt, in dem das Bedienungspersonal langfristig beschäftigt ist, sich wiederum u nähert, wenn $u < 1$ und n genügend groß ist.

11*. Kontokorrentkonten

In diesem Abschnitt wollen wir einige wirkliche Daten der Geschichte der Kontokorrentkonten eines bestimmten Kaufhauses analysieren.

Ein gegebener Kunde mag im Laufe von Monaten Waren beziehen, die er erst einige Monate später bezahlt. Unser Geschäft solle seine Konten nach der „ältesten, nicht bezahlten Rechnung" klassifizieren. Wir wollen dies am einfachsten an Hand eines Beispieles erklären. Nehmen Sie an, ein bestimmter Kunde habe drei Rechnungen noch nicht bezahlt, von denen eine zwei Monate alte über 30 DM laute, eine drei Monate alte über 50 DM und eine fünf Monate alte Rechnung über 16 DM. Sein Konto wird dann als „fünf Monate alt" klassifiziert. Bezahlt er nun 10 DM, so wird dies mit seiner ältesten Rechnung verrechnet, was jedoch nichts an der Klassifikation seines Kontos ändert, da er noch weitere 6 DM zur Begleichung seiner fünf Monate alten Rechnung schuldet. Zahlt er jedoch wenigstens 16 DM, so wird das Konto als „drei Monate alt", zahlt er wenigstens 66 DM, so wird es als „zwei Monate alt" und zahlt er 96 DM, so wird es als „ausgeglichen" klassifiziert. Jedes Konto, das Rechnungen enthält, die älter als sechs Monate sind, werde als „dubios" bezeichnet.

Wir können nun den Wechsel im Status irgendeines Kontos als einen stochastischen Prozeß betrachten. Bis das Konto ausgeglichen wird, gehört es einem der sechs Stadien, 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 Monate alt, an (ein null Monate altes Konto enthält nur Rechnungen, die jünger als einen Monat sind). Das Konto kann auf einmal höchstens einen Schritt älter werden, da die Verbindlichkeiten innerhalb eines Monats nur einen Monat älter werden können, es kann jedoch in seiner Wertigkeit gleichbleiben oder mehrere Schritte (Monate) jünger werden. Das Konto kann auf zwei verschiedene Weisen ausgeglichen werden: Entweder werden die Schulden beglichen, oder sie werden als dubios abgeschrieben. Das erste kann zu jeder Zeit geschehen, während das letztere nur auf ein Konto angewandt werden kann, das vorher fünf Monate alt war.

Lassen Sie uns annehmen, daß es vernünftig sei, diesen stochastischen Prozeß als eine Markovsche Kette zu analysieren. Er bildet dann eine absorbierende Kette mit den sechs nicht absorbierenden Stadien 0, 1, 2, 3, 4

und 5 und den beiden absorbierenden Stadien I (ausgeglichen) und II (dubios). Die Übergangswahrscheinlichkeiten für unsere Konten ergaben sich bei einer über eine gewisse Zeitspanne verlaufenden Beobachtung wie folgt:

$$P = \begin{array}{c|cc|cccccc} & \text{I} & \text{II} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \text{I} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{II} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}21 & 0 & 0{,}67 & 0{,}21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}14 & 0 & 0{,}19 & 0{,}44 & 0{,}23 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0{,}13 & 0 & 0{,}08 & 0{,}20 & 0{,}36 & 0{,}23 & 0 & 0 \\ 3 & 0{,}11 & 0 & 0{,}01 & 0{,}04 & 0{,}17 & 0{,}29 & 0{,}38 & 0 \\ 4 & 0{,}15 & 0 & 0{,}02 & 0 & 0{,}09 & 0{,}20 & 0{,}42 & 0{,}12 \\ 5 & 0{,}08 & 0{,}21 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}11 & 0{,}46 \end{array}.$$

Mit Hilfe einer Rechenmaschine können wir die folgenden angenäherten Größen errechnen:

$$N = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3{,}68 & 0{,}94 & 0{,}40 & 0{,}16 & 0{,}11 & 0{,}03 \\ 1 & 1{,}80 & 2{,}60 & 1{,}10 & 0{,}45 & 0{,}31 & 0{,}07 \\ 2 & 1{,}33 & 1{,}20 & 2{,}34 & 0{,}97 & 0{,}66 & 0{,}15 \\ 3 & 0{,}86 & 0{,}74 & 1{,}08 & 2{,}24 & 1{,}53 & 0{,}34 \\ 4 & 0{,}73 & 0{,}55 & 0{,}85 & 1{,}07 & 2{,}53 & 0{,}56 \\ 5 & 0{,}47 & 0{,}39 & 0{,}46 & 0{,}67 & 0{,}82 & 2{,}04 \end{array}.$$

$$t = \begin{array}{c|c} 0 & 5{,}33 \\ 1 & 6{,}32 \\ 2 & 6{,}65 \\ 3 & 6{,}80 \\ 4 & 6{,}29 \\ 5 & 4{,}85 \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c|cc} & \text{I} & \text{II} \\ 0 & 0{,}995 & 0{,}005 \\ 1 & 0{,}99 & 0{,}01 \\ 2 & 0{,}97 & 0{,}03 \\ 3 & 0{,}93 & 0{,}07 \\ 4 & 0{,}88 & 0{,}12 \\ 5 & 0{,}57 & 0{,}43 \end{array}.$$

Die Interpretation von t liegt auf der Hand: Es ist die mittlere Anzahl von Monaten, die vergehen, ehe das Konto auf die eine oder andere Weise ausgeglichen wird. Es ist interessant festzustellen, daß alle diese Zeiten ungefähr fünf oder sechs Monate betragen und daß erstaunlich wenig Abweichungen davon auftreten.

Die Interpretation von B ist gleichfalls interessant: Wir wollen uns die Wahrscheinlichkeiten für eine Absorption im Stadium II, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Schuld als dubios abgeschrieben wird, ansehen. Es überrascht nicht, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie sich als dubios herausstellt je größer wird, desto älter die Schuld wird. Es ist jedoch interessant festzustellen, wie schnell die Wahrscheinlichkeit mit dem Alter der Schuld ansteigt.

Wir wollen dieses Beispiel dazu benutzen, eine neue Anwendung der N Matrix zu illustrieren. Sie basiert auf den folgenden Ergebnissen: Nehmen Sie an, eine Anzahl von Individuen beginne in einer Markovschen Kette in verschiedenen Stadien. Wir führen dann nach einem Schritt neue Individuen ein usw. Auf jeder Stufe gibt es also die bereits vorher vorhandenen Individuen (wenn sie nicht absorbiert worden sind) und eine gewisse Anzahl neuer. Wir sind nun an der Anzahl, der langfristig gesehen, in einem bestimmten Stadium vorhandenen Personen interessiert.

Theorem. P sei eine absorbierende Kette und Q ihr nicht absorbierender Teil. Nehmen Sie an, daß sich zum Zeitpunkt 0 z_i Elemente im Stadium i befinden. Bei allen zukünftigen Schritten x_i werden Elemente im Stadium i zugefügt. Führen wir nun die Vektoren x, y, z mit den Komponenten x_i, y_i, z_i ein, so gilt folgende Aussage:

1. Die mittlere Anzahl der Elemente, die sich im Stadium i befinden, nähert sich y_i an, wobei $y = xN$ ist. Dies gilt unabhängig von z.
2. $z = y$ ist die einzige Ausgangsverteilung, bei der sich das System im Gleichgewicht befindet.

Beweis. Es sei $z^{(n)}$ die Verteilung nach n Schritten. Es ist dann $z^{(n+1)} = z^{(n)}Q + x$. Daher gilt $z^{(1)} = zQ + x, z^{(2)} = zQ^2 + x(E + Q)$ usw. Es ist also $z^{(n)} = zQ^n + x(E + Q + \ldots + Q^{n-1})$.

Da sich Q^n 0 annähert, gilt das gleiche für zQ^n. Die Reihe $E + Q + \ldots + Q^{n-1}$ konvergiert dann nach N, da $z^{(n)}$ sich xn annähert. Damit wäre der erste Teil des Theorems bewiesen.

Ein System befindet sich dann im Gleichgewicht, wenn $z^{(1)} = z$ (und daher alle $z^{(n)}$ gleich sind). Das bedeutet, daß

$$z = zQ + x \text{ oder } z(E - Q) = x.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $N = (E - Q)^{-1}$, so sehen wir, daß sie äquivalent zu $z = xN$ ist. Damit ist auch der zweite Teil des Theorems bewiesen.

Wir wollen annehmen, daß in unserem Geschäft jeden Monat m neue Konten eröffnet werden. Genauer gesagt ist m die Anzahl der Kunden, die auf Kredit kaufen, ohne bereits vorher eine Anzahlung geleistet zu haben, da in unserem Modell ein neuer Kreditkauf, sobald das Konto ausgeglichen war, wie die Eröffnung eines neuen Kontos anzusehen ist. Es ist dann $x = (m,0,0,0,0,0)$. Gemäß unseres Theorems wird die Verteilung der Konten unabhängig von der jetzigen Verteilung langfristig gesehen sich $xN = mN_1$ annähern, wobei N_1 die erste Zeile der N Matrix darstellt. Werden also jeden Monat 1000 neue Konten eröffnet, so wird die langfristige Verteilung in groben Zügen der in Abb. 9 gegebenen entsprechen. Die Gesamtzahl der laufenden Konten wird langfristig deren Summe oder ungefähr 5320 sein.

Alter in Monaten	0	1	2	3	4	5
Kontenzahl	3680	940	400	160	110	30

Abb. 9

Da man erwarten kann, daß ein neues Konto eine Lebenszeit von durchschnittlich 5,33 Monaten (siehe t) hat, würden wir 1000×5330 Konten erwarten. Dies stimmt, wenn man von dem Aufrundungsfehler absieht. Entsprechend können wir aus B ersehen, daß ungefähr 995 Konten monatlich ausgeglichen werden und daß 5 als dubios erklärt werden müssen.

Darüber hinaus ist die in Abb. 9 gezeigte Verteilung eine (angenäherte) Gleichgewichtsverteilung für unser Modell, d. h. wenn die jetzige Verteilung genau $y = xN$ sein sollte und jeden Monat 1000 neue Konten eröffnet werden, so wird die Kontenzahl eines gegebenen Fälligkeitsalters in der Zukunft die gleiche sein wie jetzt.

Wir wollen nun untersuchen, was wir über den Betrag des in den Konten gebundenen Geldes aussagen können. Das Geschäft stelle durch längere Beobachtung fest, daß Konten mit einer Fälligkeit von 0 oder 1 Monat durchschnittlich 40 DM enthalten, mit zwei oder drei Monaten durchschnittlich 60 DM und ältere Konten durchschnittlich 80 DM. Gewichten wir y mit diesen Beträgen, so finden wir, daß die Geldbeträge, die langfristig in den Konten der verschiedensten Fälligkeiten gebunden sind,

(147.2, 37.6, 24, 9.6, 8.8, 2.4) -tausend DM betragen.

Das Unternehmen wird also langfristig gesehen über 229600 DM Forderungen verfügen. Multipliziert man diesen Vektor mit R, so erhält man (41864, 504). Hierbei gibt uns die erste Zahl den Wert der Konten, die monatlich ausgeglichen werden, während die zweite Zahl den durchschnittlichen Betrag der Forderungen angibt, die monatlich als dubios abgeschrieben werden müssen.

ÜBUNGEN

Die Übungen 1 bis 6 beziehen sich auf das folgende Modell: Ein Einzelhandelsgeschäft gewährt seinen Kunden kurzfristigen Kredit. Es klassifiziert die Konten der Kunden nach der ältesten nicht bezahlten Rechnung. Enthält das Konto jedoch eine mehr als drei Monate alte, nicht bezahlte Rechnung, so tritt das Geschäft die Forderungen an eine Inkassoagentur ab. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir annehmen, daß dann, wenn ein Kunde bezahlt, er sein Konto ausgleicht. Die Erfahrung zeigt, daß eine Wahrscheinlichkeit von 1/2 dafür besteht, daß ein laufendes Konto ausgeglichen wird, eine Wahrscheinlichkeit von 1/3 dafür, daß ein einen Monat altes Konto ausgeglichen wird, und eine Wahrscheinlichkeit von 1/4, daß ein zwei Monate altes Konto ausgeglichen wird.

1. Stellen Sie die Übergangsmatrix auf. [Hinw.: Es gibt drei nicht absorbierende und zwei absorbierende Stadien.]

2. Errechnen Sie N, t und B und interpretieren Sie die letzten zwei.

3. Nehmen Sie an, daß jeden Monat 210 neue Konten eröffnet werden. Welche langfristige Verteilung werden die Konten haben? Wie viele werden monatlich ausgeglichen und wie viele an eine Inkassoagentur abgetreten?
[Teillös.: Durchschnittlich werden 157,5 ausgeglichen und 52,5 abgetreten.]

4. Nehmen Sie an, wir modifizieren die grundlegende Voraussetzung, daß ein Kunde jeweils die Gesamtschuld bezahle. Wir wollen statt dessen annehmen, daß er jeden Monat neue Verbindlichkeiten eingeht und daß es gleich wahrscheinlich ist, daß er jeden Monat sein Konto ganz ausgleicht oder nur die Schulden des jeweils ältesten Monats bezahlt (wobei das „Alter" des Kontos im nächsten Monat das gleiche wäre). Stellen Sie die neue Übergangsmatrix auf.

5. Errechnen Sie N, t und B für die Übergangsmatrix von Übung 4. Interpretieren Sie t und B.

6. Nehmen Sie in Übung 4 wiederum an, daß monatlich 210 neue Konten eröffnet würden. Bestimmen Sie die langfristige Verteilung der Konten, die Anzahl der monatlich ausgeglichenen und die Anzahl der monatlich an Inkassoagenturen abgetretenen.
[Teillös.: Durchschnittlich werden 114 ausgeglichen und 96 abgetreten.]

7. Nehmen Sie an, P sei eine absorbierende Markovsche Kette. Wir bewegen uns gemäß den Übergangswahrscheinlichkeiten vom einen Stadium zum anderen und erhalten eine Belohnung von f_i, wenn wir im Stadium i ankommen. Nehmen Sie an, Sie erhielten auf allen Stufen eine solche Belohnung (einschl. der Ausgangsposition). Zeigen Sie, daß der erwartete, erhaltene Betrag vor Erreichung des absorbierenden Stadiums g_i ist, wenn wir im Stadium i beginnen, die Spaltenvektoren f und g mit den Komponenten f_i und g_i benutzen und $g = Nf$ ist.

Die Übungen 8 bis 12 beziehen sich auf das folgende Modell: Ein Geschäftsmann kaufe einen Laden. Die damit zu erzielenden Gewinne schwankten von Monat zu Monat. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir annehmen, daß er entweder 5000 DM oder 2000 DM im Monat verdiene. Der Mann könne seinen Laden zu jedem Zeitpunkt verkaufen, und es bestehe eine 10%ige Chance, ihn qährend eines gewinngünstigen Monats zu verkaufen, und eine Chance von 40%, ihn während eines Monats zu verkaufen, in dem der Gewinn niedrig ist. Verkauft er das Geschäft nicht, so werden die Gewinne mit der Wahrscheinlichkeit von 2/3 im nächsten Monat die gleichen sein, und mit der Wahrscheinlichkeit von 1/3 werden sie sich ändern.

8. Stellen Sie die Übergangsmatrix auf. [Hinw.: Es gibt zwei nicht absorbierende und einen absorbierenden Zustand.]

9. Errechnen Sie N, t und B. Interpretieren Sie t und B.

10. Bestimmen Sie den Vektor f (siehe Übung 7) und errechnen Sie g. Interpretieren Sie die beiden Komponenten.

11. Nehmen Sie an, der Geschäftsmann ändere seine Strategie und verkaufe seinen Laden während eines gewinngünstigen Monats mit der Wahrscheinlichkeit von 40% und während eines ungünstigen Monats mit der Wahrscheinlichkeit von 10%. Welchen Einfluß hat dies auf die Antworten der Übungen 8 bis 10?

12. Wie muß sich der Gewinn von 5000 DM in Übung 11 ändern, damit der erwartete Gewinn der gleiche ist, unabhängig davon, ob er mit einem gewinngünstigen oder gewinnungünstigen Monat beginnt?

Die verbleibenden Übungen beziehen sich auf das folgende Problem: Eine kleine Universität stelle zur Erlangung eines Diploms folgende Anforderungen: Es müsse ein Studium von vier Jahren nachgewiesen werden und eine angeforderte Diplomarbeit müsse den Ansprüchen der Universität genügen. Einige der Studenten seien in der Lage, ihre Diplomarbeit am Ende des vierten Jahres fertigzustellen, während andere dazu ein weiteres Jahr benötigten. Jedes Jahr verließen einige der Studenten die Universität, und weiterhin müsse jeder Student die Universität verlassen, der seine Arbeit nicht bis zum Ende des fünften Jahres abgeschlossen hat. Die Wahrscheinlichkeiten für die Rückkehr oder das Ausscheiden eines gegebenen Studenten werde für die einzelnen Jahre, wie im folgenden angegeben, geschätzt:

	1	2	3	4	5	V	D
1	0	0,8				0,2	0
2		0	0,7			0,3	0
3			0	0,9		0,1	0
4				0	0,1	0,1	0,8
5					0	0,2	0,8

13. Stellen Sie das Problem in Form einer absorbierenden Markovschen Kette mit zwei absorbierenden Stadien dar. Bestimmen Sie Q und R.

14. Bestimmen Sie direkt Q^2, Q^3 und Q^4, zeigen Sie, daß $Q^5 = 0$. Beweisen Sie, daß $N = E + Q + Q^2 + Q^3 + Q^4$, errechnen Sie N.

15. Errechnen Sie t und B. Interpretieren Sie diese beiden.

16. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dafür, daß ein mit dem Studium beginnender Student dieses erfolgreich abschließt? Welche Zeit befindet er sich im Durchschnitt an der Universität? [Lös.: 0,444; 2,91 Jahre.]

12*. Weitere Anwendungen Markovscher Ketten

Beispiel 1. Die im letzten Abschnitt beschriebenen Techniken können auch bei der Lösung von Auslastungsproblemen in Produktionsgesellschaften angewandt werden. Wir wollen das an Hand einer kleinen Gesellschaft mit vier Angestellten, einem Präsidenten, einem Vizepräsidenten und mit je einer Sekretärin illustrieren. Wir wollen annehmen, daß irgendeine Arbeit in der Firma zu erledigen sei, und wir wollen den Weg verfolgen, den sie durch die Gesellschaft macht. Kommt die Arbeit auf einen speziellen Angestellten zu, so könne er sie entweder selbst ausführen oder sie an einen anderen Angestellten weitergeben. Wir wollen ebenso die Möglichkeit zulassen, daß die Aufgabe zur Seite gelegt werden kann und nie ausgeführt wird.
Halten wir uns wiederum an das Modell einer Markovschen Kette, so haben wir vier nicht absorbierende Stadien, entsprechend den vier Angestellten P, V, PS, VS, und zwei absorbierende Stadien I (ausgeführt) und II (zur Seite gelegt). Die Natur der Arbeit mache es gleich wahrscheinlich, daß der Präsident sie an seine Sekretärin oder den Vizepräsidenten weitergibt. Der Vizepräsident wiederum habe die Angewohnheit, 3/4 seiner Arbeit an seine Sekretärin weiterzugeben. Für den Rest der Arbeit bestehe die gleiche Wahrscheinlichkeit, getan oder zur Seite gelegt zu werden. Jede der Sekretärinnen führe 3/8 ihrer Arbeit selbst aus, lege 1/8 zur Seite und teile den Rest gleich-

mäßig in zwei Teile auf, von denen sie einen der anderen Sekretärin und den anderen an ihren Chef zum Zwecke weiterer Instruktionen sende. Die sich daraus ergebenden R und Q Matrizen sind

$$R = \begin{array}{c} \\ P \\ V \\ PS \\ VS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \end{array}, \qquad Q = \begin{array}{c} \\ P \\ V \\ PS \\ VS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & V & PS & VS \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Daraus erhalten wir:

$$N = \begin{array}{c} \\ P \\ V \\ PS \\ VS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & V & PS & VS \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}075 & 1{,}3 & 0{,}3 & 1{,}05 \\ 0{,}325 & 0{,}3 & 1{,}3 & 0{,}55 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 1{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$t = \begin{array}{c} \\ P \\ V \\ PS \\ VS \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 2{,}725 \\ 2{,}475 \\ 2{,}3 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c} \\ P \\ V \\ PS \\ VS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}67 & 0{,}33 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \\ 0{,}725 & 0{,}275 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Wir können auch hier wieder eine direkte Interpretation von t und B geben. Erteilen wir der Gesellschaft einen Auftrag, so ist es am sichersten, ihn der Sekretärin des Präsidenten zuzuleiten, und es besteht die geringste Wahrscheinlichkeit dafür, daß er ausgeführt wird, wenn wir ihn dem Vizepräsidenten übergeben. Die Ausführung des Auftrages geht jedoch am schnellsten, wenn wir ihn einer der Sekretärinnen übergeben, und sie dauert am längsten, wenn wir sie direkt an den Präsidenten senden.
Wir wollen nun annehmen, daß täglich 60 zu bearbeitende Vorgänge eingehen und davon 2/3 an die Sekretärin des Präsidenten und der Rest an die Sekretärin des Vizepräsidenten gegeben werden. Es ist also $x = (0, 0, 40, 20)$. Wir erhalten also

$$y = xN = (15, 20, 60, 50).$$

Dies ist eine ziemlich realistische Arbeitsverteilung für eine kleine Gesellschaft. Wir sollten besonders beachten, daß die Sekretärin des Präsidenten, obwohl sie sich vielleicht darüber beschweren mag, daß sie jeden Morgen zweimal soviel Arbeit bekommt wie die andere Sekretärin, am Ende des Tages fast genausoviel Arbeit zu erledigen hat wie die Sekretärin des Vizepräsidenten.
Die gesamte Arbeitsbelastung, gemessen in bearbeiteten Vorgängen mal der Anzahl der von ihnen berührten Personen, ist die Summe der Komponenten von y oder 145. Die gleiche Antwort erhalten wir, wenn wir xp errechnen. Die Komponenten von xB = (43,7, 16,3) zeigen uns, daß ungefähr 44 der Aufgaben erledigt werden, während 16 im Durchschnitt pro Tag zur Seite gelegt werden.
Nehmen Sie nun an, die Gesellschaft möchte die Arbeitsbelastung neu verteilen, indem sie kontrolliert, durch wen die 60 Vorgänge erledigt werden. Mit anderen Worten, die Gesellschaft möchte y spezifizieren und daraufhin ein x bestimmen (unter der Bedingung, daß $xc = 60$). Da $y = xN$, muß gelten $x = y(E - Q)$. Durch die obige Begrenzung erhalten wir

$$xc = y(E - Q)c = 60.$$

Setzen wir $h = (E - Q)c$, so kann die Gesellschaft jede Arbeitsverteilung anstreben, die der Bedingung $yh = 60$ genügt. In unserem Beispiel wäre das

$$h = (E - Q)c = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir an, unsere Gesellschaft entschiede sich für eine vollständig *gleichmäßige* Arbeitsverteilung, so daß y die Form $y = (a,a,a,a)$ hat. Unter Beachtung der obigen Begrenzung erhalten wir $(5/4)a = 60$ oder $a = 48$, d. h. jeder Angestellte wird eine Belastung von 48 haben. Das ergibt

$$x = y(E - Q) = (36, 12, 12, 0).$$

60% der Arbeit sollte also beim Präsidenten eingehen und je 20% bei seiner Sekretärin und dem Vizepräsidenten.

Beispiel 2. Wir wollen nun die Wechsel im benötigten Personal einer gegebenen Abteilung in der Großindustrie studieren. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir lediglich untersuchen, ob diese Anforderungen steigen, fallen oder während eines gegebenen Jahres gleichbleiben. Dies führt zu einer regulären Markovschen Kette mit drei Zuständen, die durch die drei Möglichkeiten +, — und 0 dargestellt werden.
In unserer speziellen Industrie bestehe eine feste Wahrscheinlichkeit p dafür, daß der Trend des letzten Jahres andauern wird. Außerdem verbiete der Präsident der Gesellschaft einer Abteilung, eine Veränderung in dem einen Jahr vorzunehmen, die sie im nächsten Jahr widerruft. Unsere Übergangsmatrix hat dann die Form

$$P = \begin{array}{c} \\ + \\ 0 \\ - \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & 0 & - \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ r & p & s \\ 0 & q & p \end{pmatrix} \end{array}, \quad p + q = 1, \quad p + r + s = 1.$$

Daher ist insbesondere $q = r + s$. Es ist nun nicht schwierig, den Fixpunkt als $w = (r/2q, 1/2, s/2q)$ zu ermitteln.
Die Komponenten des Fixpunktes geben uns den langfristigen Durchschnitt für die Anzahl der Jahre an, für die ein bestimmter Trend erhalten bleibt. Es ist interessant festzustellen, daß wir voraussagen können, daß in der Hälfte der Jahre das Personal unverändert bleiben wird, obwohl die Zahlen p, q, r und s noch nicht spezifiziert worden sind.
Kennen wir den durchschnittlichen Umfang einer Personalzunahme oder -abnahme, so können wir auch die langfristige Zu- oder Abnahme der Beschäftigung errechnen. Nehmen Sie an, daß in einem Jahr zunehmender Beschäftigung im Durchschnitt a Personen eingestellt werden, während in einem Jahr schlechter Beschäftigung im Durchschnitt b Angestellten gekündigt werde. Die durchschnittliche Beschäftigungsänderung pro Jahr ist dann

$$\left(\frac{r}{2q}\right) a + \left(\frac{1}{2}\right) 0 - \left(\frac{s}{2b}\right) b$$

oder

$$\frac{ra - sb}{2(r + s)}.$$

Es wird eine langfristige Expansion festzustellen sein, wenn $ra > sb$, eine Schrumpfung, wenn $ra < sb$, und es wird ein annähernd gleicher Personalstand bleiben, wenn $a = sb$.

Beispiel 3. Ein Geschäftsmann beabsichtige, in einer von zwei Gesellschaften Geld zu investieren. Von potentiellen 12000 Kunden besitze im Moment die Gesellschaft 10000, während die Gesellschaft B nur über 2000 verfüge. Auf Grund einer Umfrage könne der Geschäftsmann auf der anderen Seite feststellen, daß 20% der Kunden A-s im nächsten Monat zu B überwechseln werden, während lediglich 10% von B-s Kunden zu A gehen werden. Welchen Rat könnten wir ihm für seine Investition geben, wenn wir voraussetzen, daß dieser Trend erhalten bleibt.
Formulieren wir das Problem als eine Markovsche Kette mit zwei Stadien, so erhalten wir die Übergangsmatrix

$$P = \begin{matrix} \\ A \\ B \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Der Fixpunkt ergibt sich dann zu $w = (1/3, 2/3)$. Das bedeutet, daß sich die Kunden langfristig gesehen 1/3 zu 2/3 aufspalten werden, d. h. 4000 für A und 8000 für B. Welchen Zeitraum umspannt jedoch diese „langfristige" Betrachtung? Was ist schwerwiegender, die jetzige, sehr günstige Position der Gesellschaft A oder der langfristig zu erwartende Vorteil von B? Wählen wir $x = (10000, 2000)$, und ist $x^{(n)}$ die Verteilung der Kunden nach n Monaten, dann ist $x^{(n)} = xP^n$. Für den Zweck unserer Rechnung setzen wir $x^{(0)} = x$ und $x^{(x+1)} = x^{(n)}P$ und errechnen die Verteilung schrittweise. Die Ergebnisse für zwei Jahre werden in Abb. 10 gezeigt.

Monats-zahl	Zahl der Kunden von A	B
0	10000	2000
3	6058	5942
6	4706	7294
9	4242	7758
12	4083	7913
18	4010	7990
24	4001	7999

Abb. 10

Wir sehen, daß sich der „langfristige" Effekt sehr bald einstellt. Bleibt der jetzige Trend bestehen, so wird bereits nach ungefähr drei Monaten die Gesellschaft B die Firma A eingeholt haben, sie nach sechs Monaten weit überholt haben und dann lediglich noch kleine Gewinne auf die 8000-Kunden-Grenze hin machen. Für alle praktischen Zwecke genügt also für eine langfristige Voraussage die Betrachtung der nächsten zwei Jahre. Der Geschäftsmann sollte also sicherlich in Gesellschaft B investieren. Bei komplexeren Problemen, die über eine größere Anzahl von Zuständen verfügen, wird sich die langfristige Verteilung langsamer einstellen. Wir können jedoch mit Hilfe der gleichen Rechnung die relativen Vorteile möglicher Investitionen einfach feststellen.

ÜBUNGEN

Die Übungen 1 bis 6 beziehen sich auf das folgende Problem: Eine Autoverleihfirma arbeitet in drei Städten. Die folgende Tabelle zeige die Bewegungen der Wagen während eines typischen Monats:

	Fährt nach A	Fährt nach B	Fährt nach C	Geht verloren
Von A:	0,5	0,2	0,2	0,1
Von B:	0,2	0,5	0,2	0,1
Von C:	0,1	0,3	0,4	0,2

Ein Wagen in der Stadt A bleibe z. B. mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 am Ort, werde nach B oder C mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 gesandt und gehe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 verloren (werde verkauft oder zerstört).

1. Stellen Sie ein Modell einer Markovschen Kette auf.

2. Errechnen Sie N, t und B und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

3. Nehmen Sie an, daß die Gesellschaft jeden Monat dem Bestand jeder Stadt 70 neue Wagen zuführe. Welche langfristige Verteilung der Wagen wird sich einstellen? Wieviel gehen monatlich langfristig verloren?
[Lös.: A hat 490, B 630, C 490; 210 gehen verloren.]

4. Wieviel Wagen sollte die Gesellschaft den verschiedenen Städten monatlich zuführen, damit langfristig in jeder Stadt 500 Wagen stationiert sind?
[Lös.: 100 nach A und C, keine nach B.]

5. Wie viele Wagen sollte die Gesellschaft monatlich in die verschiedenen Städte schicken, damit sich langfristig gesehen 600 Wagen in den Städten A und C und 400 Wagen in B befinden? [Lös.: Unmöglich.]

6. Beweisen Sie, daß ein langfristiger Verteilungsvektor y mit den Komponenten y^i dann und nur dann zu erreichen sein wird, wenn $y \geqq yQ$. Nennen Sie eine einfache Bedingung für Q, damit die Möglichkeit einer gleichmäßigen Verteilung (alle y_i gleich) für diesen Modelltyp besteht.

Die Übungen 7 bis 10 beziehen sich auf das folgende Problem: Zwei Fabrikanten stellen die miteinander konkurrierenden Güter A und B her. Hielte der herrschende Trend an, so würden die Kunden gemäß der folgenden Matrix von einem Produkt zum anderen überwechseln:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Der Fabrikant A erwäge die Einführung eines zusätzlichen Produktes X oder Y, um seinen Marktanteil zu vergrößern. Eine Marktuntersuchung zeige, daß sich dann die Trends wie folgt verhalten würden:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ X \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & X \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ Y \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & Y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

7. Welchen Marktanteil könnte das Produkt langfristig unter den herrschenden Bedingungen erringen?

8. Welchen Markanteil könnte der Fabrikant langfristig erringen, wenn er sowohl A als auch X produziert?

9. Welchen Markanteil könnte der Fabrikant erringen, wenn er sowohl A als auch Y produziert?
10. Beraten Sie den Fabrikanten unter Benutzung der Ergebnisse der Übungen 7—9.

13*. Die Errechnung von Maxima und Minima; Entscheidungsfällung

In Kapitel 1 vom Abschnitt 6 diskutierten wir das Problem der Entscheidungsfällung. Der Entscheidungsfällende wurde dort mit der Notwendigkeit konfrontiert, zwischen verschiedenen mit Handlungsweisen bezeichneten Alternativen zu wählen. Diese Alternativen zeichneten sich dadurch aus, daß sie unter seiner Kontrolle standen. Ein vollständiger Satz solcher Verhaltensweisen wurde eine *Strategie* genannt.
Andere, mit Ereignissen bezeichnete Alternativen wiederum befinden sich nicht unter seiner Kontrolle, können aber für seine Entscheidung durchaus von großer Bedeutung sein. Beispiele solcher Ereignisse sind: Wirkliche Nachfrage nach einem Produkt, die realisiert werden kann, das wirkliche Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von Öl in Gebieten, in denen man erwägt, Bohrungen zu unternehmen, die wirkliche Durchführbarkeit oder Nichtdurchführbarkeit der Entwicklung bestimmter Bauteile usw. Im Geschäftsleben bemühen sich die Verantwortlichen, mit Hilfe ihrer Entscheidungen in einer bestimmten Richtung optimale Ergebnisse zu erreichen. So versuchen sie z. B., die *Gewinne zu maximieren*, die *Kosten zu minimieren*, die *Produktivität zu maximieren* oder den *Ausschuß zu minimieren*. Um diese Wünsche von einem bloßen Wollen in die Wirklichkeit zu überführen, die die gewünschten Ergebnisse sicherstellt, ist es notwendig, das Problem in seine Komponenten aufzulösen (eventuell unter Benutzung eines Baumdiagrammes, wie es in Kapitel 1 gezeigt wird) und dann den verschiedenen Teilen der Analyse Zahlen zuzuordnen, die die erwünschte Menge angeben. Am Ende einer solchen Analyse wird der Entscheidungsfällende mit einem Vektor numerischer Ergebnisse seiner Strategien konfrontiert, und er kann die Strategie wählen, deren numerisches Ergebnis ihm als optimal erscheint. Gewöhnlich wird er dann entweder den kleinsten oder den größten Wert im Vektor der Ergebnisse wählen. Aus diesem Grunde wollen wir uns die Definitionen zweier Rechenoperationen bezüglich der Vektoren, und zwar der Extremwertbestimmungen, ins Gedächtnis zurückrufen (siehe Kapitel 3, Abschnitt 10).

Definition. Es sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein (Spalten- oder Zeilen-)vektor. Es ist dann $x \max = M$, wobei M die größte der Komponenten von x ist und $x \min = m$, wobei m die kleinste der Komponenten ist.
Äquivalente Definitionen für die Extremwertbestimmung werden in den Übungen 1 und 2 gegeben.

Wir wollen an dieser Stelle einige Beispiele für diese Rechnungen geben:

$$\begin{aligned} \max\ (4, 0, 3, -1, 4) &= 4 \\ \min\ (4, 0, 3, -1, 4) &= -1 \\ \max\ (-5, -2, -5, -3, -1) &= -1 \\ \min\ (-5, -2, -5, -3, -1) &= -5. \end{aligned}$$

Wenden wir diese Rechenoperationen auf Summen, Differenzen und Produkte von Vektoren an, so können wir zeigen, daß sie verschiedenen Abhängigkeiten genügen. Wir wollen drei dieser Abhängigkeiten diskutieren und den Rest für die Übungen lassen (siehe Übungen 11 bis 20).
Der Vektor $-x$ habe Komponenten $(-x_1, \ldots, -x_n)$. Ist $x_i \leqq M$ für alle i, so ist $-x_i \geqq -M$ für alle i. Es gilt also offensichtlich

$$\max -x = -\min x. \tag{1}$$

Es gilt offensichtlich ferner

$$\min -x = -\max x. \tag{2}$$

Sind x und y Zeilenvektoren mit n Komponenten, so ist

$$\max (x + y) \leqq \max x + \max y \tag{3}$$

$$\min (x + y) \geqq \min x + \min y \tag{4}$$

Wir wollen hier (3) beweisen, (4) wiederum für Übung 11 aufheben. Um (3) zu beweisen, sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $M = \max x$ und $N = \max y$. Wir wissen nun, daß

$$x_i \leqq M \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

und

$$y_i \leqq N \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Dies impliziert, daß die i-te Komponente von $x + y$, also $x_i + y_i$, den folgenden Relationen genügt

$$x_i + y_i \leqq M + N \qquad \text{für } i - 1, \ldots, n.$$

Dies impliziert wiederum (3). Es ist weiterhin interessant herauszufinden, unter welchen Bedingungen die Gleichung (3) ihre Gültigkeit behält. Diese Frage wollen wir jedoch in Übung 15 diskutieren. Als nächstes wollen wir diese Rechenoperationen auf einige Beispiele von Entscheidungsproblemen anwenden.

Beispiel 1. Ein Bauunternehmer möchte einen Wagen zu einem von drei Geschäften schicken, um dort fünf Einheiten Holz, drei Einheiten Glas und zwei Einheiten Farbe zu kaufen. Die durch die einzelnen Läden für diese Güter berechneten Preise werden durch die folgende Tabelle gegeben:

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{Holz} \\ \text{Glas} \\ \text{Farbe} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 11 & 9 \\ 8 & 7 & 9 \\ 15 & 13 & 12 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Zu welchem Laden soll er den Wagen schicken? Ist $x = (5,3,2)$ der Nachfragevektor, so stellen die Komponenten von xP die Kosten dar, die beim Kauf in den einzelnen Läden auftreten. Es ist leicht zu zeigen, daß

$$xP = (104, 102, 96).$$

Da wir die Kosten minimieren wollen, errechnen wir

$$\min xP = \min (104, 102, 96) = 96$$

als die niedrigste Rechnung, die der Bauunternehmer zu zahlen hat, und zwar dann, wenn er seinen Wagen zum dritten Geschäft schickt.

Beispiel 1 stellt ein Beispiel der *Entscheidung unter Sicherheit* dar, das wir dann vor uns haben, wenn die Ergebnisse jeder der Aktionen im voraus bekannt sind. Besteht jedoch für jede der Verhaltensweisen ein ganzer Satz von möglichen Ereignissen und sind die Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens bekannt, so bezeichnen wir das Problem als eines der *Entscheidungsfällung bei Unsicherheit*. Die folgenden Beispiele sollen Probleme der zweiten Art illustrieren.

Beispiel 2. Herr Becker besitze eine Würstchenbude in der Nähe eines Fußballstadions. Er kaufe bei jedem Spiel Q heiße Würstchen. Dabei verdiene er an jedem verkauften Würstchen 10 Pf. Die nicht verkauften Würste können mit einem Verlust von 2 Pf pro Wurst an den Fabrikanten zurückgegeben werden. Auf Grund von Erfahrungen schätze Becker die folgenden Wahrscheinlichkeiten für den Verkauf von heißen Würstchen:

d = Anzahl der nachgefragten Würstchen 10 20 30 40 50

p = Wahrscheinlichkeit dieser Nachfrage 0,1 0,2 0,4 0,2 0,1

(Aus Gründen der Einfachheit wollen wir annehmen, daß die Verkäufe immer ein Vielfaches von 10 seien.) Wie viele Würstchen sollte Becker kaufen, um seinen Nettogewinn zu maximieren?
Es ist klar, daß Beckers Nettogewinn

$$10Q \text{ ist, wenn } Q \leqq d,$$

d. h., wenn genügend Nachfrage vorhanden ist, um alle heißen Würstchen zu verkaufen. Sein Nettogewinn ist

$$10d - 2(Q - d) = 12d - 2Q, \text{ wenn } Q > d,$$

d. h. wenn das Angebot die Nachfrage übersteigt, da er dann an jedem verkauften Würstchen 10 Pf verdient und an jedem nicht verkauften 2 Pf verliert. Errechnen wir seinen Gewinn in Pfennigen für jeden der möglichen Fälle eines Einkaufes zwischen 10 und 50 und eines Verkaufes zwischen 10 und 50, so erhalten wir die Matrix M der Abb. 11.

$M =$ (Anzahl der bestellten Würstchen)

	Anzahl der nachgefragten Würstchen				
	10	20	30	40	50
10	100	100	100	100	100
20	80	200	200	200	200
30	60	180	300	300	300
40	40	160	280	400	400
50	20	140	260	380	500

Abb. 11

Ist p der Vektor

$$p = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},$$

so sehen wir, daß dann Mp der Spaltenvektor ist, dessen Koeffizienten die von Becker erwarteten Gewinne für jede von ihm bestellte Würstchenmenge darstellen. Wir erhalten

$$Mp = \begin{pmatrix} 100 \\ 188 \\ 252 \\ 268 \\ 260 \end{pmatrix}.$$

Wir können also erwarten, daß Becker 40 heiße Würstchen bestellt, um den maximalen Gewinn von

$$\max Mp = 268$$

zu erzielen.
Hängt die Anzahl der verkauften Würstchen vom Wetter ab, so kann Becker seine Bestellungen von der Wettervorhersage abhängig machen. Wir wollen diese Probleme in Übung 6 diskutieren.

Beispiel 3. In Kapitel 1, Abschnitt 6, Beispiel 2, betrachteten wir den Fall eines Ölsuchers, der sich entscheiden muß, nach Öl zu bohren oder seine Bohrrechte in einem

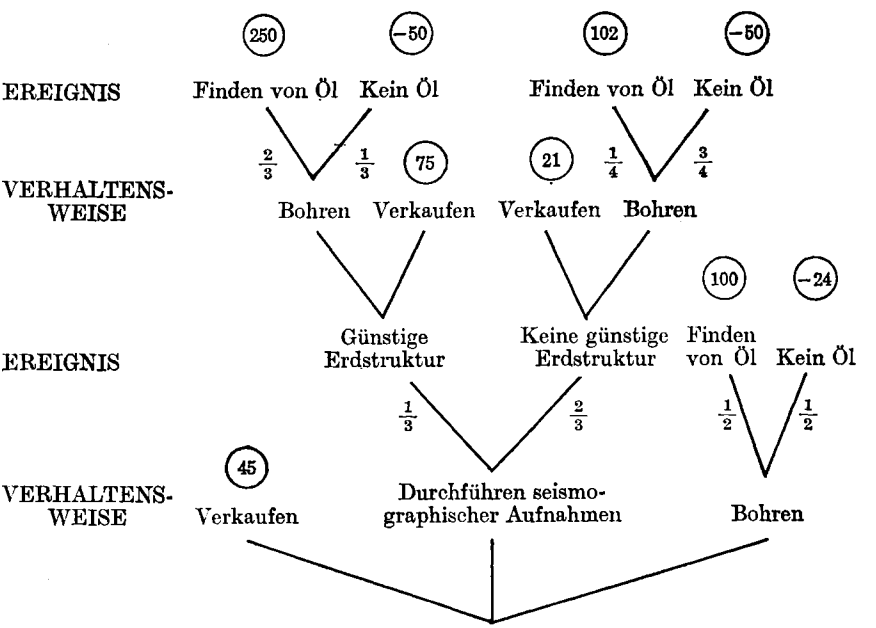


Abb. 12

bestimmten Gebiet zu verkaufen. Nehmen Sie nun an, daß er die Wahrscheinlichkeiten für die aus seinen Verhaltensweisen resultierenden Ereignisse auf Grund gehabter Erfahrungen wie in Abb. 12 dargestellt einschätzt:
An den Endpunkten der verschiedenen Zweige des Baumes sind die für jede Endverhaltensweise erwarteten Werte in 1000 DM angegeben. Was sollte der Ölsucher nun unternehmen?
Wir haben hier ein Beispiel eines *vielstufigen* Entscheidungsproblems unter Unsicherheit vor uns. Das Problem läßt sich leicht lösen, wenn wir bei den letzten Entscheidungen beginnen und uns bis zur ersten Entscheidung durcharbeiten. Die so erhaltene Lösung wird in Abb. 13 dargestellt. Die optimalen Verhaltensweisen sind hierin fettgedruckt.

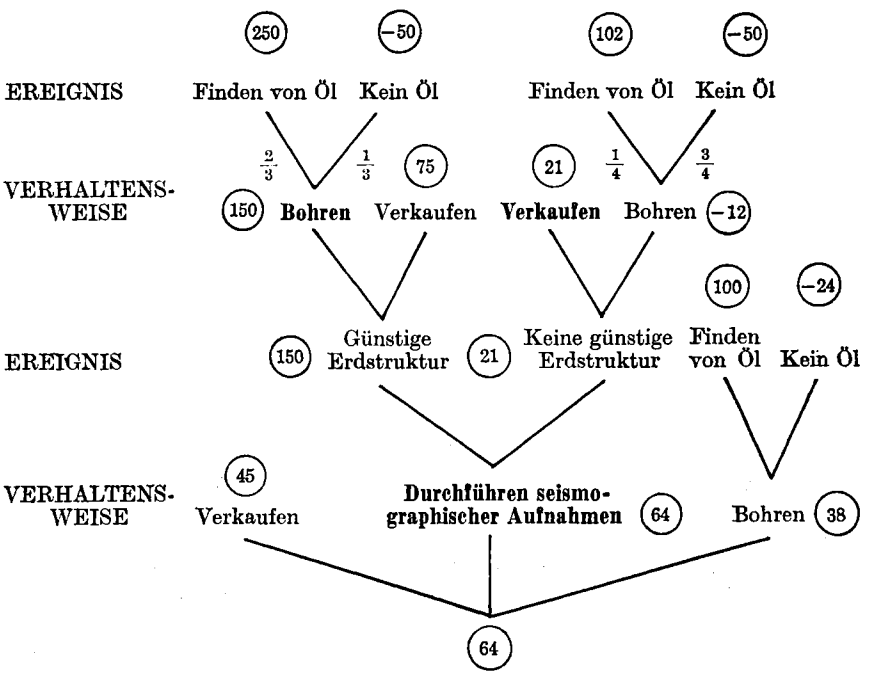


Abb. 13

Die Zahlen, die sich neben jeder Verhaltensweise oder jedem Ereignis befinden, stellen die erwarteten Ergebnisse aller folgenden Ereignisse unter der Voraussetzung dar, daß jeweils die optimalen Verhaltensweisen gewählt werden. Aus Abb. 13 können wir auch die *optimale Strategie* aus der Klasse aller optimalen Verhaltensweisen ablesen: „Führen Sie seismographische Aufnahmen durch; verkaufen Sie Ihre Bohrrechte, wenn Sie keine günstige Struktur finden, andernfalls bohren Sie." Das erwartete Ergebnis dieser Strategie beträgt, wie am Fuße des Baumes angegeben ist, 64000 DM.

Im allgemeinen bezeichnet man Entscheidungen, die unter Unsicherheit zu fällen sind, als errechnete Risiken. Die hier diskutierten Beispiele sollen zeigen, wie wir diese Risiken errechnen können. (Dies wird von den

Personen, die von kalkulierten Risiken sprechen, nicht immer durchgeführt.)

ÜBUNGEN

1. Es sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Zeilenvektor. Zeigen Sie, daß dann und nur dann $M = \max x$, wenn M die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:
   a) $x_i \leqq M$ für *alle* i, wenn $i = 1, \ldots, n$
   b) $x_i = M$ für *einige* i.

2. x habe die gleiche Bedeutung wie in Übung 1. Zeigen Sie, daß dann und nur dann $m = \min x$, wenn m die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:
   a) $x_i \geqq m$ für *alle* i bei $i = 1, \ldots, n$.
   b) $x_i = m$ für *einige* i.

3. Wenden Sie die Extremwertrechenoperationen auf die folgenden Vektoren an.
   (a) $(-1, 0, 15, -7)$.
   (b) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$.
   (c) $(0, 0, 1{,}2, \frac{15}{7}, 3, 0{,}01)$.
   (d) $(-0{,}1, -0{,}03, -1{,}2, -0{,}75, -1{,}37)$.
   [Teillös.: (a) $m = -7$, $M = 15$, (b) $m = -\frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{3}$].

4. Nehmen Sie an, das Geschäft 3 in Beispiel 1 erhöhe seine Preise für Holz und Glas auf 10 DM. Zu welchem Laden sollte der Bauunternehmer seinen Wagen nun schicken? [Lös.: Laden 2.]

5. Nehmen Sie in Beispiel 2 an, Becker verlöre anstatt 2 Pf 4 Pf an jedem nicht verkauften Würstchen. Wieviel sollte er dann bestellen?

6. Nehmen Sie in Beispiel 2 an, daß Becker auf Grund gemachter Erfahrungen folgende Wahrscheinlichkeiten für den Verkauf von Würstchen an schönen, bewölkten und regnerischen Tagen annehmen könne:

Anzahl der nachgefragten Würstchen	10	20	30	40	50
Wahrscheinlichkeit dieser Nachfrage bei schönem Wetter	0,1	0,1	0,2	0,3	03
Wahrscheinlichkeit dieser Nachfrage bei mittelmäßigem Wetter	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
Wahrscheinlichkeit dieser Nachfrage bei Regenwetter.	0,4	0,3	0,2	0,1	0

   Wieviel Würstchen sollte er bestellen, wenn der Wetterdienst schönes, mittelmäßiges bzw. regnerisches Wetter voraussagt?
   [Lös.: Schön: Bestelle 50; mittelmäßig: Bestelle 40; regnerisch: Bestelle 30.]

7. Rechnen Sie Übung 6 noch einmal unter der Annahme durch, daß Becker an jedem nicht verkauften Würstchen 4 Pf verliere.

8. Herr Müller sei Besitzer eines kleinen Bäckerladens. Er schätze die Wahrscheinlichkeiten für den Verkauf verschiedener Mengen Weißbrot wie folgt ein:

Anzahl der nachgefragten Brote	2	3	4	5	6	7
Wahrscheinlichkeiten dieser Nachfrage	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Wie viele Brote sollte er backen, wenn er an jedem verkauften Brot 8 Pf verdient und an jedem nicht verkauften Brot 3 Pf verliert?

9. Nehmen Sie in Beispiel 3 an, daß die erwarteten Ergebnisse eines Ölfundes nach der Durchführung seismographischer Aufnahmen und der Durchführung von Bohrungen 150 DM anstatt 250 DM betragen. Wie sollte sich die Gesellschaft nun verhalten? [Lös.: Sofort ihre Rechte verkaufen.]

10. Leiten Sie 2. von 1. ab.

11. Zeigen Sie, daß
$$\min(x + y) \geqq \min x + \min y$$
gilt.

12. Zeigen Sie, daß
$$\max(x - y) \leqq \max x - \min y$$
gilt.

13. Es bedeute $x \geqq y$ $x_i \geqq y_i$ für jedes i. Zeigen Sie, daß
$$\max x \geqq \max y \text{ und } \min x \geqq \min y,$$
wenn $x \geqq y$.

*14. Es sei $\max x \geqq \max y$. Können wir daraus schließen, daß $x \geqq y$?

*15. Zeigen Sie, daß dann und nur dann, wenn sowohl $x_i = \max x$ als auch $y_i = \max y$ ist, gilt
$$\max(x + y) = \max x + \max y.$$

*16. Unter welchen Umständen wird die Ungleichung der Übung 11 zur Gleichung?

*17. Wir definieren für den Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$
$$|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|),$$
d. h. wie erhalten den Betrag aus x, indem wir die Vorzeichen aller Komponenten von x in ein plus verwandeln. Beweisen Sie nun, daß

a) $\max |x| \geqq \max x$.

b) $\min -|x| \leqq \min -x$.

*18. Definieren Sie für irgendeinen Vektor x
$$x^+ = \frac{x + |x|}{2}$$

a) Zeigen Sie, daß
$$x_i^+ = \begin{cases} x_i & \text{wenn } x_i \geqq 0. \\ 0 & \text{wenn } x_i \geqq 0. \end{cases}$$

b) Beweisen Sie, daß $\max x = \max x^+$, wenn $\max x \geqq 0$.

c) Zeigen Sie, daß $\min x^+ \geqq 0$.

d) Zeigen Sie, daß $\min x^+ \geqq \min x$. Wann wird diese Ungleichung zur Gleichung?

*19. Es sei x ein Zeilenvektor mit n Komponenten und y ein Spaltenvektor mit n Komponenten. Es gelte $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$. Zeigen Sie, daß

$$(\min x)\,(\min y) \leqq \frac{xy}{n} \leqq (\max x)\,(\max y).$$

*20. Wann gelten die Gleichheitszeichen in der Ungleichung der Übung 19?

Empfohlene Lektüre

Allen, R. G. D.: *Mathematik für Volks- und Betriebswirte.* Berlin 1956.
Hohn, Franz E.: *Elementary Matrix Algebra.* Macmillan, New York 1958.
Neiss, Fr.: *Determinanten und Matrizen.* Berlin 1962.
Kenemy, John G., und Snell, J. Laurie: *Finite Markov Chains.* Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.
Thrall, Robert M., und Leonard Tornheim: *Vector Spaces and Matrices.* Wiley, New York 1957.
Zurmühl, R.: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen.* Berlin 1961.

VI. Finanzmathematik

Wir wollen nun anhand einiger Beispiele die Anwendung mathematischer Methoden in Finanzierung und Buchhaltung demonstrieren. Zunächst werden wir zeigen, wie man Differenzengleichungen als Methode zur Bewertung verschiedener langfristiger Investitionsalternativen benutzen kann. In den Abschnitten 7—9 werden wir dann Matrizen und Flußdiagramme dazu benutzen, ein Buchhaltungssystem zu entwickeln, das sich von dem traditionellen System doppelter Buchführung in einigen Punkten unterscheidet. Diese drei Abschnitte sind unabhängig von den ersten sechs.

1. Endliche Reihen

Wir wollen zuerst eine Reihe von Problemen der Finanzmathematik betrachten, die alle mit Hilfe der gleichen mathematischen Werkzeuge gelöst werden können.

Beispiel 1. Eine Person verfüge auf ihrem Sparkonto über 5000 DM. Sie füge diesem Betrag jedes Jahr 200 DM hinzu. Dafür erhalte sie pro Jahr 4% Zinsen. Über wieviel Geld kann sie am Ende von 10 Jahren verfügen? Der direkte Weg, die Antwort auf diese Frage zu finden, ist der, schrittweise das Guthaben nach jedem Jahr zu errechnen. Es sei x_j das Guthaben nach j Jahren. Nehmen Sie nun an, wir hätten dieses Guthaben bereits ermittelt. Wie können wir nun das Guthaben des nächsten Jahres errechnen? Zunächst erhält der Besitzer für sein Guthaben x_j während des Jahres 4% Zinsen. Dadurch steigt das Guthaben um $0{,}04\, x_j$ an. Außerdem füge er während des Jahres 300 DM hinzu. Es ist also

$$x_{j+1} = x_j + 0{,}04x_j + 300 = (1{,}04)x_j + 300.$$

Wir wissen ferner, daß das ursprüngliche Guthaben $x_0 = 5000$ war, und können aus diesen beiden Gleichungen das Guthaben x_{10} in zehn Schritten errechnen.

Wir wollen nun das Problem des Beispieles 1 in allgemeinerer Form formulieren: Betrachten Sie ein Guthaben mit dem Anfangsbetrag P, wobei $P \geqq 0$. Am Ende jeder Periode wird diesem Guthaben eine „Zahlung" p hinzugefügt. (Erhöht die „Zahlung" das Guthaben, so ist $p > 0$, verringert sie das Guthaben, so ist $p < 0$, wird keine Zahlung geleistet, so ist $p = 0$.) Das Guthaben wird in jeder Periode mit einem Zinssatz r verzinst. Wie in Beispiel 1 ergibt sich also das nächste Guthaben zu

$$x_{j+1} = x_j + rx_j + p$$

oder einfacher

$$x_{j+1} = (1 + r)x_j + p, \qquad r > 0, \tag{1}$$

und

$$x_0 = P. \tag{2}$$

Unser Problem ist nun, das Endguthaben S nach n Perioden zu errechnen. Wenn wir eine Formel für x_j finden können, dann ist $S = x_n$. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, findet diese Formulierung eine Vielzahl von Anwendungen. Sie kann z. B. dazu benutzt werden, die Ansammlung einer jährlichen Zahlung, die Rückzahlung einer Anleihe oder Hypothek oder den Wertzuwachs eines zinstragenden Kapitals zu errechnen. Bei der Errechnung des Wertes einer jährlich zu zahlenden Rente beginnen wir z. B. mit dem Anfangsguthaben von $P = 0$ und leisten n Perioden lang Zahlungen in der Höhe von $p > 0$. Errechnen wollen wir das Gesamtguthaben am Ende der n-ten Periode. Wird ein Betrag $P > 0$ zu Zinseszinsen angelegt, dann ist $p = 0$, und wir suchen wiederum das Guthaben am Ende der n-ten Periode. Bei der Tilgung einer Hypothek ist P der Betrag der Hypothek, der durch die Zahlungen von p reduziert wird. Es ist daher $p < 0$. Die Anzahl der Perioden n wird so gewählt, daß die Hypothek am Ende getilgt ist, d. h. $S = 0$. Die Periodenlänge kann jeweils so gewählt werden, daß sie für das jeweilige Problem passend ist. Wir können Monate, Quartale oder Jahre als Zeitintervalle bestimmen. n ist dann jeweils die Anzahl der Monate, Quartale oder Jahre und r der Zinssatz pro Periode. Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß die Zinsabrechnungsperiode und der Zahlungsintervall gleich sind. Wir haben z. B. im Beispiel 1 vorausgesetzt, daß der Zins jährlich berechnet wurde und daß einmal im Jahr eine Zahlung geleistet wurde. Wir werden uns nun zwar in Abschnitt 4 mit Situationen beschäftigen, bei denen der Verzinsungszeitraum ein anderer ist als der Zahlungsintervall, wir wollen jedoch für den Rest dieses Abschnittes sowie für die Abschnitte 2 und 3 voraussetzen, daß diese Zeitabschnitte sich jeweils decken.

Unsere Aufgabe besteht zunächst darin, eine allgemeine Formel zu finden, mit deren Hilfe wir das Guthaben x_j nach j Perioden errechnen können. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst die Gleichung (1) unter der Anfangsbedingung (2) lösen. Es wird sich als nützlich erweisen, neue Variable durch die folgende Definition einzuführen:

$$y_j = \frac{x_j + \frac{p}{r}}{(1 + r)^j}. \tag{3}$$

In Übung 9 des nächsten Abschnittes werden wir nach der wirtschaftlichen Interpretation der Variablen y_j fragen. Wir wollen jetzt die Gleichung (1)

unter Benutzung der Variablen y_j neu formulieren. Wir lösen zu diesem Zweck (3) nach x_j wie folgt auf:

$$x_j = (1 + r)^j y_j - \frac{p}{r}. \tag{4}$$

Dies setzen wir nun in Gleichung (1) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}(1 + r)^{j+1} y_{j+1} - \frac{p}{r} &= (1 + r)\left[(1 + r)^j y_j - \frac{p}{r}\right] + p \\ &= (1 + r)^{j+1} y_j - p\,\frac{1 + r}{r} + p \\ &= (1 + r)^{j+1} y_j - \frac{p}{r}.\end{aligned}$$

Nun addieren wir zu beiden Seiten der Gleichung p/r und dividieren durch $(1 + r)^{j+1}$. Dies führt uns zu einer sehr einfachen Form der Gleichung (1):

$$y_{j+1} = y_j \tag{5}$$

Auch (2) wollen wir unter Verwendung von y neu formulieren. Aus (3) ergibt sich

$$y_0 = \frac{x_0 + \frac{p}{r}}{(1 + r)^0} = x_0 + \frac{p}{r},$$

da die 0-te Potenz einer Zahl gleich 1 ist. Es wird daher (2)

$$y_0 = P + \frac{p}{r}.$$

Da jedoch nach Gleichung (5) y jeweils dem vorangehenden y gleich ist, müssen alle Werte von y gleich y_0 sein. Die von uns gesuchte Lösung unter Verwendung von y ist daher

$$y_j = P + \frac{p}{r}. \tag{6}$$

Setzen wir dies in Gleichung (4) ein, so erhalten wir die von uns gesuchte Formel. Die Lösung unseres allgemeinen Problems ist dann

$$x_j = \left(P + \frac{p}{r}\right)(1 + r)^j - \frac{p}{r}. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich

$$S = \left(P + \frac{p}{r}\right)(1 + r)^n - \frac{p}{r}. \tag{8}$$

Aus Bequemlichkeitsgründen haben wir in Tabelle III die Werte für $(1 + r)^n$ für verschiedene mögliche Kombinationen von r und n zusammengefaßt.

Beispiel 1. (Fortsetzung). In unserem Falle sei $P = 5000$, $p = 300$, $n = 10$ und $r = 0{,}04$. Nach (8) ergibt sich daher

$$S = \left(5000 + \frac{300}{0{,}04}\right)(1{,}04)^{10} - \frac{300}{0{,}04}.$$

In Tabelle III sehen wir, daß $(1{,}04)^{10} = 1{,}4802$ ist; daher ergibt sich

$$S = (12500)\,(1{,}4802) - 7500 = 11002{,}50.$$

Unser Guthaben wird also am Ende des zehnten Jahres 11002,50 DM betragen.

Beispiel 2. Wir zahlen 100 DM auf ein Sparkonto ein. Die Bank zahle uns 4% Zinsen, die vierteljährlich errechnet werden, d. h. 1% Zinsen pro Quartal. Auf welchen Betrag wird unser Guthaben nach fünf Jahren angewachsen sein?
Hier ist $P = 100$, $r = 1\% = 0{,}01$ und $n = 20$, da wir als Periode ein Vierteljahr wählen. Da keine weiteren Zahlungen stattfinden, ist $p = 0$. Danach ergibt sich nach (8)

$$S = (100 + 0)\,(1 + r)^{20} - 0 = 100(1 + r)^{20}.$$

Aus Tabelle III ergibt sich wiederum $(1 + r)^{20} = 1{,}2202$; S ist also 122,02, d. h. unser Guthaben wird nach fünf Jahren 122,02 DM betragen.

Beispiel 3. Herr Müller möchte 20 Jahre lang ein jährliches Einkommen von 6000 DM haben. Welchen Betrag muß er investieren, um dieses Einkommen bei einem Zinssatz von 5% pro Jahr zu erreichen?
In diesem Fall ist die Unbekannte der Ausgangsbetrag P. Da die jährlichen Zahlungen das Ursprungsguthaben verringern, ist $p = -6000$. Es ist ferner $n = 20$, $r = 0{,}05$, und damit $p/r = -120000$. Reicht das investierte Kapital gerade aus, um die gewünschten Einkommenszahlungen 20 Jahre lang zu leisten, so ist $S = 0$. Auf Grund von (8) erhalten wir also

$$0 = (P - 120000)\,(1{,}05)^{20} + 120000.$$

Nach Tabelle III ist $(1{,}05)^{20} = 2{,}6533$; damit ergibt sich

$$0 = 2{,}6533\,P - 198{,}396; \qquad P = \frac{198{,}396}{2{,}6533} = 74773.$$

Herr Müller muß also 74773 DM auf sein Konto einzahlen.

Beispiel 4. Eine Gesellschaft könne entweder für 800000 DM ein Fabrikgebäude bauen oder ein entsprechendes Gebäude für 75000 DM pro Jahr 25 Jahre lang mieten. Sie erhalte in diesem Falle eine Option, das Gebäude am Ende des 25. Jahres für 100000 DM kaufen zu können. Die Gesellschaft könne jährlich 14% ihres investierten Kapitals verdienen. Wofür sollte sie sich entscheiden?
Wir haben hier einen Vergleich zwischen einer einmaligen Zahlung und einer über 25 Jahre verteilten Reihe von Zahlungen durchzuführen. Dies kann geschehen, indem wir entweder a) den Barwert der 25 Mietzahlungen ermitteln, oder indem wir b) die Höhe der jährlichen Zahlungen ermitteln, die einer einmaligen Zahlung von 800000 DM entsprechen. Wir wollen hier nach der ersten Methode vorgehen und die Errechnung nach der zweiten Methode in einer Übung (siehe Übung 10) durchführen.
L sei das in einer einmaligen Zahlung bestehende Äquivalent zu der Mietkaufoption. Es ist dann $p = -75000$, $S = 100000$, $n = 25$ und $r = 0{,}14$. Hier tritt jedoch eine weitere Komplikation dadurch auf, daß die Endzahlungen anstatt am Ende am Anfang jedes Jahres zu zahlen sind. Es ergibt sich daher $P = L - 75000$, und wir müssen in (8) insofern eine Korrektur vornehmen, als am Ende der letzten Periode keine Zahlung stattfindet. Es ergibt sich also

$$100000 = \left(L - 75000 - \frac{75000}{0{,}14}\right)(1{,}14)^{25} + \frac{75000}{0{,}14} + 75000.$$

Aus Tabelle III ersehen wir wiederum, daß $(1{,}14)^{25} = 26462$. Lösen wir die Gleichung nach L auf, so erhalten wir $L = 591414$ DM. 591414 DM würden also bei einem dem

Gewinn der Gesellschaft entsprechenden Zinssatz genügen, um die jährlichen Mietzahlungen zu leisten und das Gebäude nach 25 Jahren zu kaufen. Die Gesellschaft könnte also für 591414 DM die gleichen Anlagen erstehen, die sie 800000 DM kosten würden, wenn sie selbst baute. In diesem Fall ist offensichtlich der Mietkauf vorzuziehen.

ÜBUNGEN

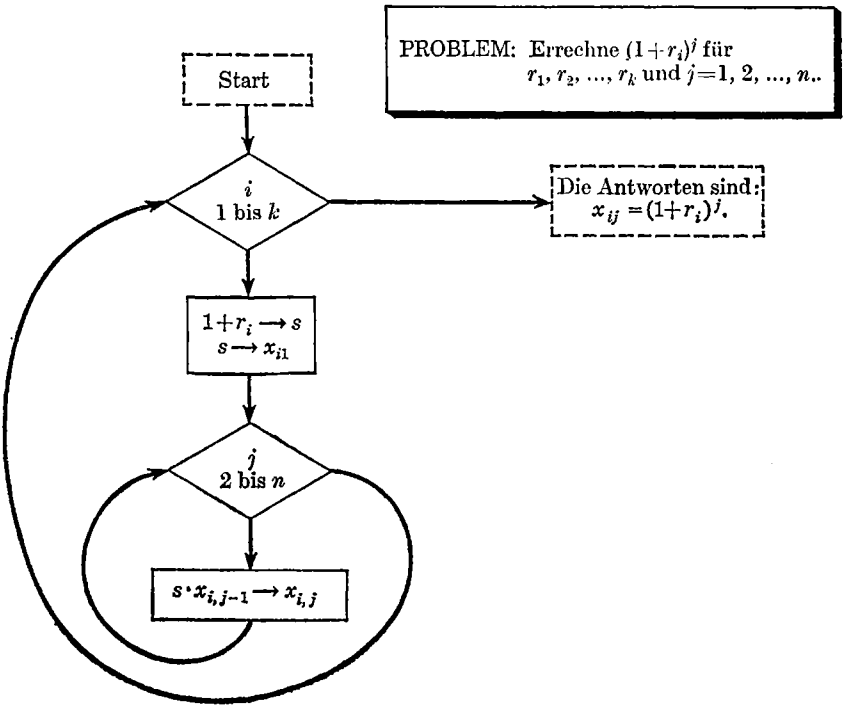
1. In einer Gesellschaft, die jährlich 6% des investierten Kapitals verdient, werden 20000 DM investiert. Welchen Wert hat die Investition am Ende des zehnten Jahres, wenn die jährlichen Gewinne jeweils wiederum investiert werden?
2. Wieviel muß Herr Meier am Ende von sechs Jahren an Herrn Müller zurückzahlen, wenn dieser ihm 2000 DM zu einem Zinssatz von 6% überläßt und die Zinsen vierteljährlich gezahlt werden? [Lös.: 2859 DM.]
3. Es werde eine über 16 Jahre laufende Rente[1] von jährlich 100 DM ausgesetzt. Welchen Wert hat die Rente am Ende des sechzehnten Jahres, wenn die jeweiligen Summen der geleisteten Zahlungen mit jährlich 5% verzinst werden?
4. Eine Gesellschaft könne Mittel in einem Projekt investieren, das ihre jährlichen Gewinne um 10000 DM erhöhen würde. Das Projekt koste 30000 DM und habe eine erwartete Lebensdauer von vier Jahren. Sollte sie Mittel in dem vorgeschlagenen Projekt investieren, wenn sie an anderen Projekten jährlich 20% des investierten Kapitals verdienen kann?
5. Welchen Barwert hat ein Fonds, der mit 20% verzinst wird, und der, nachdem vier Jahre lang Zahlungen von 10000 DM geleistet worden sind, den Wert 0 hat? [Lös.: 25887 DM.]
6. Stellen Sie für Übung 5 eine Tabelle auf, aus der die jeweilige Größe des Fonds, der in den einzelnen Jahren anfallende Zinsbetrag und der jedes Jahr auszuzahlende Betrag zu ersehen ist. Stellen Sie ein Flußdiagramm auf, mit dessen Hilfe das Guthaben am Ende eines jeden Jahres errechnet werden kann.
7. Ermitteln Sie für die Übungen 4 und 5 den jetzigen Wert des Fonds, indem Sie von der Tatsache ausgehen, daß a) der Wert des Fonds am Ende des vierten Jahres 0 ist, b) jährlich 10000 DM aus dem Fonds gezahlt werden, c) daß der Wert des Fonds, wenn man die jährlichen Zahlungen von 10000 DM vernachlässigt, am Beginn eines jeden Jahres 1/1,2mal so groß wie das Guthaben am Ende des Jahres ist. Stellen Sie ein Flußdiagramm auf, mit dessen Hilfe man den Barwert des Fonds errechnen kann.
8. Werden für eine Summe Zinsen und Zinseszinsen gezahlt, so wird die Zinssumme einer Periode jeweils auf Grund des Guthabens am Ende der vorhergehenden Periode errechnet. Werden jedoch für einen bestimmten Betrag nur *einfache* Zinsen gezahlt, so werden die jährlichen Zinsbeträge lediglich auf der Basis der ursprünglichen Einlage errechnet, die nicht um die aufgelaufenen Zinsbeträge vergrößert wird. Bestimmen Sie den Wert des Betrages P nach der j-ten Periode, der zum Zinssatz r einfach verzinst wird. Stellen Sie ein Flußdiagramm auf, mit dessen Hilfe Sie die einzelnen Werte errechnen können.
   [Teillös.: $x_j = x_{j-1} + (1 + r)x_0$ mit $x_0 = P$.]
9. Rechnen Sie Beispiel 1 noch einmal unter der Voraussetzung, daß sowohl für die ursprüngliche Einlage von 5000 DM als auch für die jährlichen Zahlungen von

[1] Wenn nichts anderes erwähnt wird, handelt es sich immer um sog. „nachschüssige Renten", bei denen die Zahlungen am Ende des jeweiligen Zeitabschnittes geleistet werden. (Der Übersetzer.)

300 DM anstatt Zinsen und Zinseszinsen nur ein einfacher Zins von 4% gezahlt wird. Welchen Betrag machen die Zinseszinsen innerhalb von zehn Jahren aus?

10. Nehmen Sie in Beispiel 4 an, daß die 800000 DM in einen Fonds einzuzahlen wären, aus dem 25 gleiche, jährliche Zahlungen, beginnend *am Anfang* des ersten Jahres, zu machen wären. Wir groß müßten diese jährlichen Zahlungen sein, wenn der jeweilige Wert des Fonds mit 14% pro Jahr verzinst wird und am Ende des 25. Jahres noch 100000 DM vorhanden sein sollen? Vergleichen Sie dies mit den Mietzahlungen. Zu welcher Entscheidung würde diese Analysemethode führen?

11. Zeigen Sie, daß das folgende Flußdiagramm zur Errechnung der Werte der Tabelle III dienen kann.



12. Stellen Sie ein Flußdiagramm für die Errechnung von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf, wenn $x_0 = P$ und $x_{j+1} = (1 + r)x_j + p$ ist und wenn r, n, p und P gegeben sind.

13. Betrachten Sie die Zahlenfolge 1, 2/3, 4/9, 8/27, 16/81 ...; x_j sei die Summe der ersten j-Glieder dieser Folge. Zeigen Sie, daß $x_{j+1} = x_j + (2/3)^j$ ist, wenn $x_1 = 1$. Zeigen Sie, daß die Lösung

$$x_j = 3[1 - (\tfrac{2}{3})^j]$$

ist, indem Sie beweisen, daß dies sowohl der genannten Gleichung als der Bedingung $x_1 = 1$ genügt. Errechnen Sie x_5, a) indem Sie die Glieder der Zahlenfolge addieren und b) indem Sie die Formel benutzen.

14. Verallgemeinern Sie das Ergebnis der Übung 13, indem Sie x_j für die Summe der ersten j-Glieder einer beliebigen geometrischen Folge a, ar, ar^2, ar^3, ... mit $r \neq 1$ setzen. Zeigen Sie, daß

$$x_{j+1} = x_j + ar^j$$

für $x_1 = a$. Zeigen Sie ferner, daß die Lösung hierfür

$$x_j = a\frac{1-r^j}{1-r}$$

ist.

Leiten Sie die Formel für x_j ab, indem Sie zunächst die dadurch dargestellte Summe ausschreiben, dann die durch rx_j dargestellte Summe ausschreiben und schließlich die Subtraktion $x_j - rx_j$ gliedweise durchführen.

15. Betrachten Sie die Zahlenfolge 1,2,3,4 . . .; x_j sei die Summe der ersten j-Glieder dieser Folge. Zeigen Sie, daß x_j der Gleichung

$$x_{j+1} = x_j + j + 1$$

mit $x_1 = 1$ genügt. Zeigen Sie, daß die Lösung hierfür

$$x_j = \tfrac{1}{2}j(j+1)$$

ist.

Leiten Sie die Formel für x_j ab, indem Sie zunächst die durch x_j dargestellte Summe einmal in fallender und einmal in steigender Reihenfolge ausschreiben und sie dann gliedweise addieren.

16. x_j sei die Summe der ersten j-Glieder der Zahlenfolge r, $2r^2$, $3r^3$, . . ., $r \neq 1$ (siehe Kapitel V, Anschnitt 10). Zeigen Sie, daß die sich daraus ergebende Gleichung

$$x_{j+1} = x_j + (j+1)r^{i+1}$$

mit der Anfangsbedingung $x_1 = r$ die folgende Lösung hat:

$$x_j = \frac{r}{(1-r)^2}[1 - r^j(1 + j - rj)].$$

Leiten Sie die Formel für x_j ab, indem Sie die dadurch dargestellte Summe sowie die Summe für rx_j ausschreiben, dann gliedweise die Subtraktion $x_j - rx_j$ durchführen und schließlich die Ergebnisse der Übung 14 anwenden.

17. Es sei

$$x_j = a^{j-1} + a^{j-2}c + a^{j-3}c^2 + \ldots + a^2c^{j-3} + ac^{j-2} + c^{j-1}.$$

Zeigen Sie, daß x_j der Gleichung

$$x_{j+1} = ax_j + c^j$$

mit der Anfangsbedingung $x_1 = 1$ genügt. Zeigen Sie, daß deren Lösung

$$x_j = \frac{a^j - c^j}{a - c}$$

ist.

Leiten Sie die Formel für x_j ab, indem Sie die durch x_j und durch cx_j/a dargestellten Summen ausschreiben und gliedweise die Subtraktion $x_j - cx_j/a$ durchführen.

2. Einige wichtige Sonderfälle

In Abschnitt 1 lösten wir das folgende Problem: Werden P DM investiert, dieser Betrag in n Perioden zum Zinssatz von r verzinst, und wird in jeder Periode ein Betrag p hinzugefügt, so ergibt sich das Endguthaben S nach

Gleichung (8). Dieses Resultat könnten wir auch in der folgenden Form schreiben:

$$S = (1 + r)^n P + \left[\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\right] p. \tag{9}$$

Wir nahmen in Abschnitt 1 an, daß r, n, P und p bekannt seien und daß S zu berechnen sei. Wir wollen auch hier voraussetzen, daß der Zinssatz r und die Anzahl der Perioden n bekannt seien, wir wollen jedoch bezüglich der Größen S, P und p verschiedene Annahmen machen. Wir erhalten besonders interessante und nützliche Formeln, wenn eine der Variablen 0 ist, eine andere der Variablen bekannt und ungleich 0 ist und die dritte Variable ermittelt werden soll. Abb. 1 zeigt die Lösungen von Gleichung (9) für die sechs möglichen Kombinationen. Alle diese Formeln werden häufig in der Finanzmathematik verwandt. Wir wollen jedoch nicht vergessen, daß sie alle lediglich Sonderfälle von (9) darstellen und daß wir alle Lösungen unserer Probleme ohne das Vorhandensein der Abb. 1 mit Hilfe der Gleichung (9) erreichen könnten.

Die in den in Abb. 1 gezeigten Formeln in Klammern gesetzten Ausdrücke werden als „Faktoren" der Investitionsformeln bezeichnet. So ist z. B. $(1 + r)^n$ der Faktor[1], der bei einer mit Zinseszins verzinsten einmaligen Einlage zu verwenden ist. $[(1 + r)^n - 1]/[r(1 + r)^n]$ ist dann als Faktor zu verwenden, wenn der Barwert gleicher Zahlungen errechnet werden soll usw. In Büchern, die sich mit diesem Gebiet befassen, sind diese sechs Faktoren manchmal in bezug auf r und n angeführt (siehe z. B. Grant und

Inhalt der Formel	Null-Variable	Gegebene Variable	Unbekannte Variable	Formel
Endkapital bei Zinseszins	p	P	S	$S = [(1 + r)^n]P$
Barwert bei Zinseszins	p	S	P	$P = \left[\frac{1}{(1 + r)^n}\right] S$
Rentenendwert	P	p	S	$S = \left[\frac{(1 + r)^n - 1}{r}\right] p$
Annuität b. bek. Rentenendwert	P	S	p	$p = \left[\frac{r}{(1 + r)^n - 1}\right] S$
Tilgungsrate	S	P	p	$p = -\left[\frac{r(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}\right] P$
Barwert einer Rente	S	p	P	$P = -\left[\frac{(1 + r)^n - 1}{r(1 + r)^n}\right] p$

Abb. 1

[1] Im deutschen Sprachgebrauch „Aufzinsungsfaktor" genannt.

Ireson, Principles of Engineering Economy). Es genügte jedoch eigentlich eine Tabelle der Werte $(1 + r)^n$, um jeden dieser Faktoren auf einfache Weise zu errechnen.

Trotzdem haben wir aus Gründen, die im nächsten Abschnitt dargelegt werden, in Tabelle IV die Werte für die Barwert-Faktoren für einen bestimmten Bereich berechnet. Dadurch werden die Errechnungen der verschiedenen Faktoren noch einfacher. Wenn wir die in Tabelle III und IV enthaltenen Zahlen für gegebene r und n durch [III] bzw. [IV] darstellen, so beziehen sich die obengenannten Faktoren in der in Abb. 2 dargestellten Weise auf die Tabellenwerte.

Faktor	Verhältnis zu den Tabellenwerten
Aufzinsungsfaktor	[III]
Abzinsungsfaktor	1/[III]
Rentenendwertfaktor[1]	[III] · [IV]
Tilgungsfaktor	1/([III] · [IV])
Annuitätenfaktor	1/[IV]
Rentenbarwertfaktor[1]	[IV]

Abb. 2

Beispiel 1. In Beispiel 3 des Abschnittes 1 war p gegeben, und wir suchten den Wert von P, bei dem S nach $n = 20$ Jahren 0 wird, d. h. wir suchten in diesem Fall den Barwert einer Rente. Benutzen wir also Tabelle III in Verbindung mit der entsprechenden, in Abb. 1 gezeigten Formel, so erhalten wir für die Werte $p = -6000$, $r = 0{,}05$, $n = 20$

$$P = \left[\frac{(1{,}05)^{20} - 1}{0{,}05\,(1{,}05)^{20}}\right] 6000 = \left[\frac{2{,}6533 - 1}{(0{,}05)\,(2{,}6533)}\right] 6000 = 74773$$

Das ist der gleiche Wert, den wir auch in Abschnitt 1 errechneten. Wollen wir die Tabelle IV benutzen, so entnehmen wir hier den Rentenbarwertfaktor für $r = 0{,}05$, $n = 20$ als 12,46. Wir errechnen dann

$$P = (12{,}462)\,(6000) = 74772$$

und erhalten, abgesehen von Rundungsdifferenzen, das gleiche Ergebnis wie vorher.

Beispiel 2. Im Beispiel 2 des vorigen Abschnittes war uns $P = 100$ gegeben, und wir suchten S nach 20 Jahren unter der Voraussetzung, daß keine weiteren Zahlungen geleistet wurden ($p = 0$). Wir suchten also nach Abb. 1 das Endkapital eines auf Zinseszins angelegten Betrages, das sich zu

$$\begin{aligned} S &= (1 + r)^n P \\ &= (1 + 0{,}01)^{20}\,(100) \\ &= 122{,}02 \end{aligned}$$

[1] der nachschüssigen Rente. [Der Übersetzer.]

ergibt. Auch hier sehen wir die Übereinstimmung mit dem Ergebnis des Beispieles 2 des vorigen Abschnittes.

Beispiel 3. Eine Anleihe von 100000 DM solle in zwölf gleichen, jährlichen Raten zurückgezahlt werden. Die Anleihe sei zu einem Zinssatz von jährlich 6% zu verzinsen. Wieviel sollten wir jedes Jahr zahlen? Es ist hier also $S = 0$, $P = 100000$ DM und gesucht wird p. Für dieses Tilgungsproblem entnehmen wir der Tabelle III $(1{,}06)^{12} = 2{,}0122$ und setzen dies in die Formel der Abb. 1 ein. Wir erhalten dann

$$p = \left[\frac{(0{,}06)\,(2{,}0122)}{2{,}0122 - 1}\right](-100000)$$
$$(0{,}11928)\,(-100000) = -11928.$$

Die mit 6% verzinsten 100000 DM werden also in zwölf Jahren liquidiert, wenn wir jährlich 11928 zahlen.
Der Tabelle IV können wir nun den Rentenbarwertfaktor für $n = 12$, $r = 0{,}06$ als 8,3838 entnehmen. Setzen wir gemäß Abb. 2

$$p = \frac{1}{8{,}3838}(-100000) = -11928,$$

so erhalten wir offensichtlich das gleiche Ergebnis.

Es ist zu beachten, daß man sowohl die Formel für die Errechnung des Endkapitals bei Zinseszinsen wie die Barwertformel auch für jeden der Abschnitte einer Reihe ungleichförmiger Zahlungen anwenden kann.

Beispiel 4. Eine bestimmte Maschine koste 10000 DM. Ihr Besitz würde es einer Gesellschaft erlauben, ein neues Produkt herzustellen, von dem sie erwarten kann, daß es ihre Gewinne innerhalb der nächsten fünf Jahre gemäß der folgenden Tabelle erhöht:

Jahr	Gewinnerhöhung
1	1000 DM
2	3000 DM
3	4000 DM
4	4000 DM
5	5000 DM

Nach fünf Jahren würde die Maschine verschrottet. Bei alternativen Investitionen könnte die Gesellschaft 10% des investierten Wertes pro Jahr verdienen. Sollte sie die Maschine kaufen?
Das zu lösende Problem besteht aus der Errechnung der Barwerte einer Reihe von Zahlungen. Es sei S_j der Wert eines bestimmten Fonds am Ende des j-ten Jahres. Wir suchen nun die Höhe einer Zahlung P_j, die, wenn sie zu 10% Zinseszinsen angelegt wird, nach j Jahren auf S_j angewachsen ist. Offensichtlich ist

$$P_j = \frac{S_j}{(1 + 0{,}10)^j}.$$

Betrachten wir fünf solcher Fonds, so ist der Barwert ihrer Summe $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$. Die Maschine sollte dann gekauft werden, wenn der Barwert P den jetzigen Kaufpreis der Maschine (10000 DM) übersteigt. Anderenfalls sollte man von dem Kauf Abstand nehmen. Abb. 3 zeigt die nun auszuführenden Rechnungen

j	S_j	P_j
1	1000	909
2	3000	2 479
3	4000	3 005
4	4000	2 732
5	5000	3 105
		12 230 = P

Abb. 3

Es ist also $P = 12230$ DM > 10000 DM, d. h. die Maschine sollte gekauft werden.

ÜBUNGEN

1. Wieviel muß jährlich zwei Jahre lang von einer Anleihe über 1000 DM zurückgezahlt werden, wenn 6% Zinsen berechnet werden und a) die Anleihe am Ende des Jahres zurückgezahlt sein soll, b) die Anleihe in zwei gleichen jährlichen Beträgen zurückgezahlt werden soll?

2. Ein Mann möchte seinen Sohn nach 15 Jahren auf die Universität schicken. Er mächte bis dahin gleiche jährliche Zahlungen leisten, die sich zum Zeitpunkt des Eintritts seines Sohnes in die Universität auf 5000 DM angesammelt haben. Wieviel muß er vierteljährlich zahlen, wenn ihm eine Versicherungsgesellschaft 4% Zinsen bei einer vierteljährlichen Abrechnung (d. h. 1% pro Quartal auf sein jeweiliges Guthaben) anbietet? [Lös.: 61,22 DM.]

3. Errechnen Sie die jährlichen Zahlungen, die geleistet werden müssen, um bei einem Zinssatz von 30% pro Jahr auf das jeweilige Guthaben innerhalb von 30 Jahren eine Million DM anzusammeln.

4. Eine Gesellschaft könne durch eine bestimmte Investition von 100000 DM zehn Jahre lang 20000 DM pro Jahr einsparen. Ermitteln Sie den Barwert dieser Investition, d. h. den Barwert der Ersparnisse abzüglich der Kosten der Investition, wenn die Gesellschaft bei alternativen Investitionen 10% pro Jahr verdienen kann. Sollte die Investition durchgeführt werden? [Lös.: 22890 DM; ja.]

5. Wie hoch muß der Betrag sein, der nach 30 Jahren bei 6% Zinsen pro Jahr und quartalsmäßiger Abrechnung (d. h. 1½% Zinsen werden pro Quartal gezahlt) auf 10000 DM angewachsen ist?

6. Errechnen Sie den Barwert einer nach 30 Jahren zu leistenden Zahlung von 10000 DM, wenn 10% Zinsen gezahlt werden und die Abrechnung a) jährlich, b) vierteljährlich bzw. c) monatlich erfolgt.

7. Eine Investition von 100000 DM solle innerhalb der nächsten fünf Jahre jährlich 25000 DM und innerhalb der darauf folgenden fünf Jahre jährlich 10000 DM Einsparungen ermöglichen. Errechnen Sie den Nettobarwert der Investition, wenn die Gesellschaft bei alternativen Investitionen jährlich 14% verdienen kann, a) indem Sie die Barwerte der Einsparungen der einzelnen Jahre errechnen, sie addieren und die Investitionskosten davon subtrahieren; b) indem Sie die Rentenbarwerte für die ersten fünf Jahre und für die zweiten fünf Jahre errechnen, den letzteren um fünf Jahre abzinsen, die dadurch erhaltenen Ergebnisse addieren und davon die Investitionskosten subtrahieren; c) indem Sie den Barwert einer über

zehn Jahre laufenden Rente von 10000 DM jährlich errechnen, dazu den Rentenbarwert einer fünfjährigen Rente von jährlich 15000 DM addieren und die Investitionskosten subtrahieren. Rechtfertigen Sie diese drei Methoden und zeigen Sie, daß sie alle drei zu den gleichen Ergebnissen führen. Sollte die Investition durchgeführt werden?

8. Ein Ausgangsguthaben P, das zu einem Zinssatz r pro Jahr verzinst wird, ergibt eine unendliche Reihe von Zahlungen in der Höhe $p = Pr$. Verdient man also an einem irgendwo investierten Kapital $r\%$ pro Jahr, so ist der Barwert einer unendlichen Reihe von Zahlungen in der Höhe von p pro Jahr $P = p/r$. Verifizieren Sie dies, indem Sie zeigen, daß die Barwertformel sich $P = -p/r$ annähert, wenn n unendlich groß wird.

9. Geben Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übung 8 eine wirtschaftswissenschaftliche Interpretation für die Größe

$$y_j = \frac{x_j + \frac{p}{r}}{(1+r)^j},$$

die in Gleichung (3) des Abschnittes 1 definiert wird. Benutzen Sie diese Interpretation, um zu zeigen, warum $y_{j+1} = y_j$ ist.

10. Eine Maschine A koste 6000 DM. Mit Hilfe dieser Maschine können zehn Jahre lang Gewinne von jährlich 1000 DM erreicht werden. Danach soll sie verkauft werden. Der Schrotterlös zu diesem Zeitpunkt sei 2000 DM. Sollte die Maschine gekauft werden, wenn man bei alternativen Investitionen einen Gewinn von jährlich 10% erreichen kann? Wie groß ist der Nettobarwert des Kaufes?
[Lös.: ja; 916 DM.]

11. Betrachten wir nun Maschine B. Sie erfülle den gleichen Zweck wie die in der vorhergehenden Übung beschriebene Maschine A. Sie koste 10000 DM, könne 14 Jahre lang benutzt werden, erreiche während dieser Zeit einen jährlichen Gewinn von 1500 DM und habe am Ende dieser 14 Jahre einen Schrottwert von 0.
   a) Wenn lediglich die Wahl bestünde, entweder Maschine B oder nichts zu kaufen, würde es sich dann lohnen, die Maschine zu kaufen? Welchen Nettobarwert hätte sie? [Lös.: ja; 1050 DM.]
   b) Wenn zwischen dem Kauf der Maschine A und dem der Maschine B zu wählen wäre, welches wäre dann die bessere Investition? Warum?

12. Eine Maschine werde für 20000 DM gekauft. Nach fünf Jahren soll ihr Schrottwert 8000 DM betragen, und man habe eine neue Maschine für 20000 DM zu kaufen. Bei alternativen Investitionen könne ein Gewinn von jährlich 10% erreicht werden. Welche jährlichen Abschreibungen müssen durchgeführt werden, um die neben dem Schrotterlös zum Kauf einer neuen Maschine benötigten 12000 DM anzusammeln?

13. Eine Ölquelle ergibt gewöhnlich jährliche Erträge von 100000 DM. Man nehme von einer bestimmten Quelle an, daß ihre Reserven bei einer gleichmäßigen Förderung wenigstens noch zehn Jahre reichen. Man könne nun eine Pumpe für 160000 DM kaufen, durch deren Installierung die doppelte Fördermenge erreicht werden könnte (und die erwartete Lebensdauer der Quelle halbiert werden könnte).
   a) Errechnen Sie die Einflüsse der Montage der Pumpe im jetzigen Zeitpunkt auf die Gewinne der nächsten zehn Jahre.
   b) Bestimmen Sie den Nettobarwert der Pumpe, wenn bei alternativen Investitionen 10% pro Jahr verdient werden können. Sollte die Investition durchgeführt werden? [Lös.: −16300 DM; nein.]

c) Welches Ergebnis hätte Übung b), wenn bei alternativen Investitionen 20% pro Jahr verdient werden könnten? [Lös.: +18870 DM; ja.]
d) Zu welchem Ergebnis käme man in Übung b), wenn bei alternativen Investitionen 50% pro Jahr zu verdienen wären? [Lös.: −9210 DM; nein.]

14. Eine Speditionsfirma kaufe ihre Wagen für je 10000 DM. Die jährlichen Betriebskosten und der Wiederverkaufspreis für einen j Jahre alten Wagen seien in der folgenden Tabelle für $j = 1, 2, 3, 4$ und 5 gegeben:

j	Jährliche Betriebskosten	Wiederverkaufspreis
1	1500 DM	6000 DM
2	2000 DM	5000 DM
3	2500 DM	4000 DM
4	3000 DM	2000 DM
5	4000 DM	1000 DM

Wir wollen annehmen, daß die jährlichen Betriebskosten *am Ende* des Jahres fallen. Betrachten Sie eine Geschäftspolitik, bei der die Wagen jeweils nach drei Jahren ersetzt werden. Zeigen Sie, daß ein Fonds von 17940 DM a) für die jährlichen Betriebskosten, die am Ende des ersten, zweiten und dritten Jahres fallen, ausreicht; b) aus ihm die 6000 DM gedeckt werden können, die zusätzlich zum Wiederverkaufserlös des alten Wagens benötigt werden, um am Ende des dritten Jahres einen neuen Wagen für 10000 DM zu kaufen; c) um am Ende des dritten Jahres über ein Guthaben von 17940 DM zu verfügen, wenn die Gesellschaft jährlich 20% des investierten Kapitals verdienen kann.

15. Verallgemeinern Sie das Ergebnis der Übung 14 wie folgt: Ein Anlagegut koste C. Sein Wiederverkaufspreis am Ende des j-ten Jahres sei S_j, wobei $0 \leqq S_j \leqq C$ und $S_{j+1} \leqq Sj$. Die Betriebskosten, die bis zum Ende des j-ten Jahres angefallen sind, seien durch p_j gegeben, wobei $p_{j+1} \geqq p_j > 0$. Jährlich können r% des investierten Kapitals verdient werden. Wie groß muß die Summe P sein, wenn aus ihr alle Unterhaltskosten gedeckt werden sollen, die Ersatzinvestitionen am Ende von n Jahren vorgenommen werden sollen und trotzdem am Ende von n Jahren noch ein Guthaben von P vorhanden sein soll? Zeigen Sie, daß die Lösung dieses Problems durch die folgenden Gleichungen für das Guthaben x_j nach j Jahren charakterisiert wird

(i) $$x_0 = P$$
(ii) $$x_{j+1} = (1 + r)x_j - p_{j+1}$$
(iii) $$x_n = C - S_n + P.$$

16. In Übung 15 sei $q_j = p_j/(1 + r)^j$ der Barwert der Betriebskosten im Jahr j. Beweisen Sie, daß die Lösung von i) und ii) wie folgt lautet:

(iv) $$x_j = (1 + r)^j[P - (q_1 + q_2 + \ldots + q_j)].$$

17. Zeigen Sie auf Grund von iii) und iv) der Übungen 15 und 16, daß die zu investierende Summe gegeben ist durch

(v) $$P = \frac{1}{(1 + r)^n - 1}[C - S_n + (1 + r)^n(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)].$$

Verwenden Sie diese Formel zur Errechnung des Ergebnisses der Übung 14.

18. Benutzen Sie die Formel (v), um die notwendige Investition P in Übung 14 zu errechnen, wenn $n = 1, 2, 4$ und 5. Welches ist die optimale Politik für die vorzunehmenden Ersatzinvestitionen?
[Teillös.: $n = 2$, $P = 20000$ DM für $n = 4$, $P = 18138$ DM.]

19. Der Barwert einer Zahlung von $-p$, die nach j Jahren zu leisten ist, sei $-p/(1+r)$. Leiten Sie die Rentenbarwertformel für eine Reihe von n solcher Zahlungen ab, die am Ende der ersten Zeiteinheit beginnen, indem Sie unter Verwendung der Ergebnisse der Übung 14, Abschnitt 1, die entsprechenden Reihen summieren.

20. Der Endwert eines auf Zinseszins stehenden Betrages p sei nach j Jahren $p(1+r)^j$. Leiten Sie unter Verwendung der Ergebnisse der Übung 14, Abschnitt 1, die Gleichung (8) ab, indem Sie die entsprechenden Reihen summieren.

3. Auflösung nach dem Zinssatz und der Anzahl der Zahlungen

Gleichung (9) enthält fünf Variable: P, S, p, n, r. In Abschnitt 2 zeigten wir, wie man die fünfte Variable findet, wenn r und n sowie zwei der anderen Variablen gegeben sind. In dem vorliegenden Abschnitt wollen wir annehmen, daß P, S, p und entweder r oder n gegeben sind, und wir werden dann Methoden besprechen, mit deren Hilfe man die andere der Variablen ermitteln kann. Wir wollen gleichfalls Interpretationen zu diesen Lösungen der Gleichung (9) geben.

Wir wollen damit beginnen, n zu errechnen, wenn P, S und p und r gegeben sind. Wir lösen zunächst die Gleichung (9) nach $(1+r)^n$ auf und erhalten

$$(1+r)^n = \frac{Sr+p}{Pr+p}, \quad r > 0. \tag{10}$$

Es ist nicht schwierig, die Bedingungen zu finden, unter denen (10) eine Lösung hat. Für ein festgelegtes r vergrößert sich die linke Seite der Gleichung (10), wenn n wächst. Da $(1+r)^0 = 1$, kann $(1+r)^n$, wenn n wächst, alle Werte annehmen, die größer sind als 1. (10) wird also dann eine Lösung haben, wenn $n > 0$ und die rechte Seite der Gleichung größer als 1 ist, d. h. wenn

$$\frac{Sr+p}{Pr+p} > 1. \tag{11a}$$

Rufen wir uns die Regeln für Rechenoperationen mit Ungleichungen ins Gedächtnis zurück, so können wir leicht zeigen, daß diese Bedingung unter den folgenden Umständen erfüllt wird: Entweder ist

$$P + \frac{p}{r} > 0 \text{ und } S > P \tag{11b}$$

oder es ist

$$P + \frac{p}{r} < 0 \text{ und } S < P. \tag{11c}$$

Jede dieser Bedingungen garantiert eine Lösung, bei der $n > 0$ ist, wobei die Lösung gewöhnlich jedoch keine ganze Zahl sein wird.

Daß diese Bedingungen einen ökonomischen Sinn haben, können wir leicht sehen, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß p/r (siehe Übung 8, Abschnitt 2) der Barwert einer Annuität p ist, die mit dem Zinssatz von r pro Jahr verzinst wird. Ist also $P + (p/r) < 0$, so kann das Guthaben nie ansteigen, und wir können als Endkapital S nie einen größeren Betrag erhalten als das Anfangskapital P. Entsprechend muß $S < P$ sein, wie (11c) angibt. In ähnlicher Weise kann man die Bedingung (11b) interpretieren.

Beispiel 1. Eine Hypothek von 30000 DM sei durch jährliche Zahlungen von 2000 DM zu tilgen. Wie lange wird es dauern, bis die Hypothek auf 10000 DM zusammengeschmolzen ist, wenn auf den offenstehenden Betrag jährlich 5% Zinsen zu zahlen seien? Uns sind folgende Werte gegeben: $P = 30000$, $S = 10000$, $r = 0{,}05$ und $p = -2000$. Gesucht ist n. Da

$$P + \frac{p}{r} = 30000 \text{ DM} - \frac{2000 \text{ DM}}{0{,}05} = -10000 \text{ DM} < 0$$

$$S = 10000 \text{ DM} < P = 30000 \text{ DM}$$

und somit die Bedingung (11c) erfüllt wird, hat das Problem eine Lösung. Wir errechnen nun

$$\frac{Sr + p}{Pr + p} = \frac{(10000)\,(0{,}05) + (-2000)}{(30000)\,(0{,}05) + (-2000)} = 3$$

und finden in Tabelle III, daß

$$(1 + 0{,}05)^{20} = 2{,}6533 \text{ und } (1 + 0{,}05)^{25} = 3{,}3864.$$

Bei einer groben Interpolation können wir sagen, daß n ungefähr 22 Jahre ist.

Beispiel 2. Es bestehe die Möglichkeit, eine Maschine zu kaufen, mit deren Hilfe wir einen jährlichen Gewinn von 1000 DM erreichen könnten. Die Maschine koste 6000 DM und habe am Ende ihrer Lebensdauer, unabhängig von der Anzahl der Jahre, die sie benutzt wird, einen Wiederverkaufswert von 2000 DM. Wie viele Jahre muß die Maschine mindestens zu benutzen sein, um sie gleich attraktiv wie andere Investitionen zu machen, wenn man bei alternativen Investitionen pro Jahr 12% deren Wertes verdienen kann? Wir können das Problem in folgende Form kleiden: $P = 6000$, $p = -1000$, $r = 0{,}12$ pro Jahr; innerhalb von wie vielen Jahren wird das Guthaben $S = 2000$?

Eine Lösung ist vorhanden, da

$$P + \frac{p}{r} = 6000 \text{ DM} + \frac{-1000 \text{ DM}}{0{,}12} = -2333 \text{ DM} < 0$$

und $S = 2000 < P = 6000$, so daß die Bedingung (11c) erfüllt wird. Wir errechnen nun

$$\frac{Sr + p}{Pr + p} = \frac{(2000)\,(0{,}12) - 1000}{(6000)\,(0{,}12) - 1000} = 2{,}71$$

und finden in Tabelle III, daß

$$(1 + 0{,}12)^{8} = 2{,}4760 \text{ und } (1 + 0{,}12)^{9} = 2{,}7731.$$

n ist daher gerade etwas kleiner als 9 Jahre. Kann die Maschine also länger als 9 Jahre benutzt werden, so ist ihr Kauf attraktiver als eine andere Investition, kann sie weniger als 9 Jahre benutzt werden, so sollte man das Geld lieber auf andere Weise investieren.

Bei Problemen, bei denen man sich zu entscheiden hat, sein Geld in einem bestimmten Anlagegut zu investieren oder nicht, und bei dem P, S, p und r gegeben sind, nennt man das n, das Gleichung (10) erfüllt, die *Amortisationsdauer* (payback period). Dieses n entspricht in gewissem Sinne einer „Nutzenschwelle". Übersteigt die erwartete Lebenszeit des Gutes die Amortisationsdauer, so sollte man diese Investition anderen Investitionen vorziehen, ist die geschätzte Lebenszeit kürzer, so sollte man sich nicht für einen Kauf dieses Gutes entscheiden.

Wir wollen nun zu (10) zurückkehren und annehmen, daß r die unbekannte Größe sei. Dieser Fall ist schwieriger zu lösen als der zuvor behandelte, und wir wollen zunächst den wichtigen Sonderfall betrachten, bei dem $S = 0$. Wir haben hier einen Ausgangsbetrag von P, der im Laufe der Zeit auf 0 reduziert wird (z. B. im Falle einer Anleihe). Daher ist p immer negativ. Es sei $Z = -P/p$ die Anzahl der Zahlungen, die notwendig wäre, wenn kein Zins berechnet würde. Wir können in diesem Fall von (10) ableiten, daß

$$Z = -\frac{P}{p} = \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}. \tag{12}$$

Die rechte Seite von (12) stellt hier den in Tabelle IV gegebenen Barwertsfaktor dar. Wir können das Problem also mit Hilfe dieser Tabelle lösen. Wir kennen Z und n. Wir suchen nun in der n entsprechenden Zeile bis wir Z finden, das uns das gewünschte r angibt. Taucht Z nicht in seinem genauen Wert in dieser Zeile auf, so führen wir eine grobe Interpolation durch. Da der Barwert mit r abnimmt, wird die Antwort eindeutig sein.

Beispiel 3. Eine Bank biete einen Kleinkredit von 2000 DM an, der innerhalb von zwei Jahren mit monatlichen Zahlungen von 92,62 DM zurückzuzahlen ist. Welchen Zinssatz wendet die Bank an? Hier ist $Z = 2000/92{,}62 = 21{,}6$ und $n = 24$ Monate. In der Zeile $n = 24$ finden wir in der Tabelle IV, daß $r = 0{,}0075$ den Wert 21,89 ergibt, während $r = 0{,}01$ zum Wert 21,24 führt. Mit Hilfe einer groben Interpolation erhalten wir $r = 0{,}0086$ oder einen Zinssatz von 0,86% pro Monat (mit monatlicher Abrechnung), d. h. mehr als 10% jährlich. Bezüglich des bei jährlicher Abrechnung anzuwendenden Zinssatzes siehe Übung 1 des Abschnittes 4.

Ist S nicht 0, so müssen wir es mit einer trial-and-error-Methode versuchen. Wir müssen eine Reihe von Werten für r in (10) einsetzen, das Verhältnis der zwei Seiten für jedes r errechnen und das $r > 0$ ermitteln, für das das Verhältnis 1 ist.

Beispiel 4. Nehmen Sie an, daß die Maschine in Beispiel 2 7 Jahre brauchbar bleibe und daß der Zinssatz gesucht werde, bei dem ein Betrag von 6000 DM ausreicht, um 7 Jahre lang Zahlungen in Höhe von 1000 DM für Betriebskosten auszuwerfen und danach noch ein Guthaben von 2000 DM aufzuweisen. In Abb. 4 sind verschiedene Werte für $(1+r)^7$ und

$$\frac{Sr+p}{Pr+p} = \frac{2000r - 1000}{6000r - 1000}$$

für verschiedene Werte von $r \geqq 0$ angegeben.

r	$(1+r)^n$	$\frac{Sr+p}{Pr+p}$	$\frac{Sr+p}{Pr+p} \div (1+r)^n$
0	1,000	1,000	1,00
0,02	1,149	1,091	0,95
0,04	1,316	1,211	0,92
0,06	1,504	1,375	0,91
0,08	1,714	1,615	0,94
0,09	1,828	1,783	0,98
0,10	1,949	2,000	1,03
0,12	2,211	2,714	1,23

Abb. 4

Der erforderliche Zinssatz liegt also zwischen 9 und 10%.

P sei der für eine Schuldverschreibung zu zahlende Preis, S der Nennwert des Papieres, p die Höhe periodischer Zinszahlungen und n die Anzahl der bis zur Fälligkeit vergehenden Perioden. Der oben errechnete Zinssatz wird die *Rendite* pro Periode bis zur Fälligkeit genannt. Wir werden ein Beispiel der Errechnung der Rendite besprechen, nachdem wir nominale und äquivalente Zinssätze besprochen haben (s. Beispiel 4, Abschnitt 4).

Bei Problemen, bei denen Investitionsentscheidungen zu fällen sind, ist P der für eine Anlage bezahlte Preis, S ihr Wiederverkaufspreis nach n Jahren, p der jährliche Ertrag durch die Anlage (siehe Beispiel 4), und der Zinssatz r, der Bedingungen (10) oder (11) genügt, wird *interner Amortisationssatz* genannt. Wie die Amortisationszeit, so ist auch er eine Art Nutzschwelle. Wenn der interne Amortisationssatz einer Anlage größer ist als der mit anderen Investitionen zu erzielende Gewinn, so sollte die Anlage gekauft werden. Andernfalls sollte man auf die Anlage verzichten.

Selbst dann, wenn die zu leistenden Zahlungen nicht gleich sind oder wenn die Investition nicht durch eine einzelne Zahlung am Beginn finanziert wird, können wir den internen Amortisationssatz als den Zinssatz r *definieren*, durch den der Nettobarwert aller Zahlungen (Investition, jährliche Gewinne und Wiederverkaufsertrag) Null wird. Unter bestimmten Umständen können *zwei* verschiedene Zinssätze bestehen, die beide diese Bedingung erfüllen (siehe Übung 2). Um unter diesen Umständen den internen Amortisationssatz zu bestimmen, müssen wir stets nach der trial-and-error-Methode vorgehen.

Beispiel 5. Durch die sofortige Investition von 3400 DM und von 2000 DM nach zwei Jahren können Gewinne von $1000 + 200\,j$ pro Jahr jeweils im j-ten Jahr erzielt werden, wobei $j = 1, 2, \ldots, 6$ ist. Danach sei durch die Investition kein Gewinn mehr zu erzielen, und der Wiederverkaufspreis sei Null. Wie hoch ist der interne Amortisationssatz?

Die Abb. 5 zeigt die Kapitalbewegungen in den Jahren von 0 bis 6.

Abb. 6 zeigt dann die Barwerte dieser Kapitalbewegungen für verschiedene Werte von $r \geqq 0$. Der interne Amortisationssatz liegt etwas unter 25%.

Jahr	Nettokapital-bewegung
0	—3400 DM
1	+1200 DM
2	— 600 DM
3	+1600 DM
4	+1800 DM
5	+2000 DM
6	+2000 DM

Abb. 5

r	Barwerte der Netto-kapitalbewegung
0,001	4800 DM
0,05	3271 DM
0,10	2111 DM
0,20	518 DM
0,25	—36 DM
0,30	— 479 DM
0,35	— 839 DM
0,40	—1133 DM

Abb. 6

ÜBUNGEN

1. Bestimmen Sie in Übung 4 des Kapitels 2 die Amortisationsdauer und den internen Amortisationssatz.
2. Bestimmen Sie in Übung 13, Abschnitt 2, die internen Amortisationssätze. Zeigen Sie, daß zwei solcher Sätze bestehen, und interpretieren Sie ihre Ergebnisse.
3. Gibt es in Übung 13 des Abschnittes 2 eine Amortisationsdauer?
4. Bestimmen Sie in Übung 10, Abschnitt 2, die Amortisationsdauer unter der Voraussetzung, daß die Maschine unabhängig vom Zeitpunkt ihres Verkaufes einen Wiederverkaufspreis von 2000 DM hat. Bestimmen Sie unter den gleichen Bedingungen den internen Amortisationssatz.
5. Bestimmen Sie in Übung 11, Abschnitt 2, die Amortisationsdauer und den internen Amortisationssatz. Vergleichen Sie die Wertigkeit der Maschinen in Übung 10 und 11 dieses Abschnittes, wenn man sie a) nach ihrem Nettowert, b) nach ihrem Nettobarwert pro investierter DM, c) nach ihrer Amortisationsdauer, d) nach ihrem Amortisationssatz beurteilt. [Teillös.: a) Besser; b) A; c) S; d) A.]
6. Eine Person nehme bei einer bestimmten Bank eine Anleihe von 500 DM auf, die sie in 24 gleichen monatlichen Raten in der Höhe von 26,19 DM zurückzahle. Welchen monatlichen abrechenbaren Zinssatz berechnet die Bank?
7. Betrachten Sie die folgenden zwei Probleme:
   a) Aus einem Fonds mit dem Anfangsguthaben von 100000 DM seien fünf jährliche Zahlungen von je 10000 DM zu leisten. Welcher Zinssatz müßte für den

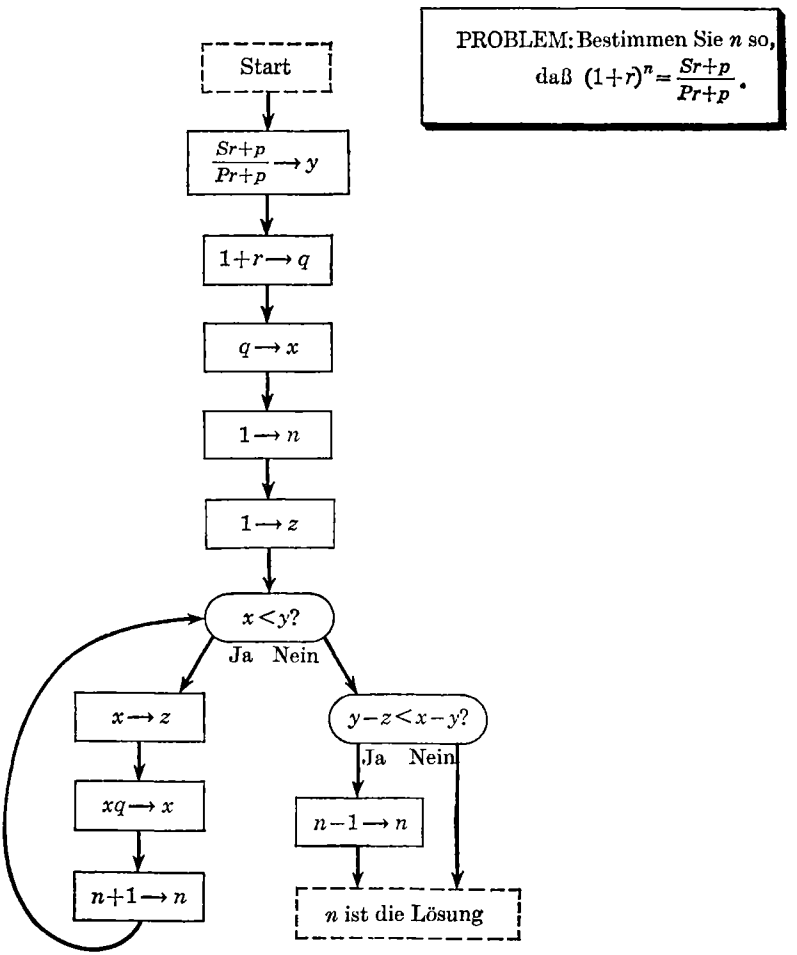
jeweiligen Guthabenstand gerechnet werden, um am Ende des fünften Jahres über ein Guthaben von 20000 DM zu verfügen?

d) An einem Fonds mit einem Anfangsbestand von 50000 DM seien zehn jährliche Zahlungen von je 10000 DM zu leisten. Welcher Zinssatz wäre zu berechnen, um am Ende des zehnten Jahres ein Guthaben von 120000 DM zu haben?

Zeigen Sie, daß es bei keinem der beiden Probleme ein $r \geqq 0$ gibt, das die gestellten Bedingungen erfüllt.

8. Zeigen Sie, daß für $r \geqq 0$ in (10) bei gegebenem P, S, n und p nur dann eine Lösung vorhanden sein kann, wenn $S \geqq p + np$. Erfüllten die Probleme der Übung 7 diese Bedingung?

9. Zeigen Sie, daß das folgende Flußdiagramm einen Rechenprozeß zur Ermittlung der Amortisationsdauer darstellt.



10. Stellen Sie ein Flußdiagramm auf, mit dessen Hilfe man den Amortisationssatz r berechnen kann, wenn P, n und p gegeben sind und $S = 0$ ist. Nehmen Sie dabei an, daß ein Unterprogramm für die Errechnung von $(1 + r)^j$ existiere.

4. Nomineller und tatsächlicher Zinsfuß

Bis jetzt haben wir stets angenommen, daß der Zahlungsintervall mit der Abrechnungsperiode übereinstimmt. Diese Voraussetzung ist jedoch auf keinen Fall notwendig. Wir können ohne Schwierigkeiten einen Zusammenhang zwischen den Zinsfüßen verschiedener Abrechnungszeiträume herstellen. Wenn wir von einem Zinsfuß von 6% pro Jahr und einer quartalsweisen Abrechnung sprechen, so meinen wir in Wirklichkeit einen Zinsfuß von $1/4 \cdot 6\% = 1{,}5\%$ und eine viermalige Zinsabrechnung pro Jahr. Wir nennen die 6% den nominellen Zinsfuß; im Unterschied dazu gibt es einen tatsächlichen Zinsfuß bei jährlicher Abrechnung, der größer ist als 6% und der dem nominellen Zinsfuß von 6% und quartalsweiser Abrechnung entspricht.

Es sei r' ein nomineller Zinsfuß mit m-maliger Abrechnung pro Jahr. Wie groß ist dann der äquivalente, tatsächliche Zinsfuß r bei jährlicher Abrechnung? Betrachten Sie den Endwert S eines Kapitals P nach N Jahren bei einem Zinsfuß von r'/m und einer Abrechnung, die alle $1/m$ Jahre erfolgt. Wir können dann die Frage stellen, welcher jährlich abgerechnete tatsächliche Zinsfuß r aus dem Ausgangskapital P nach der entsprechenden Zeit den gleichen Endbetrag S macht. Im ersten Fall gibt es mN Perioden, so daß

$$S = P\left(1 + \frac{r'}{m}\right)^{mN};$$

Im zweiten Fall gibt es N Perioden und

$$S = P(1 + r)^N.$$

Wir suchen also das r, für das

$$P(1 + r)^N = P\left(1 + \frac{r'}{m}\right)^{mN}.$$

Dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch P, ziehen die N-te Wurzel und subtrahieren dann von beiden Seiten der Gleichung 1, so erhalten wir

$$r = \left(1 + \frac{r'}{m}\right)^m - 1. \tag{13}$$

Beachten Sie, daß dieses Ergebnis unabhängig von N und P ist. Wir können direkt Tabelle III verwenden, um den, einem gegebenen nominellen Zinsfuß entsprechenden, tatsächlichen Zinsfuß zu ermitteln. Umgekehrt können wir diese Tabelle auch verwenden, um den nominellen Zinsfuß zu ermitteln, der einem gegebenen tatsächlichen Zinsfuß entspricht.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, es würden 6% Zinsen jährlich berechnet und die Abrechnung erfolge monatlich. Die 6% sind dann der nominelle Zinsfuß r', und m ist gleich 12. Der tatsächliche jährliche Zinsfuß ist dann

$$r = \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12} - 1 = (1 + 0{,}005)^{12} - 1.$$

Aus Tabelle III ersehen wir nun, daß $(1{,}005)^{12} = 1{,}0617$ und daher $r = 0{,}0617$ oder ungefähr $6^1/_6\%$ ist.

Eine gute Annäherung an den tatsächlichen Zinsfuß kann durch Anwendung des binomischen Satzes (siehe Kapitel 3, Abschnitt 8) auf Gleichung (13) erreicht werden. Wir erhalten dann

$$r = 1 + \binom{m}{1}\left(\frac{r'}{m}\right)^1 + \binom{m}{2}\left(\frac{r'}{m}\right)^2 + \ldots - 1 = r' + \left(\frac{m-1}{2m}\right) r'^2 + \ldots$$

Es ist also

$$r \approx r' + \frac{m-1}{2m}\, r'^2. \tag{14}$$

(Bezüglich der Genauigkeit dieser Annäherung siehe Übung 6—7.) Bitte beachten Sie, daß die durch (14) gegebene Abschätzung immer kleiner als der wahre Wert von r ist, da in der Annäherung positive Werte der binomischen Reihe unberücksichtigt blieben.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Benutzen wir anstatt (13) Gleichung (14), so erhalten wir

$$r \approx 0{,}06 + \left(\frac{11}{24}\right)(0{,}0036) = 0{,}06165,$$

wohingegen die richtige Antwort 0,06168 wäre. Wir sehen, es besteht eine weitgehende Übereinstimmung.

Beispiel 2. Eine Bank zahle 4% Zinsen und rechne quartalsweise ab. Wie groß ist der äquivalente tatsächliche jährliche Zinsfuß bei jährlicher Abrechnung?
Hier ist $r' = 0{,}04$ und $m = 4$. Daher gilt $r = (1{,}01)^4 - 1 = 0{,}0406$; der tatsächliche Zinsfuß ist also 4,06%. Die Annäherungsformel (14) ergibt $0{,}04 + (3/8)(0{,}0016) = 0{,}0406$, was bis zur vierten Dezimale mit dem gerade genannten Ergebnis übereinstimmt.

Beispiel 3. Eine Hypothek von 50000 DM solle innerhalb von 12 Jahren mit 48 gleichen quartalsmäßigen Zahlungen abgetragen werden. Wie groß sollten die Zahlungen sein, wenn auf den jeweils offenstehenden Betrag ein Zinsfuß von 8,2% mit jährlicher Abrechnung berechnet wird?
Unter Benutzung von (13) und Tabelle III sehen wir, daß

$$0{,}082 = \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^4 - 1,$$

so daß $r' = 0{,}08$ und $r'/m = 0{,}02$. Wir wenden nun die Tilgungsformel an und wählen als Zeitspanne ein Vierteljahr. Nach Tabelle IV ist der Rentenbarwert für 48 Zahlungen bei einem Zinsfuß von 2% 30,67.

Daher ergibt sich nach Abb. 2

$$p = \frac{1}{30{,}67}(-50000) = -1630,$$

d. h. also, mit vierteljährlichen Zahlungen von 1630 DM kann die Hypothek innerhalb von 12 Jahren getilgt werden.

Beispiel 4. Ein Geschäftsmann könne ein bestimmtes Rentenpapier für 846,63 DM kaufen. Bei der Fälligkeit des Papiers nach 24 Jahren erhalte der Besitzer den Nennwert von 1000 DM. Der zu zahlende Zinsfuß für das Papier sei 3%, halbjährlich zahlbar, d. h. der Besitzer erhalte zweimal im Jahr 15 DM Zinsen. Welche Rendite wirft das Papier ab?

Wir wollen als Zeiteinheit ein halbes Jahr wählen und den Zinsfuß für eine halbjährliche Abrechnung errechnen. Diesen übersetzen wir dann in den für jährliche Abrechnung. Es ist also $P = 846{,}63$, $S = 1000$, $p = 15$ und $n = mN = 2 \cdot 24 = 48$. Eine Lösung ist vorhanden, da

$$S = 1000 > P + np = 846{,}63 + (48)(-15) = 126{,}63$$

und $S > P$ (siehe Übung 8, Abschnitt 3). Wenn wir verschiedene Werte für r in (10) einsetzen, so finden wir, daß

$$(1 + 0{,}02)^{48} = \frac{(1000)(0{,}02) - 15}{(846{,}63)(0{,}02) - 15},$$

d. h. also $r'/m = r'/2 = 0{,}02$. Es ist also

$$r = (1 + 0{,}02)^2 - 1 = 0{,}0404 = 4{,}04\%.$$

ÜBUNGEN

1. Bestimmen Sie in Beispiel 3 des Abschnittes 3 den tatsächlichen Zinsfuß für jährliche Abrechnung. [Lös.: $r \approx 0{,}108$.]

2. Bestimmen Sie in Übung 6, Abschnitt 3, den tatsächlichen Zinsfuß.

3. Bestimmen Sie den tatsächlichen Zinsfuß, der äquivalent einem Zinsfuß von 12% a) bei monatlicher Abrechnung, b) bei quartalsmäßiger Abrechnung und c) bei halbjährlicher Abrechnung ist. [Lös.: a) 12,68%, b) 12,55%, c) 12,36%.]

4. Bestimmen Sie den tatsächlichen Zinsfuß, der äquivalent dem Zinsfuß von 100% bei a) jährlich zweimaliger Abrechnung, b) jährlich fünfmaliger Abrechnung, c) jährlich zehnmaliger Abrechnung, d) jährlich zwanzigmaliger Abrechnung und e) jährlich 100maliger Abrechnung ist. Scheint der tatsächliche Zinsfuß ins Unendliche zu steigen, wenn der Abrechnungszeitraum immer kleiner wird? Es kann gezeigt werden, daß der tatsächliche Zinsfuß sich $e^{r'} - 1$ annähert, wenn der Abrechnungszeitraum immer kleiner wird. Hierbei ist r' der nominelle Zinsfuß, und $e = 2{,}718\ldots$ ist die in Kapitel V, Abschnitt 5, erwähnte Zahl e. D. h. bei $r' = 1{,}00$ nähert sich r 1,718 ...). [Teillös.: e) $r = 1{,}01^{100} - 1 = 1{,}01^{96} \cdot 1{,}01^4 - 1 = (2{,}5993)(1{,}0406) - 1 = 1{,}7048$.]

5. Bestimmen Sie die nominellen Zinsfüße bei quartalsmäßiger Abrechnung, die äquivalent zu den folgenden tatsächlichen Zinsfüßen sind:
   a) 4,06%, b) 6,14%, c) 8,24%, d) 10,38%.

6. Ermitteln Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes eine bessere Annäherung für r als mit Gleichung (14).

7. Welche größte Verbesserung kann in Übung 6 erreicht werden, wenn r' höchstens 10% ist?
8. Zeigen Sie unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes, daß dann, wenn $n\epsilon$ klein ist,

   (vi) $$[(1 + r) + \epsilon]^n \approx (1 + r)^{n-1}[1 + r + n\epsilon]$$

   gilt.
9. Bestimmen Sie unter Benutzung der Tabelle III und der Formel (vi) einen Näherungswert für $(1{,}0617)^{20}$.
10. Bestimmen Sie unter Benutzung der Ergebnisse von Beispiel 1 und Übung 6 das Endkapital nach 20 Jahren, wenn 1 DM bei monatlicher Abrechnung mit einem nominellen jährlichen Zinsfuß von 6% verzinst wird. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Endkapital bei der Verzinsung von 1 DM zu 0,5% pro Zeitabschnitt über die Zeitdauer von 240 Zeitabschnitten.
11. Bestimmen Sie unter Benutzung von Gleichung (14) und dem Ergebnis der Übung 8 den Rentenendwert am Ende des vierten Jahres, wenn vierteljährlich 100 DM eingezahlt werden und das Geld bei vierteljährlicher Abrechnung mit einem nominellen Zinsfuß von 6% verzinst wird.

*5. Steuereinsparungen durch Abschreibungen

Wir haben gesehen (siehe Übung 4, Abschnitt 2), daß es unter bestimmten Umständen eine rationale Politik sein kann, Investitionsentscheidungen so zu fällen, daß der Nettobarwert zukünftiger Einsparungen maximiert wird. Nun sind ausgewiesene Gewinne der Gesellschaften natürlich steuerpflichtig. Es ist daher das Recht eines jeden Geschäftsmannes und gewöhnlich auch sein Ziel, sich so zu verhalten, daß er den Barwert zukünftiger Einsparungen nach Abzug der Steuern maximiert, ohne dabei die Steuergesetze zu verletzen. Um also verschiedene Verhaltensweisen zu bewerten, müssen wir die Wege kennen, die Einflüsse der Steuern auf die gemachten Gewinne zu berechnen.

Bei Gesellschaften wird unter anderem der Gewinn versteuert. Zum Zeitpunkt des Entstehens dieses Buches war die Körperschaftsteuer für nicht ausgeschüttete Gewinne unbeschränkt steuerpflichtiger Kapitalgesellschaften mit einem Vermögen von mehr als fünf Millionen DM 51% des Einkommens. Wir wollen diesen Steuersatz t nennen, wobei $0 \leqq t < 1$ ist. So ist z. B. im Jahre 1962 $t = 0{,}51$.

Diese Steuer ist auf Grund der *ausgewiesenen* Gewinne zu bezahlen. Gewöhnlich stimmen die ausgewiesenen Gewinne jedoch mit den wirklichen Gewinnen nicht überein. So hat z. B. eine Investition von 10000 DM durch den Kauf einer Maschine keinen direkten Einfluß auf die ausgewiesenen Gewinne, auf Grund derer die Steuer zu zahlen ist, obwohl sie die ausschüttbaren Gewinne um 10000 DM mindert. Eine Anlage im Werte von 10000 DM

kann jedoch innerhalb einer bestimmten Anzahl von Jahren *abgeschrieben* werden. Die Abschreibungsbeträge beeinflussen dabei nicht den ausschüttbaren Gewinn, obwohl sie den ausgewiesenen Gewinn reduzieren, auf Grund dessen die Steuern zu zahlen sind, und somit den zu zahlenden Steuerbetrag verkleinern.

Die ausgewiesenen Gewinne einer gewöhnlich mit Gewinn arbeitenden Gesellschaft werden mit dem Steuersatz t versteuert. Da dieser Steuersatz im Falle der Körperschaftsteuer unabhängig von dem Umfang der ausgewiesenen Gewinne ist, ruft jedes Anwachsen der ausgewiesenen Gewinne ein proportionales Ansteigen der zu zahlenden Steuer hervor. Entsprechend wird durch jedes Fallen der Gewinne eine Verkleinerung des zu zahlenden Steuerbetrages erreicht. Ist z. B. der Steuersatz $t = 0{,}51$, und werden die Gewinne um jährlich 100000 DM gesenkt, so sinkt der Gewinn nach Steuerabzug lediglich um 100000 DM $(1 - t) = 49000$ DM. Fallen entsprechend die *ausgewiesenen* Gewinne (z. B. durch Abschreibungen) um 100000 DM, während der ausschüttbare Gewinn gleichbleibt, so *steigt* der ausschüttbare Gewinn nach Steuerabzug um 100000 DM $t = 51000$ DM. Aus steuerlichen Gründen kann ein Anlagegut, das zum Preise von C erworben wurde, innerhalb von D Jahren *abgeschrieben* werden. Die Summe aller D Beträge, die als Abschreibung abgesetzt werden, wird dem ursprünglichen Wert C abzüglich des Wiederverkaufspreises S gleich sein. Im Rahmen dieses und des nächsten Abschnittes wollen wir jedoch annehmen, daß kein Wiederverkaufswert bestehe, man also durch einen Verkauf der abgeschriebenen Anlage keinen Erlös mehr erzielen könne (in Übung 4 wird der Einfluß des Schrottwertes auf die Abschreibungssätze diskutiert).

Wir wollen hier als Beispiele drei mögliche Abschreibungsmethoden[1] betrachten: Die lineare Abschreibung, die digitale Abschreibung und die geometrisch degressive Abschreibung. Daneben existieren noch verschiedene andere Abschreibungsmethoden (siehe Übung 3).

Bei der linearen Abschreibung wird jedes Jahr der Betrag $\frac{C}{D}$ abgeschrieben.

Bei der digitalen Methode wird zunächst die Summe

$$1 + 2 + \ldots + (D-1) + D = \tfrac{1}{2}D(D+1)$$

(siehe Übung 15, Abschnitt 1) errechnet. Im ersten Jahr wird dann ein Betrag $\frac{D}{\frac{1}{2}D(D+1)} \cdot C$ abgeschrieben, im zweiten Jahr ein Betrag von $\frac{D-1}{\frac{1}{2}D(D+1)} \cdot C$ usw. Im j-ten Jahr beläuft sich die Abschreibung dementsprechend auf $\frac{D-j+1}{\frac{1}{2}D(D+1)} \cdot C$, wobei $1 \leqq j \leqq D$ ist.

[1] Der zulässige degressive Abschreibungssatz darf jedoch bei Wirtschaftsgütern, die nach dem 8. 3. 1960 abgeschafft wurden, höchstens das Zweifache des linearen Satzes betragen. [Der Übersetzer.]

Bei der hier behandelten geometrisch degressiven Methode wird jedes Jahr der doppelte Satz der linearen Methode, auf den Restbuchwert bezogen, abgeschrieben. Der Abschreibungsbetrag im ersten Jahr beträgt also $2C/D$ und der Restbuchwert danach

$$C - \frac{2C}{D} = C\left(1 - \frac{2}{D}\right).$$

Im zweiten Jahr beträgt der Abschreibungsbetrag

$$\frac{2}{D} C\left(1 - \frac{2}{D}\right)$$

und der Restbuchwert wird

$$C\left(1 - \frac{2}{D}\right) - \frac{2}{D} C\left(1 - \frac{2}{D}\right) = C\left(1 - \frac{2}{D}\right)^2.$$

Im j-ten Jahr werden also

$$\frac{2}{D} C\left(1 - \frac{2}{D}\right)^{j-1}$$

abgeschrieben, und der Restbuchwert am Ende dieses Jahres ist $C\left(1 - \frac{2}{D}\right)^j$. Da der Restbuchwert bei dieser Methode nie 0 wird, besteht für die Gesellschaft zu jedem Zeitpunkt[1] die Möglichkeit, vor dem Ende des D-ten Jahres auf die normale, lineare Abschreibungsmethode überzuwechseln. Wird dieser Wechsel vom Beginn des k-ten Jahres an vorgenommen, wobei $1 \leqq k \leqq D$ ist, so wird der Restbuchwert $C\left(1 - \frac{2}{D}\right)^{k-1}$ betragen, der dann gleichmäßig über die noch verbleibenden $D - k + 1$ Jahre verteilt wird. Wendet man also zunächst die geometrisch degressive Methode an und wechselt dann auf eine normale, lineare Abschreibungsmethode am Anfang des k-ten Jahres über, so beträgt die Abschreibung des j-ten Jahres

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{D} C\left(1 - \dfrac{2}{D}\right)^{j-1} & \text{mit } 1 \leqq j < k \leqq D, \\ \dfrac{C(1 - 2/D)^{k-1}}{D - k + 1} & \text{mit } k \leqq j \leqq D. \end{cases}$$

Beispiel. Betrachten Sie den Kauf eines Anlagegutes zum Preis von $C = 15000$ DM, das innerhalb von $D = 5$ Jahren abgeschrieben werden kann. Abb. 7 zeigt die Beträge, die bei den verschiedenen Methoden in den einzelnen Jahren abgeschrieben werden können. Hierbei bedeutet (1) eine normale, lineare Abschreibung, (2) die arithmetisch degressive digitale Abschreibungsmethode, (3) die geometrisch degressive Abschreibungsmethode, bei der bei a) im dritten Jahr, bei b) im vierten Jahr und bei c) im fünften Jahr auf die lineare Abschreibungsmethode übergewechselt wird. Überprüfen Sie alle diese Zahlen und beachten Sie, daß in jedem Fall die Summe der Abschreibungen innerhalb von fünf Jahren gleich dem Einkaufspreis der Anlage von 15000 DM ist.

[1] Der Übergang von der degressiven zur linearen Abschreibung ist in Deutschland gemäß § 7 Abs. 3 ESTG zugelassen; der Übergang von der linearen zur degressiven Abschreibung ist jedoch für unzulässig erklärt worden.

Jahr	(1) Linear	(2) Digital	(3) Geometrisch degressiv (a) $k = 3$	(b) $k = 4$	(c) $k = 5$
1	3 000 DM	5 000 DM	6 000 DM	6 000 DM	6 000 DM
2	3 000 DM	4 000 DM	3 600 DM	3 600 DM	3 600 DM
3	3 000 DM	3 000 DM	1 800 DM	2 160 DM	2 160 DM
4	3 000 DM	2 000 DM	1 800 DM	1 620 DM	1 296 DM
5	3 000 DM	1 000 DM	1 800 DM	1 620 DM	1 944 DM
	15 000 DM	15 000 DM	15 000 DM	15 000 DM	15 000 DM

Abb. 7

Die Steuereinsparung jeder dieser Methoden ergibt sich aus t mal dem Abschreibungsbetrag der einzelnen Jahre. Wir wollen annehmen, daß der Steuersatz für wenigstens D Jahre gleichbleibe. Um dann den Barwert der zukünftigen Steuereinsparungen durch Abschreibungen zu errechnen, können wir zunächst den Barwert der zukünftigen Abschreibungsbeträge ermitteln und ihn dann mit t multiplizieren.

Der Barwert, der in Abb. 7 gezeigten Abschreibungsbeträge kann jederzeit durch die Errechnung der Barwerte bei Zinseszins für jedes Jahr und die Addition dieser Barwerte der Jahre 1—5 ermittelt werden. Natürlich wäre es für die lineare Abschreibung einfacher, die Formel für den Barwert einer Rente zu verwenden. Wir wollen jedoch hier aus Gründen der Vergleichbarkeit für alle Rechnungen die gleiche Methode verwenden. Abb. 8 zeigt die Barwertfaktoren $1/(1 + r)$ für $r = 0{,}1$ und für j von 1—5. Die Abbildung gibt ferner die Barwerte der Abschreibungen jedes Jahres, errechnet nach jeder der Methoden, sowie die Summe der Barwerte für jeden der verschiedenen Fälle an.

Jahr	Barwertfaktor	(1) Linear	(2) Digital	(3) Geometrisch degressiv (a) $k = 3$	(b) $k = 4$	(c) $k = 5$
1	0,9091	2 727 DM	4 546 DM	5 455 DM	5 455 DM	5 455 DM
2	0,8264	2 479 DM	3 306 DM	2 975 DM	2 975 DM	2 975 DM
3	0,7513	2 254 DM	2 254 DM	1 352 DM	1 623 DM	1 623 DM
4	0,6830	2 049 DM	1 366 DM	1 229 DM	1 106 DM	885 DM
5	0,6209	1,863 DM	621 DM	1 118 DM	1 006 DM	1 207 DM
		11 372 DM	12 093 DM	12 129 DM	12 165 DM	12 145 DM

Abb. 8

Da die in Abb. 8 gezeigten Summen alle mit dem Steuersatz t multipliziert werden müssen, genügt es, die Summen selbst zu betrachten, um die Methode zu erkennen, mit der am meisten Steuern gespart werden können. Wir stellen dabei fest, daß a) bei der degressiven Methode ein Überwechseln

auf die lineare Methode bei $k = 4$ am günstigsten ist; b) der günstigste Fall der degressiven Methode günstiger ist als die digitale Methode, die wiederum empfehlenswerter als die Methode der linearen Abschreibung ist.

In dem gezeigten Beispiel erweist sich die geometrisch degressive Methode mit einem Überwechseln bei $k = 4$ als optimal. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß die Methode der linearen Abschreibung *nie* optimal sein kann. Einige Beispiele im Rahmen der Übungen werden demonstrieren, daß jedoch in einigen Fällen die Methode der digitalen Abschreibung der geometrisch degressiven Methode überlegen ist und in anderen Fällen wiederum die degressive Methode günstiger ist.

Um zu zeigen, wie die Zahlen der Abb. 8 dazu benutzt werden können, Investitionsentscheidungen zu fällen, nehmen Sie bitte an, daß eine Gesellschaft eine Maschine für 15000 DM kaufen könne, die ihre Gewinne während der nächsten acht Jahre um jährlich 3500 DM erhöhen wird. Nehmen Sie weiterhin an, die Maschine könne innerhalb von fünf Jahren abgeschrieben werden und der Steuersatz t sei 0,52. Die Gesellschaft könne ferner bei alternativen Investitionen 10% des investierten Kapitals nach Abzug der Steuern verdienen. Überschreitet dann der Barwert der Gewinne nach Abzug der Steuern zuzüglich der Steuereinsparungen durch Abschreibungen den Betrag von 15000 DM, so sollte die Gesellschaft die Maschine kaufen. Andernfalls sollte sie darauf verzichten. Die jährliche Gewinnerhöhung von 3500 DM muß versteuert werden. Sie beträgt nach Abzug der Steuer 3500 DM $(1 - t) = 1680$ DM pro Jahr. Da dieser Betrag jedes Jahr verdient wird, können wir den Barwert mit Hilfe der Formel für den Barwert einer Rente zu

$$P = (5{,}335)\ (1680\ \text{DM}) = 8963\ \text{DM}$$

errechnen.

Die Steuereinsparung durch Abschreibung ergibt sich als das Produkt aus t und dem Barwert der Ausschreibungsbeträge, die bereits für fünf verschiedene Abschreibungsmethoden in Abb. 8 errechnet wurden. Beim Vorgehen nach der optimalen Methode 3 (b) beträgt die Steuereinsparung

$$(0{,}52)\ (12\ 165\ \text{DM}) = 6\ 326\ \text{DM},$$

und der Gesamtbarwert ist

$$8\ 963\ \text{DM} + 6\ 326\ \text{DM} = 15\ 289\ \text{DM} > 15\ 000\ \text{DM}.$$

Die Maschine *sollte* also gekauft werden. Hätte jedoch die Gesellschaft (irrtümlicherweise) die Anwendung der linearen Abschreibungsmethode geplant, so betrüge der Barwert lediglich

$$8\ 963\ \text{DM} + (0{,}52)\ (11\ 372\ \text{DM}) = 14\ 876\ \text{DM},$$

so daß von einem Kauf der Maschine abzuraten wäre.

ÜBUNGEN

1. Errechnen Sie den Barwert der Abschreibungen eines Anlagegutes im Werte von 50000 DM, das innerhalb von 10 Jahren abzuschreiben ist, wenn bei anderen Investitionsmöglichkeiten 20% nach Abzug der Steuern verdient werden können.
   a) Bei linearer Abschreibung. [Lös.: 23056 DM.]
   b) Bei digitaler Abschreibungsweise. [Lös.: 29038 DM.]
   c) Bei geometrisch degressiver Abschreibung mit (1) $k = 5$, (2) $k = 6$, (3) $k = 7$, (4) $k = 8$. [Lös.: (1) 28090 DM, (2) und (3) 28211 DM, (4) 28150 DM.]

   Welches ist der günstigste Wert für k? Welches ist die günstigste Abschreibungsmethode? Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen des Beispieles.

2. Nehmen Sie in Übung 1 an, daß die Anlage im Werte von 55000 DM pro Jahr 20000 DM Gewinn vor Abzug der Steuern erbringe und daß sie voraussichtlich 20 Jahre lang brauchbar sei. Sollte die Investition vorgenommen werden, wenn der Steuersatz 52% beträgt und nach der digitalen Abschreibungsmethode vorzugehen ist? Wie groß ist der Barwert?

3. In den Vereinigten Staaten von Amerika sind außer den drei bis jetzt genannten Abschreibungsmethoden auch andere Verfahren unter der Bedingung zugelassen, daß der jeweilige Restbuchwert während der ersten 2/3 der den Abschreibungen zugrunde gelegten Lebensdauer mindestens so hoch ist, wie er wäre, wenn man nach der geometrisch degressiven Methode abschriebe. So schreibt die General Motors Corporation z. B. nach der folgenden Methode ab: Die zugrunde gelegte Lebensdauer D einer Anlage des Wertes C wird in drei gleiche Perioden eingeteilt. In jedem Jahr des ersten Drittels wird der Betrag $1{,}5(C/D)$ abgeschrieben, im zweiten Drittel jährlich der Betrag C/D und im letzten Drittel der Betrag $0{,}5(C/D)$. Errechnen Sie den Barwert der Abschreibungsbeträge, wenn $C = 21000$ DM, $D = 6$ Jahre und $r = 0{,}10$ ist.
   a) Unter Zugrundelegung der Methode von General Motors. [Lös.: 16207 DM.]
   b) Unter Zugrundelegung der digitalen Abschreibungsmethode.
   c) Unter Zugrundelegung der geometrisch degressiven Methode mit $k = 4$. Zeigen Sie, daß in diesem Falle die von General Motors angewandte Methode zulässig ist.

4. Ist S der Schrottwert einer Anlage am Ende der vorausgeschätzten Lebensdauer und C ihr Anschaffungswert, so ist die Bezugsbasis für die lineare und die digitale Abschreibungsmethode $C - S$, d. h. bei Benutzung der linearen Abschreibungsmethode schreibt man jährlich den Betrag von $(C - S)/D$ ab, während man beim Vorgehen nach der digitalen Abschreibungsweise im j-ten Jahr den Betrag $\frac{D - j + 1}{\frac{1}{2}D(D+1)}(C - S)$ abschreibt. Bei der Verwendung der geometrisch degressiven Methode und der Anwendung der doppelten linearen Sätze kann man jedoch den Abschreibungssatz unter der Bedingung, daß die Summe der Abschreibungsbeträge nie $C - S$ übersteigen darf, so wählen, als ob kein Schrottwert bestünde. Hierbei bleibt die Möglichkeit eines Überwechselns auf eine lineare Abschreibungsmethode bestehen. Nehmen Sie in dem Beispiel dieses Abschnittes an, daß die Anlage einen im voraus geschätzten Schrottwert von 1000 DM am Ende einer fünfjährigen Abschreibungsmethode habe. Errechnen Sie den Barwert der Abschreibungsbeträge bei der Benutzung der in Abb. 7 dargestellten Abschreibungsmethode. Welches ist der beste Wert für k? [Lös.: (1) 10614 DM, (2) 11287 DM, (3a) 11444 DM, (3b) 11513 DM, (3c) 11524, Bestes $k = 5$.]

5. Errechnen Sie für Übung 4 den Nettobarwert der Investition nach Abzug der Steuer unter Verwendung jeder der angeführten Abschreibungsmethoden. Nehmen

Sie dabei an, daß die Anlage nach fünf Jahren verschrottet werde. Bei Verwendung welcher Abschreibungsmethode sollte die Investition vorgenommen werden?

6. Nehmen Sie für Übung 1 an, daß die Anlage am Ende des zehnten Jahres einen Schrottwert von 5000 DM habe. Errechnen Sie den Barwert der Abschreibungsbeträge bei Verwendung der in Übung 1 genannten Abschreibungsverfahren. Gibt es einen besseren Wert für k als die in Übung 1 genannten? Welches ist die günstigste Abschreibungsmethode? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem der Übung 1.

7. Nehmen Sie in Übung 6 an, daß die Anlage nach 10 Jahren verschrottet werde. Errechnen Sie den Nettobarwert der Investition bei Benutzung der günstigsten Abschreibungsmethode. Sollte die Investition vorgenommen werden?

8. Entwerfen Sie ein Flußdiagramm für die Errechnung des Barwertes der Abschreibungsbeträge, wenn eine Anlage C DM kostet und das der Abschreibung zugrunde zu legende Lebensalter D Jahre beträgt. Die Anlage soll am Ende der Abschreibungszeit den Schrottwert 0 besitzen.
   a) Legen Sie dabei die digitale Abschreibungsmethode zugrunde.
   b) Legen Sie dabei die geometrisch degressive Abschreibungsmethode mit doppelten linearen Sätzen und festgelegtem k zugrunde.

   Nehmen Sie an, daß ein Unterprogramm für die Errechnung von $(1 + r)^n$ existiere.

9. Zeichnen Sie ein Flußdiagramm für die Errechnung des Barwertes der Abschreibungsbeträge bei Verwendung der in Abb. 8 genannten zwei Abschreibungsmethoden, wenn der Schrottwert am Ende von D Jahren S ist.

*6. Formeln für die Errechnung des Barwertes von Abschreibungsbeträgen

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt beschriebenen Methode kann man immer den Barwert von Abschreibungen dadurch errechnen, daß man mit Hilfe der Zinseszinsbarwertformel den Barwert für jedes der Jahre errechnet und diese Ergebnisse dann addiert. Wesentlich bequemer ist es jedoch, für jede der drei genannten Abschreibungsmethoden eine eigene Formel zu entwickeln. Dies wollen wir in dem vorliegenden Abschnitt tun. Wir werden ferner den besten Wert für k bei der geometrisch degressiven Methode mit doppelten linearen Sätzen bestimmen und zeigen, daß die Barwerte sowohl der digitalen als der geometrisch degressiven Methode größer sind als die bei Verwendung der linearen Abschreibungsmethode. In allen Fällen dieses Abschnittes wollen wir annehmen, daß $D \geqq 3$.

Lineare Abschreibung. Wir haben bereits festgestellt, daß der Barwert eines Flusses von Abschreibungsbeträgen der Größe C/D pro Jahr während der Zeitdauer von D Jahren durch die Rentenbarwertformel

$$P_{sl} = \frac{C}{D}\left[\frac{(1+r)^D - 1}{r(1+r)^D}\right] \tag{15}$$

errechnet werden kann.

Hierdurch erhalten wir den Barwert der Abschreibungsbeträge bei linearer Abschreibungsmethode für eine Anlage mit dem Anfangsbuchwert C, die innerhalb von D Jahren abgeschrieben werden soll und für die ein Zinssatz r gilt. Bezeichnen wir mit b_j den Restbuchwert nach j Jahren bei linearer Abschreibung, so können wir b_{j+1} auf die folgenden zwei Weisen ausdrücken:

$$b_{j+1} = b_j - \frac{C}{D} \tag{16a}$$

$$b_{j+1} = b_j \frac{D-j-1}{D-j}. \tag{16b}$$

Hierbei folgt Formel (16b) aus der Tatsache, daß

$$b_j = C \frac{D-j}{D}.$$

Ist z. B. $C = 10000$ DM, $D = 10$, so ist am Ende des sechsten Jahres $b_6 = 4000$ DM. Mit Hilfe von (16a) erhalten wir

$$b_7 = 4000 \text{ DM} - \frac{10000 \text{ DM}}{10} = 3000 \text{ DM}$$

und mit Hilfe von (16b):

$$b_7 = 4000 \text{ DM} \frac{10-6-1}{10-6} = 3000 \text{ DM}.$$

Wir werden diese Ergebnisse dazu benutzen, den optimalen Wert für k bei der geometrisch degressiven Methode und der Verwendung der doppelten linearen Abschreibungssätze zu bestimmen.

Geometrisch degressive Abschreibung bei Verwendung des doppelten linearen Satzes: Wir wollen zunächst zeigen, daß der beste Zeitpunkt für ein Überwechseln von der geometrisch degressiven Methode auf die lineare Abschreibungsmethode das Jahr k ist, wobei

(17) $k = 1/2(D + 3)$ wenn D eine ungerade Zahl ist, und k entweder $1/2(D + 2)$ oder $1/2(D + 4)$ ist, wenn D eine gerade Zahl ist.

Wenn D eine gerade Zahl ist, ist es unerheblich, ob man im Jahr $1/2(D + 2)$ oder im Jahr $1/2(D + 4)$ auf die lineare Methode überwechselt. Hieraus folgt trivialerweise, daß diese Methode für alle D Jahre besser sein muß als die lineare Abschreibungsmethode, da, wenn dies nicht der Fall wäre, das optimale k gleich 1 wäre.

Wir wollen davon ausgehen, daß eine Abschreibungsmethode dann besser als eine andere ist, wenn man mit ihrer Hilfe in einem gegebenen Jahr mehr abschreiben kann als mit der anderen. Das folgt wiederum aus der Tatsache, daß a) die Summe aller Abschreibungsbeträge, gleichgültig nach welcher Methode abgeschrieben wird, C ist und b) der Barwert der Abschreibungsbeträge desto höher sein wird, je eher man den abzuschreibenden Gegen-

stand abschreiben kann. Bezeichnen wir mit b'_j den Restbuchwert im j-ten Jahr, so erhalten wir für die geometrisch degressive Methode mit doppeltem linearen Satz

$$b'_{j+1} = \left(1 - \frac{2}{D}\right) b'_j. \tag{18}$$

Für die lineare Abschreibungsmethode ergibt sich gemäß (16b)

$$b_{j+1} = b_j \left[\frac{D-j-1}{D-j}\right] = b_j \left[1 - \frac{1}{D-j}\right].$$

Nehmen Sie nun an, daß wir im Jahr $j-1$ einen Restbuchwert b_{j-1} haben, und daß (im Gegensatz zur Wirklichkeit) wir die Möglichkeit hätten, im Jahre j, unabhängig von der davor benutzten Abschreibungsmethode, zwischen der linearen und der geometrisch degressiven Methode zu wählen. Wir würden dann die lineare Methode als besser bezeichnen, wenn der Restbuchwert im j-ten Jahr geringer als bei der Abschreibung nach der degressiven Methode wäre, d. h. wenn

$$b_j = b_{j-1}\left[1 - \frac{1}{D-j+1}\right] < b'_j = \left(1 - \frac{2}{D}\right) b_{j-1}.$$

Diese Bedingung wird dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{2}{D} < \frac{1}{D-j+1},$$

d. h. wenn

$$j > \tfrac{1}{2}(D+2).$$

Ist $j = 1/2(D+2)$, so sind beide Methoden als gleich gut zu bezeichnen. Dies kann jedoch nur dann der Fall sein, wenn D eine gerade Zahl ist. Die lineare Abschreibung wird sich als noch ungünstiger herausstellen, wenn $j < 1/2(D+2)$ ist.

Selbst wenn es also erlaubt wäre, jedes Jahr die günstigere Abschreibungsmethode auszuwählen, so bestünde ein optimales System bis zum Zeitpunkt $j < 1/2(D+2)$ aus der degressiven Methode und von dem Zeitpunkt $j \geq 1/2(D+2)$ an aus der linearen Abschreibungsmethode. Das Jahr k, in dem man auf die lineare Abschreibungsmethode übergehen sollte, kann durch (17) errechnet werden.

Wir wollen uns nun der Ableitung der Formel für den Barwert der geometrisch degressiven Abschreibungsmethode zuwenden. Am Beginn irgendeines Jahres k soll (nicht unbedingt in optimaler Form) auf die lineare Abschreibungsmethode übergegangen werden, und es soll $1 \geqq k \geqq D$ gelten. Bitte rufen Sie sich ins Gedächtnis zurück, daß diese Zahl multipliziert mit $(1-t)$ dem Barwert des Steuerersparungen durch Abschreibungen einer Anlage entspricht. Anstatt den Barwert direkt zu errechnen, wollen wir für jedes Jahr das Guthaben eines bestimmten hypothetischen Fonds errechnen. Dieser Fonds wird jedes Jahr zum Zinssatz r auf Grund

des Guthabens am Ende des vergangenen Jahres verzinst. Am Ende jedes Jahres werden aus dem Fond Zahlungen in Höhe der Abschreibungen geleistet. Nach D Jahren ist dann der Fond auf dem Stand 0. Der Wert dieses Fonds im Jahre 0 stellt dann den Barwert aller Abschreibungen dar. Man kann dies aus der Tatsache ersehen, daß es für eine Person gleichgültig ist, ob sie jedes Jahr Zahlungen entsprechend den Abschreibungen oder den Fond selbst erhält. Im letzteren Fall könnte sie sich selbst jedes Jahr genau den Betrag auszahlen, den sie im ersten Fall erhielte, und am Ende der Lebensdauer der abzuschreibenden Anlage wäre der Fond gerade auf dem Nullstand angekommen.

Es sei x_j das Guthaben des Fonds am Ende des j-ten Jahres, b_j der Restbuchwert am Ende des j-ten Jahres und d_j der Abschreibungsbetrag im j-ten Jahr. Es ist dann

(19a) $$d_j = b_{j-1} - b_j$$

und für $j < k$

(19b) $$b_j = \left(1 - \frac{2}{D}\right) b_{j-1}$$

und

(20) $$x_j = (1 + r)x_{j-1} - d_j.$$

Wir wollen uns zunächst die Gleichung (19b) anschauen. Können wir den Wert eines bestimmten b_j angeben, so hat diese Gleichung eine eindeutige Lösung. Wir wissen, daß der Restbuchwert im Jahre 0 C, den Anschaffungspreis der Anlage, beträgt. Dadurch ist uns die Anfangsbedingung

$$b_0 = C$$

gegeben.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß die Formel

(21) $$b_j = \left(1 - \frac{2}{D}\right)^j \cdot C$$

sowohl (19b) als auch die Anfangsbedingung erfüllt. Wir kommen damit zu dem gleichen Resultat, das wir induktiv im Abschnitt 5 erreichten. Setzen wir (21) in (19a) ein, so finden wir, wie in Abschnitt 5,

(22) $$d_j = \left(1 - \frac{2}{D}\right)^{j-1} \cdot \frac{2C}{D}.$$

Nun wenden wir uns der Gleichung (20) zu: Setzen wir (22) in (20) ein, so erhalten wir

(23) $$x_j = (1 + r)x_{j-1} - \left(1 - \frac{2}{D}\right)^{j-1} \frac{2C}{D}.$$

Wir wüßten nun gerne den Stand des Fonds im Jahre 0, d. h. wir suchen x_0. Wir wollen zunächst eine allgemeine Formel für x_j ableiten und dann mit deren Hilfe den Wert für x_j bei $j = 0$ bestimmen.

Wie die Gleichung (19b) hat auch Gleichung (23) dann eine eindeutige Lösung, wenn wir den Wert für x_j für ein bestimmtes j kennen. Da die Anfangsbedingung jedoch die Unbekannte dieses Problems ist, können wir sie im Unterschied zu (19b) nicht ohne weiteres bestimmen. Dafür können wir den Wert des Fonds am Ende des Jahres $k-1$, d. h. unmittelbar vor dem Überwechseln auf die lineare Abschreibungsmethode, angeben. Zu diesem Zeitpunkt muß der Fond nämlich über ein Guthaben verfügen, das ausreichend ist, um $D-k+1$ gleiche jährliche Zahlungen in der Höhe zu leisten, daß ihre Summe gleich dem Restbuchwert b_{k-1} am Ende des Jahres $k-1$ ist. Außerdem muß das Guthaben des Fonds, nachdem die $D-k+1$ Zahlungen geleistet wurden, 0 sein. Der Barwert eines Fonds, aus dem solange gleichmäßige Zahlungen zu leisten sind, bis er den Stand 0 erreicht hat, wird jedoch durch die Negation der in Abb. 1 gezeigten Rentenbarwertformel gegeben. Gemäß (21) ist

$$b_{k-1} = \left(1 - \frac{2}{D}\right)^{k-1} C.$$

Da aus dem Fond $D-k+1$ gleiche Zahlungen zu leisten sind, wird sich die Höhe jeder dieser Zahlungen auf

$$\left(1 - \frac{2}{D}\right)^{k-1} \frac{C}{D-k+1}.$$

belaufen. Der Wert einer Reihe von $D-k+1$ solcher Zahlungen am Ende des Jahres $k-1$, der mit dem Guthaben unseres hypothetischen Fonds am Ende des Jahres $k-1$ identisch ist, ergibt sich daher zu

$$x_{k-1} = \frac{(1+r)^{D-k+1} - 1}{r(1+r)^{D-k+1}} \frac{(1-2/D)^{k-1} C}{D-k+1}. \tag{24}$$

Mit Hilfe der Gleichung (24) können wir nun den Wert von x_j für ein bestimmtes j, nämlich für $j = k-1$ ermitteln. Die eindeutige Lösung für (23), die der Bedingung (24) genügt, ist dann

$$x_j = C\left(1 - \frac{2}{D}\right)^j \times \left\{\left[\frac{1-2/D}{1+r}\right]^{k-j-1}\left[\frac{(1+r)^{D-k+1}-1}{(D-k+1)r(1+r)^{D-k+1}} - \frac{2}{rD+2}\right] + \frac{2}{rD+2}\right\}. \tag{25}$$

Wir erreichen dies durch eine direkte Substitution (siehe Übung 4). Setzen wir nun $j = 0$, so erhalten wir den Barwert der geometrisch degressiven Abschreibung bei Benutzung des doppelten linearen Satzes zu

$$P_{gdd} = x_0 = C\left\{\left[\frac{1-2/D}{1+r}\right]^{k-1}\left[\frac{(1+r)^{D-k+1}-1}{(D-k+1)r(1+r)^{D-k+1}} - \frac{2}{rD+2}\right] + \frac{2}{rD+2}\right\}. \tag{26}$$

Beispiel 1. Im Beispiel des Abschnittes 5 sei $D = 5$, $r = 1$ und $C = 15000$ DM. Da D ungerade ist, ergibt sich der optimale Wert für k zu

$$k = \tfrac{1}{2}(D+3) = \tfrac{1}{2}(5+3) = 4,$$

für $k = 4$ ergibt sich

$$P_{gdd} = 15000\,\text{DM}\left\{\left(\frac{1-\frac{2}{5}}{1+0{,}1}\right)^3\left[\frac{(1+0{,}1)^2-1}{(2)\,(0{,}1)\,(1+0{,}1)^2}-\frac{2}{(0{,}1)\,(5)+2}\right]+\frac{2}{(0{,}1)\,(5)+2}\right\}$$

wie wir bereits in Abschnitt 5 sahen.

Digitale Abschreibungsmethode. Wir können wiederum zeigen (siehe Übung 1), daß diese Abschreibungsmethode der linearen Abschreibung überlegen ist.

Die Formel für den Barwert der digitalen Abschreibung ist leichter abzuleiten als die für den Barwert der geometrisch degressiven Methode. Wie vorher beginnen wir auch hier mit einem hypothetischen Fond, dessen Guthaben am Ende des j-ten Jahres x_j beträgt. Der Fond gleicht genau dem bereits beschriebenen mit der Ausnahme, daß die zu leistenden Zahlungen gleich den Abschreibungsbeträgen der digitalen Abschreibungsmethode entsprechen. Das Guthaben des Fonds muß also die Bedingung der Gleichung

$$x_{j+1} = (1+r)x_j - 2C\,\frac{D-j}{D(D+1)}, \quad 0 \leqq j \leqq D \tag{27}$$

erfüllen.

Wenn wir den Wert für x_j für irgendein j angeben, so hat Gleichung (27) wiederum eine eindeutige Lösung. In diesem Fall ist dies sehr einfach: Das Guthaben des Fonds am Ende des Jahres D muß 0 sein. Es gilt daher

$$x_D = 0. \tag{28}$$

Die Lösung von Gleichung (27) für $x_D = 0$ ist

$$x_j = \frac{2C}{r^2D(D+1)}\,[rD - 1 - rj + (1+r)^{-(D-j)}]. \tag{29}$$

was wir durch einfaches Einsetzen nachprüfen können (siehe Übung 5). Setzen wir in (29) $j = 0$ ein, so erhalten wir den Barwert der digitalen Abschreibung zu

$$P_d = x_0 = \frac{2C}{r^2D(D+1)}\,[rD - 1 + (1+r)^{-D}]. \tag{30}$$

Beispiel 2. Im Beispiel des Abschnittes 5 sei $D = 5$, $C = 15000$ DM und $r = 0{,}1$. Aus Tafel III erhalten wir dann $(1 + 0{,}1)^5 = 1{,}6105$ und

$$\begin{aligned} P_d &= \frac{(2)\,(15000)}{(0{,}1)^2\,(5)\,(6)}\left[(0{,}1)\,(5) - 1 + \frac{1}{1{,}6105}\right] \\ &= 100000\,[0{,}5 - 1 + 0{,}6209] \\ &= (100000)\,(0{,}1209) = 12090. \end{aligned}$$

Das entspricht wiederum dem in Abb. 8 gezeigten Resultat.

ÜBUNGEN

1. Zeigen Sie, daß der gesamte, während der ersten j Jahre abgeschriebene Betrag für alle $j < D$ bei Verwendung der digitalen Abschreibungsmethode größer ist als bei Verwendung der linearen Abschreibungsmethode. Beweisen Sie unter Ver-

wendung dieses Ergebnisses, daß die erstere Methode der letzteren immer vorzuziehen ist.

2. Benutzen Sie die Formeln des letzten Abschnittes, um Antworten auf die Fragen der Übung 1, Abschnitt 6 zu finden.

3. Zeigen Sie, daß (21) der Gleichung (19b) und der Anfangsbedingung $b_0 = C$ genügt.

4. Zeigen Sie, daß (24) der Gleichung (23) und der Bedingung (24) genügt.

5. Zeigen Sie, daß (29) der Gleichung (27) und der Bedingung (28) genügt.

6. Wie groß ist der Barwert des Abschreibungsbetrages im j-ten Jahr bei Benutzung der digitalen Abschreibungsmethode? Errechnen Sie unter Benutzung der Ergebnisse von Übung 14 und 16 des Abschnittes 1 die Summe der Barwerte der Abschreibungsbeträge für $j = 1, 2, \ldots, D$ und zeigen Sie, daß diese Summe gleich P_d in Gleichung (30) ist.

7. Wie groß ist der Barwert des Abschreibungsbetrages des j-ten Jahres, wenn man die geometrisch degressive Abschreibungsmethode mit doppeltem linearem Satz zugrunde legt und im Jahr k auf die lineare Abschreibungsmethode überwechselt? Benutzen Sie das Ergebnis der Übung 14 aus Abschnitt 1, um die Summe der Barwerte der Abschreibungsbeträge für $j = 1, 2, \ldots, D$ zu bestimmen, und zeigen Sie, daß diese Summe gleich P_{gdd} in Gleichung (26) ist.

8. Für bestimmte Anlagegüter darf in Amerika bei Verwendung der geometrisch degressiven Abschreibungsmethode der Abschreibungssatz das 1,5fache des linearen Abschreibungssatzes nicht überschreiten. In welchem Jahr sollte man auf die lineare Abschreibungsmethode überwechseln, wenn man bis dahin die geometrisch degressive Methode mit dem 1,5fachen des linearen Systems benutzt?
[Lös.: Wechsel nach Jahr $1/3\,D + 1$.]

9. Stellen Sie ein Flußdiagramm für die Errechnung von P_d mit Hilfe von Gleichung (30) auf, wenn C, D und r gegeben sind. Setzen Sie dabei voraus, daß ein Unterprogramm für die Errechnung von $(1 + r)^j$ existiert.

10. Stellen Sie ein Flußdiagramm für die Errechnung von P_{gdd} nach Gleichung (26) bei beliebigem k auf. Nehmen Sie dabei an, daß die gleichen Größen wie in der vorhergehenden Übung gegeben sind.

11. Stellen Sie ein Flußdiagramm zur Errechnung des optimalen Wertes für k auf. Kombinieren Sie dieses Diagramm mit dem in der vorigen Übung erhaltenen, um den Barwert der geometrisch degressiven Methode bei Benutzung des doppelten linearen Satzes und einem optimalen Überwechseln zur linearen Methode errechnen zu können.

12. Modifizieren Sie die Formeln für die Errechnung von P_{sl} und P_d unter der Annahme, daß eine Anlage am Ende ihrer Abschreibungsdauer einen erwarteten Schrottwert S hat.

13. Bestimmen Sie die Bedingung für das optimale Überwechseln von der geometrisch degressiven Methode mit doppeltem linearem Satz auf die lineare Abschreibungsmethode, wenn eine Anlage am Ende der Abschreibungsdauer einen Schrottwert von S verfügt (siehe Übung 4 aus Abschnitt 5).
[Lös.: Wurde die geometrisch degressive Methode während der ersten $j - 1$ Jahre zugrunde gelegt, so sollte dann im Jahre j auf die lineare Abschreibungsmethode übergewechselt werden, wenn

$$(b_{j-1} - S)\left[1 - \frac{1}{D - j + 1}\right] < \left(1 - \frac{2}{D}\right) b_{j-1}.]$$

14. Es sei $x_{j+1} = ax_j + b_j + c$ und $x_0 = d$. Zeigen Sie, daß

$$x_1 = ad + c$$
$$x_2 = a^2d + (a + 1)c + b$$
$$x_3 = a^3d + (a^2 + a + 1)c + (a + 2)b$$
$$x_4 = a^4d + (a^3 + a^2 + a + 1)c + (a^2 + 2a + 3)b.$$

Zeigen Sie ferner durch Induktionsschluß, daß

$$x_j = a^jd + (a^{j-1} + a^{j-2} + \ldots + a + 1)c + [a^{j-2} + 2a^{j-3} + \ldots + (j-2)a + (j-1)].$$

Bestimmen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übungen 14 und 16 aus Abschnitt 1 die Summen der vorausgehenden Reihen. Zeigen Sie dann, daß die erhaltene Gleichung im wesentlichen mit Gleichung (27) identisch ist, indem Sie Näherungssubstitutionen für Werte von a, b und c durchführen. Bestimmen Sie schließlich P_d, indem Sie, unter Benutzung von (28), mit $j = D$ den Wert für d bestimmen.

15. Es sei $x_j = ax_{j-1} + bc^{j-1}$ und $x_0 = d$. Zeigen Sie, daß

$$x_1 = ad + b$$
$$x_2 = a^2d + b(a + c)$$
$$x_3 = a^3d + b(a^2 + ac + c^2)$$
$$x_4 = a^4d + b(a^3 + a^2c + ac^2 + c^3).$$

Zeigen Sie ferner durch Induktionsschluß, daß

$$x_j = a^jd + b(a^{j-1} + a^{j-2}c + a^{j-3}c^2 + \ldots + a^2c^{j-3} + ac^{j-2} + c^{j-1}).$$

Errechnen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übung 17 des Abschnittes 1 die Summe vorangehender Reihen. Zeigen Sie, daß durch entsprechende Substitutionen für a, b und c diese Gleichung im wesentlichen (23) gleicht. Errechnen Sie schließlich, unter Verwendung von (24) mit $j = k - 1$, P_{gdd} durch Bestimmung des Wertes für d.

7. Buchführung mit doppelter Klassifikation

In der heute allgemein benutzten, sogenannten *doppelten Buchführung* wird ein einzelner Vorgang gewöhnlich auf zweierlei Weise festgehalten: Einmal auf der Sollseite und einmal auf der Habenseite eines Kontos. Hierbei erfolgt die Sollbuchung gewöhnlich auf der linken Seite eines Kontos, während die Habenbuchung auf der rechten Seite eines anderen Kontos erfolgt. Da es verhältnismäßig leicht möglich ist, entweder die Soll- oder die Habenbuchung zu vergessen oder zweimal auf der Sollseite bzw. zweimal auf der Habenseite zu buchen, benutzt man gewöhnlich zur Überprüfung eine sog. Probebilanz, um festzustellen, ob die Summe der Sollbuchungen gleich der Summe der Habenbuchungen ist. Die Tatsache, daß diese Bilanz ausgeglichen ist, ist eine notwendige, jedoch nicht ausreichende Bedingung dafür, daß alle Vorgänge richtig gebucht wurden.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß der wichtige Punkt bei der doppelten Buchführung nicht das zweimalige *Buchen* jedes Vorganges ist, sondern das zweifache *Klassifizieren* jedes Vorganges, und zwar einmal als Soll und einmal als Haben. Ein anderer Weg, um eine Zahl doppelt zu klassifizieren, ist, sie in eine Matrix einzuordnen. Die Zahl wird dann einmal nach der Zeile, in der sie sich befindet, und einmal nach der Spalte, wo sie steht, klassifiziert. Da dies schon durch das einmalige Aufführen der Zahl geschieht, können die obengenannten Fehler der doppelten Buchführung nicht vorkommen, und die Notwendigkeit der Benutzung einer Probebilanz, um diese Fehler herauszufinden, entfällt.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Methode der doppelten Klassifizierung beschreiben und sie an einem einfachen Beispiel illustrieren. Im nächsten Abschnitt werden wir dann zeigen, wie man diese Methode verwenden kann, um die zwei wichtigsten Berichte eines Geschäftsunternehmens vorzubereiten: Die Gewinn- und Verlustrechnung und die Bilanz. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir dann zeigen, wie man die Buchführung doppelter Klassifizierung mit Hilfe von Flußdiagrammen durchführen kann.

Beispiel. Herr Müller sei der Besitzer einer kleinen Reparaturwerkstatt für Haushaltsgeräte. Er habe das Geschäftstelefon in seinem Haus, während die meisten seiner Werkzeuge und Ersatzteile sich in einer fahrbaren, auf einem Lastwagen installierten Werkstatt befinden. Dieser Lastwagen werde von ihm vermietet. Beim Abschluß einer Reparaturarbeit stelle er dem Kunden eine Rechnung aus. Der Kunde könne diese dann entweder bar bezahlen, oder ihm werde von Herrn Müller Kredit gewährt. Herr Müller kaufe seine Ersatzteile zum Teil gegen Kredit, zum Teil bar. Darüber hinaus habe er lediglich Miete und die Betriebskosten für seinen Lastwagen zu bezahlen. Am Ende des Monats stelle nun Herr Müller durch eine Zusammenstellung seiner Verkäufe, seiner Rechnungen und der eingegangenen Schecks fest, daß während des Monats Januar die folgenden Vorgänge stattfanden:

a)	Barverkäufe	400 DM
b)	Käufe auf Kredit	600 DM
c)	Kosten der verkauften Güter (Ersatzteile)	150 DM
d)	Bareinkäufe (Ersatzteile)	80 DM
e)	Einkäufe auf Rechnung (Ersatzteile)	40 DM
f)	Miete für Lastwagen	150 DM
g)	Betriebskosten für Lastwagen	50 DM
h)	Bezahlung von Forderungen	450 DM
i)	Entnahmen	500 DM
j)	Begleichung von Verbindlichkeiten	100 DM

Um sich über die Lage seines Geschäftes klar zu werden, möchte nun Herr Müller eine Gewinn- und Verlustrechnung und eine Bilanz für den Monat Januar aufstellen. Zu diesem Zweck muß er jeden der obigen Vorgänge auf den verschiedenen Konten festhalten. Er verfüge über die folgenden Konten:

1. Kasse
2. Forderungen
3. Vorräte

4. Verbindlichkeiten
5. Eigenkapital
6. Gewinn oder Verlust
7. Verkäufe
8. Kosten der verkauften Güter
9. Miete
10. Betriebskosten
11. Eigenentnahmen

Diese Konten werden nun so angeordnet, daß die Konten 1 bis 5 in der Bilanz erscheinen, während die Konten 6 bis 11 in etwas modifizierter Form in die Gewinn- und Verlustrechnung einmünden.
Herr Müller hat nun jeden der Vorgänge a) bis j) dadurch zweifach zu klassifizieren, daß er bestimmt, welches der Konten 1 bis 11 erkannt und welches belastet werden soll. Einige der Klassifikationen sind dabei selbstverständlich, während andere von den herrschenden Buchhaltungsvorschriften abhängen. So berühren z. B. a), Barverkäufe, offensichtlich das Konto 1, Kasse, wohingegen b), Verkäufe gegen Rechnung, das Konto 2, Forderungen, berühren. Es ist allgemein üblich, diese Vorgänge auf der Sollseite der betreffenden Konten zu verbuchen. Die entsprechenden Habenbuchungen werden dann auf Konto 7, Verkäufe, durchgeführt. Auf diesem Konto werden alle Verkäufe eines Monats gesammelt. Der Vorgang c), Kosten der verkauften Güter, wird auf der Sollseite des Kontos 8, Kosten der verkauften Güter, und auf der Habenseite des Kontos 3, Bestände, verbucht. Der einzige der verbleibenden Vorgänge, bei dessen Verbuchung Schwierigkeiten auftreten können, ist e), Entnahmen, der den Betrag darstellt, den Müller für seinen persönlichen Gebrauch dem Geschäftsvermögen entnimmt. Dieser Betrag wird im Soll des Kontos 11, Eigenentnahmen, und im Haben des Kontos 1, Kasse, verbucht.
Um alle diese Vorgänge zweifach zu bezeichnen, stellen wir die in Abb. 9 gezeigte 11×11 Matrix auf. Bitte beachten Sie, daß wir die an der linken Seite aufgeführten Konten erkennen und die an der oberen Kante der Matrix aufgeführten Konten belasten. Um nun einen der Vorgänge zu erfassen, bestimmen wir lediglich die Spaltenzahl des zu belastenden Kontos und die Zeilenzahl des zu erkennenden Kontos und schreiben den Betrag des Vorganges an die Stelle des Schnittpunktes der entsprechenden Zeile und Spalte (allgemeiner gesagt, addieren wir den Betrag des Vorganges zu einer sich eventuell schon an dieser Stelle befindlichen Zahl). Wir haben nun jeden der Vorgänge a) bis j) in Abb. 9 erfaßt. Der Leser sollte sich davon überzeugen, daß die Vorgänge in der Matrix richtig klassifiziert wurden. Beachten Sie bitte, daß die in Abb. 9 gezogenen Striche die Bilanzkonten (Bestandskonten) von den Gewinn- und Verlustkonten (Erfolgskonten) trennen. Die Zahlen, die sich in den dadurch entstehenden vier Untermatrizen befinden, werden bei den folgenden Rechnungen verschieden behandelt werden.

Wir wollen die in Abb. 9 gezeigte Matrix als eine *Matrix der Vorgänge* bezeichnen und dafür den Buchstaben V schreiben. Nun wollen wir die schon früher gemachte Behauptung beweisen, daß die Summe aller Habenbuchungen gleich ist der Summe aller Sollbuchungen oder mit anderen Worten, daß eine Probebilanz immer ausgeglichen sein wird.

Nehmen Sie nun an, daß n Konten vorhanden seien und daß V die einen oder mehrere Vorgänge darstellende Matrix der Vorgänge sei. Wir defi-

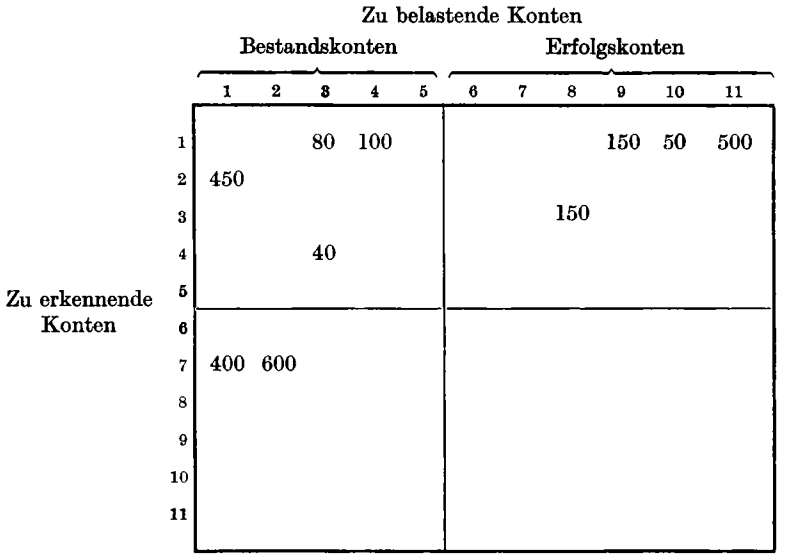


Abb. 9

nieren dann die folgenden Vektoren, um die Summe der Soll- und Habenbuchungen zu erhalten:

$$e = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ Komponenten}} \text{ und } f = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\} n \text{ Komponenten}$$

Es ist dann leicht zu sehen, daß die Komponenten von eV die Summe aller Belastungen und die Komponenten von Tf die Summe aller Gutschriften angeben. Um eine Probebilanz zu erhalten, bilden wir die Summe aller Belastungen und vergleichen sie mit der Summe aller Gutschriften. Da die Komponenten von eV die Habensalden darstellen, ist $(eV)f$ die Summe aller Habensalden. Entsprechend ergibt $e(Vf)$ die Summe aller Sollsalden. Nach dem assoziativen Gesetz, das für die Multiplikation von Matrizen gilt (siehe Abschnitt 4, Kapitel 5), ist

$$(eV)f = e(Vf).$$

Dies ist auch gefühlsmäßig einleuchtend, da die beiden Ausdrücke $(eV)f$ und $e(Vf)$ lediglich zwei verschiedene Wege der Errechnung der Gesamtsumme aller Werte in V darstellen. Damit kommen wir zu dem folgenden Ergebnis:

Theorem. In dem System der Buchführung mit doppelter Klassifizierung sind Probebilanzen immer ausgeglichen.

Das bedeutet, daß man bei der Benutzung dieses Systems nie Probebilanzen aufzustellen braucht, um die Gleichheit von Belastungen und Gutschriften zu beweisen. Es soll an dieser Stelle betont werden, daß die Eliminierung der Notwendigkeit einer Probebilanz *nicht* die Eliminierung aller Fehlermöglichkeiten innerhalb dieses Systems bedeutet. Lediglich die Fehlerarten, die mit Hilfe einer Probebilanz festzustellen sind, können nicht vorkommen. Selbstverständlich ist es weiterhin möglich, Vorgänge vollkommen auszulassen, sie mehr als einmal zu verbuchen, sie falsch zu klassifizieren oder den falschen Betrag einzusetzen. Um solche Fehler festzustellen, müssen verschiedene andere Überprüfungsmethoden angewandt werden.

Es ist offensichtlich, daß diese Matrixmethode der doppelten Klassifizierung von Vorgängen so lange umständlich ist, wie man in der Buchhaltung lediglich mit Bleistift und Papier arbeitet. Es mögen durchaus verschiedene Vorgänge auf der gleichen Stelle des in Abb. 9 gezeigten quadratischen Feldes zu erfassen sein. Daneben wird es in vielen Unternehmen Hunderte von Konten geben, so daß die Größe der Matrix der Vorgänge jede vernünftige Größe überschreiten würde. Selbstverständlich könnte jede der Möglichkeiten innerhalb der Matrix durch eine Seite oder eine Reihe von Seiten in einem „Hauptbuch" dargestellt werden, wie es auch in der traditionellen doppelten Buchführung geschieht, wo jedes *Konto* durch die Seite eines Hauptbuches dargestellt wird. Wenn ein Unternehmen seine Geschäftsvorfälle auf n verschiedenen Konten verbuchen will, so benötigt es dafür im System der doppelten Buchführung lediglich n verschiedene „Seiten" im Hauptbuch. Sind jedoch bei jedem einzelnen Vorgang zwei verschiedene Konten beteiligt, so benötigt man beim System der doppelten Klassifizierung $n(n-1)$ „Seiten". Daneben ist es oft notwendig, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, die Summe aller Gutschriften und die Summe aller Belastungen eines gegebenen Kontos zu ermitteln. Hätte man nun für diese Stelle der Matrix der Vorgänge eine „Seite" im Hauptbuch, so würde die einfache Aufgabe des Addierens der Werte einer Zeile oder einer Spalte der Matrix unendlich mühsam werden, da man die einzelnen Werte auf vielen verschiedenen Seiten des Buches nachschlagen müßte. Aus diesen Gründen ist das System der doppelten Buchführung trotz seiner Beschränkungen und der Notwendigkeit einer Probebilanz gewöhnlich für umfangreiche „Bleistift und Papier"-Buchhaltungssysteme günstiger.

Für die Anwendung des gerade beschriebenen Systems der Buchführung doppelter Klassifikation sind jedoch alle Einrichtungen und Anlagen geeignet, die über große Kapazitäten zur Informationsspeicherung und über gute Zugriffmöglichkeiten zu den gespeicherten Daten verfügen. Hierzu sind z. B. moderne Lochkartenanlagen mit Lochern, Sortiermaschinen und Druckeinheiten zu rechnen, die die notwendigen mechanischen Funktionen durchaus ausführen können. In manchen Fällen werden sogar Randlochkarten (siehe Kapitel 3, Abschnitt 1, Beispiel 3 und Übung **5,**

Abschnitt 9 dieses Kapitels) genügen. Als am besten geeignet können elektronische Rechenanlagen mit umfangreichen Speichern angesehen werden. Sie haben weiterhin den Vorteil, die erforderlichen Rechnungen außerordentlich schnell und genau durchführen zu können und somit die Buchhaltung immer auf dem neuesten Stand und die notwendigen Berichte relativ schnell erhalten zu können. Die Buchführung doppelter Klassifizierung sollte vor allen Dingen in Verbindung mit solchen Anlagen ihre Nützlichkeit beweisen. Wie dies geschehen kann, wollen wir in den nächsten zwei Kapiteln genauer zeigen.

ÜBUNGEN

1. Es sei V die Matrix der Vorgänge für eine bestimmte Klasse von Vorgängen und W eine Matrix der Vorgänge für eine andere Klasse von Geschäftsvorfällen. Zeigen Sie, daß die Werte der Matrix $V + W$ die Summen der beiden Matrizen darstellen.

2. Herr Müller stelle bei der Überprüfung seiner Buchungen fest, daß er die folgenden Geschäftsvorfälle übersehen hatte:

k)	Zusätzliche Verkäufe auf Kredit	35 DM
l)	Inventurdifferenz (nicht aufzufindende Güter) . .	10 DM
m)	Ein Scheck, der ihm bei einem Verkauf auf Kredit übergeben worden war, ist nicht gedeckt	22 DM

   Ergänzen Sie die in Abb. 9 gezeigte Matrix auf die folgenden zwei Weisen durch die obigen Geschäftsvorfälle:

   a) Berichtigen Sie die Vorfälle a) bis j), um die Vorgänge k), l) und m) und stellen Sie dafür eine neue Matrix der Vorgänge auf.
   b) Bilden Sie eine neue Matrix der Vorgänge W mit den Vorgängen k), l) und m), und bilden Sie, wie in Übung 1 verlangt, die Summe $V + W$.
   c) Sind die Antworten, die Sie auf a) und b) erhalten die gleichen? (Dies wird davon abhängen, wie Sie l) und m) behandeln, siehe dazu Übung 3.)

3. a) Wie kann ein negativer Wert in der Matrix der Vorgänge interpretiert werden?
   b) Zeigen Sie, daß eine negative Gutschrift für Konto i) und eine negative Belastung für Konto j) immer durch eine positive Gutschrift auf Konto j) und eine positive Belastung auf Konto i) ersetzt werden können.
   c) Führen Sie Übung 2 auf verschiedene Weisen aus, indem Sie einmal die Beträge von l) und m) als negative Beträge der Matrix aufnehmen und ein anderes Mal als positive Beträge.
   d) Erscheint es natürlicher, die Vorgänge l) und m) als negative oder als positive Beträge darzustellen?

4. Man erhält die „Transponierte" einer Matrix durch das Auswechseln der Zeilen mit den Spalten. Interpretieren Sie die Transponierte einer Matrix der Vorgänge V.

5. Es seien V und W zwei Matrizen der Vorgänge und e und f die im Text definierten Vektoren. Interpretieren Sie die folgenden Matrixgleichungen als Buchungsvorgänge:

   a) $e(V + W) = eV + eW$
   b) $(V + W)f = Vf + Wf$
   c) $e(V + W)f = eVf + eWf$

6. Herr Müller stelle am Ende des Monats Februar fest, daß während des Monats die folgenden Geschäftsvorfälle angefallen sind:

a) Barverkäufe	355 DM
b) Verkäufe auf Kredit	725 DM
c) Kosten der verkauften Güter	165 DM
d) Bareinkäufe	30 DM
e) Einkäufe auf Kredit	90 DM
f) Lastwagenmiete	150 DM
g) Betriebskosten	60 DM
h) Einlösungen von Kundenforderungen	500 DM
i) Eigenentnahmen	750 DM
j) Begleichung von Verbindlichkeiten	30 DM

Stellen Sie die Matrix der Vorgänge für den Monat Februar auf.

7. Wir haben im folgenden einige weitere Beispiele von Systemen mit doppelter Klassifizierung angeführt. Führen Sie für jedes dieser Beispiele einige typische „Vorgänge" auf und stellen Sie entsprechende „Konten" auf. Fassen Sie dann alle Vorgänge in einer Matrix der Vorgänge zusammen.
   a) Die Importe und Exporte aller Länder der Welt.
   b) Studenten einer Universität, die von einem Semester in ein anderes überwechseln.
   c) Ein Autovermietungsunternehmen, das Filialen in verschiedenen Städten unterhält.
   d) Postzustellung zwischen verschiedenen Städten.

8. Finanzielles Berichtswesen

Im Rahmen des finanziellen Berichtswesens werden am Ende einer gegebenen Periode Aufstellungen über die während der Periode angefallenen geschäftlichen Transaktionen und über den Geschäftsstand am Ende der Periode erstellt. Die zwei bekanntesten Aufstellungen dieser Art sind die *Gewinn- und Verlustrechnung* und die *Bilanz*. Man erhält sie, indem man mit der Matrix der Vorgänge verschiedene Operationen ausführt. Wir werden nun zeigen, wie man diese Aufstellungen, ausgehend von der Bilanz der vorausgehenden Periode und der (gesamten) Matrix der Vorgänge für die laufende Periode, erhält. Im vorangehenden Abschnitt teilten wir alle vorhandenen Konten in Bilanzkonten und Konten der Gewinn- und Verlustrechnung ein. Durch diese Klassifizierung wurde die Matrix der Vorgänge so in vier Teilmatrizen aufgeteilt, daß die einzelnen Teilmatrizen jeweils die Werte enthielten, die nur für Zwecke der Bilanzerstellung, nur für Zwecke der Gewinn- und Verlustrechnung oder für beide Rechnungen verwandt wurden. Abb. 10 zeigt diese Aufteilung in Teilmatrizen. Wir werden im Rahmen der Übungen später analysieren, in welcher Weise Fehler der verschiedenen Teilmatrizen die einzelnen Aufstellungen beeinflussen.

Um die notwendigen Rechnungen auszuführen, brauchen wir die Bilanz der vorangehenden Periode. Wir fassen sie in einer weiteren Zeile und Spalte zusammen, die wir der Matrix der Vorgänge hinzufügen. Summieren wir dann die Zeilen und Spalten der erweiterten Matrix, so erhalten wir die Summen der Belastungen und der Gutschriften für jedes Konto. Auf Grund

Benutzt für Zwecke der Bilanz	Benutzt für beide Aufstellungen
Benutzt für beide Aufstellungen	Nur für Zwecke der Gewinn- und Verlustrechnung

Abb. 10

der Summen der Konten der Gewinn- und Verlustrechnung können wir nun die Gewinn- und Verlustrechnung aufstellen und den Nettogewinn oder -verlust bestimmen. Diese Zahl wird dann wiederum in der Matrix der Vorgänge festgehalten, deren Zeilen und Spalten damit ausgeglichen werden. Auf Grund der Summen der Belastungen und Gutschriften der Bilanzkosten können wir dann die Bilanz für die entsprechende Periode aufstellen. Wir wollen die besprochenen Operationen am Beispiel der Reparaturwerkstatt von Herrn Müller illustrieren:

Beispiel (Fortsetzung). Abb. 11 zeigt die Bilanz der Firma Müller per Ende Dezember.

Reparaturwerkstatt Dietrich Müller
Bilanz per 31. Dezember 196...

Aktiva (Habensalden)		Passive u. Eigenkapital (Sollsalden)	
Kasse	600 DM	Verbindlichkeiten	100 DM
Forderungen	1500 DM	Eigenkapital	2900 DM
Umlaufvermögen (Bestände)	900 DM		3000 DM
	3000 DM		

Abb. 11

Um diese Zahlen der im vorigen Abschnitt aufgestellten Matrix der Vorgänge hinzufügen zu können und außerdem Raum für die Errechnung der Zeilen und Spalten zu haben, fügen wir der Matrix der Vorgänge drei weitere Zeilen und drei weitere Spalten hinzu (siehe Abb. 12). Wir bezeichnen diese Zeilen mit „Aktiva der alten Bilanz", „Summe der Belastungen" und „Aktiva der neuen Bilanz". Die neuen Spalten werden mit „Verbindlichkeiten der alten Bilanz", „Summe der Gutschriften" und „Passiva der neuen Bilanz" bezeichnet. Wir ziehen ferner zwei punktierte Linien, um die Aktivkonten in den Matrizen zu trennen. In Abb. 12 sind nun die Werte der Dezember-Bilanz an den entsprechenden Stellen in die erweiterte Matrix eingetragen worden.

		Zu belastende Konten: Bestandskonten 1	2	3	4	5	Erfolgskonten 6	7	8	9	10	11	Passiva d. alten Bilanz 12	Summe d. Gutschrift 13	Passiva d. neuen Bilanz 14
	1			80	100					150	50	500		880	
	2	450												450	
	3								150					150	
	4			40									100	140	
	5												2900	2900	
Zu erkennende Kosten	6														
	7	400	600											1000	
	8														
	9														
	10														
	11														
Aktiva d. alten Bilanz	12	600	1500	900											
Summe d. Belastungen	13	1450	2100	1020	100				150	150	50	500			
Aktiva d. neuen Bilanz	14														

Abb. 12

Der nächste Schritt ist nun die Errechnung der Summe der ersten 12 Zeilen für die ersten 11 Spalten und das Einsetzen dieser Werte in die 13., mit „Summe der Belastungen" bezeichnete Zeile. Wir errechnen ferner für jede der ersten 11 Zeilen die Summe der ersten 12 Spalten und schreiben diese in die 13., mit „Summe der Gutschriften" bezeichnete Spalte. Auf Grund der gerade errechneten Summen können wir nun die Gewinn- und Verlustrechnung für die Firma Müller aufstellen. Wir wollen uns hier an eine übersichtliche, wenn auch etwas unkonventionelle Form halten, wie sie in Abb. 13 gezeigt wird.

Die Verkäufe und die sonstigen Ausgaben der Gewinn- und Verlustrechnung ergeben sich aus den Geschäftsvorfällen während des Monats Januar. Die Größe der Eigenentnahmen hängt jedoch von Transaktionen zwischen der privaten Person, Herrn Müller, und dem Unternehmen ab.

Der Leser wird sich vielleicht wundern, warum wir bis jetzt weder Werte in die Zeile 6 noch in die Spalte 6 eingesetzt haben. Dieser Raum ist für den im Rahmen der Gewinn- und Verlustrechnung ermittelten Nettogewinn

Reparaturwerkstatt Dietrich Müller
Gewinn- und Verlustrechnung Januar 196...

Verkäufe		1000 DM
Kosten der verkauften Güter	150 DM	
Miete	150 DM	
Sonstige Ausgaben	50 DM	350 DM
Gewinn vor Eigenentnahme		650 DM
Eigenentnahmen		500 DM
Nettogewinn		150 DM

Abb. 13

bestimmt. Da der Nettogewinn in dem Unternehmen verbleibt, sollte damit das Gewinn- und Verlustkonto (6) belastet werden und das Eigenkapitalkonto (5) erkannt werden, um damit anzudeuten, daß sich das Eigenkapital

		Zu belastende Konten: Bestandskonten 1	2	3	4	5	Erfolgskonten 6	7	8	9	10	11	Passiva d. alten Bilanz 12	Summe d. Gutschrift 13	Passiva d. neuen Bilanz 14
	1			80	100					150	50	500		880	
	2	450												450	
	3								150					150	
	4			40									100	140	40
	5						150						2900	3050	3050
Zu erkennende Kosten	6														
	7	400	600											1000	
	8														
	9														
	10														
	11														
Aktiva d. alten Bilanz	12	600	1500	900											
Summe d. Belastungen	13	1450	2100	1020	100		150		150	150	50	500			
Aktiva d. neuen Bilanz	14	570	1650	870											

Abb. 14

Müllers vermehrt hat. Die 150 DM werden also in der fünften Zeile und sechsten Spalte der in Abb. 14 gezeigten Matrix eingesetzt. Die Summen der fünften Zeile und der sechsten Spalte wurden entsprechend abgeändert (im Rahmen der traditionellen Buchführungsmethode geht man an dieser Stelle etwas anders vor, kommt jedoch zu dem gleichen Ergebnis).

Als einziges Problem bleibt uns nun nur noch die Aufstellung der Bilanz für den Monat Januar. Dies geschieht in der letzten Zeile und der letzten Spalte der in Abb. 14 gezeigten Matrix. Zu diesem Zweck werden die Summen der Belastungen und der Gutschriften für jedes der Bilanzkonten saldiert, d. h. wir subtrahieren den Wert der gesamten Gutschriften von dem entsprechenden Wert der gesamten Belastungen und setzen den absoluten Wert des Ergebnisses entweder an die entsprechende Stelle der Zeile 14 oder der Spalte 14, je nachdem welche Summe größer war. Wir wollen diese Rechnungen an Hand des Kontos (1), Kasse, erklären: Wie wir sehen, ist die Summe der Belastungen 1450 DM und die Summe der Gutschriften 880 DM, so daß sich als Differenz 1450 DM — 880 DM = 570 DM ergibt. Diese wird dann als neuer Bilanzwert (Aktivum) in Spalte 1, Zeile 14 eingesetzt. Die Rechnung für ein Passivkonto wollen wir an Hand des Kontos (4), Verbindlichkeiten, darstellen. Wir haben hier 100 DM Belastungen und 140 DM Gutschriften, so daß wir als neuen Bilanzwert 140 DM — 100 DM = 40 DM Verbindlichkeiten einsetzen. Alle anderen Saldieroperationen verlaufen ähnlich.

Auf Grund der letzten Zeile und letzten Spalte in Abb. 14 können wir nun die in Abb. 15 gezeigte neue Bilanz für den Monat Januar aufstellen.

Reparaturwerkstatt Dietrich Müller

Bilanz per 31. Januar 196...

Aktiva (Habensalden)		Passiva u. Eigenkapital (Sollsalden)	
Kasse	570 DM	Verbindlichkeiten	40 DM
Forderungen	1650 DM	Eigenkapital	3050 DM
Umlaufvermögen (Bestände)	870 DM		3090 DM
	3090 DM		

Abb. 15

Das obige Beispiel ist sehr einfach und enthält nicht die in einem Buchhaltungssystem möglichen Verfeinerungen. So haben wir z. B. von jeglicher Abgrenzung, der Errechnung von Steuerabzügen und der Aufstellung anderer finanzieller Berichte abgesehen. In den folgenden Übungen wollen wir einige von ihnen betrachten. Für alle diese Verfeinerungen können jedoch die in diesem Abschnitt beschriebenen Techniken verwendet werden.

ÜBUNGEN

1. Wir wollen Fehler der wie in Abb. 10 aufgeteilten Matrix der Vorgänge betrachten.
   a) Zeigen Sie, daß von Fehlern, die innerhalb des linken oberen Quadrates auftauchen, lediglich die mit der Bilanzierung zusammenhängenden Operationen berührt werden.
   b) Zeigen Sie, daß von Fehlern, die im rechten oberen Quadrat der Matrix auftauchen, lediglich die mit der Gewinn- und Verlustrechnung zusammenhängenden Rechnungen berührt werden. [Hinweis: Beweisen Sie zunächst, daß der Gewinn oder Verlust durch einen solchen Fehler nicht beeinflußt werden darf.]
   c) Zeigen Sie, wie Fehler in den übrigen beiden Quadraten alle Rechnungen beeinflussen.
2. Nehmen Sie an, daß Herr Müller im Beispiel 20% seines Nettogewinns für die Zahlung von Einkommensteuer zurückstelle. Stellen Sie eine neue Gewinn- und Verlustrechnung und eine neue Bilanz für den Monat Januar auf.
3. Stellen Sie unter Benutzung der Daten von Übung 6 des vorhergehenden Abschnittes die Bilanz und die Gewinn- und Verlustrechnung per Ende Februar für Herrn Müller auf. [Teillös.: Der Nettoverlust beträgt 45 DM.]
4. Korrigieren Sie unter Benutzung der Daten der Übung 2 des vorigen Abschnittes die Bilanz und die Gewinn- und Verlustrechnung Müllers per Januar. Wie beeinflussen diese Änderungen die entsprechenden Aufstellungen des Monats Februar? [Teillös.: Es wird nur die Bilanz beeinflußt.]
5. V und W seien die (gesamten) Matrizen der Vorgänge zweier aufeinanderfolgender Perioden eines bestimmten Unternehmens. Vergleichen Sie die Bilanzen und Gewinn- und Verlustrechnungen, die auf Grund der Matrizen V, W und $V + W$ aufgestellt worden sind.
   a) Zeigen Sie, daß die Gewinn- und Verlustrechnung für $V + W$ durch Summierung entsprechender Werte von V und W erstellt werden kann.
   b) Zeigen Sie, daß der Gewinn oder Verlust für $V + W$ die algebraische Summe der Gewinne oder Verluste von V und W ist.
   c) Zeigen Sie, daß man die Bilanz für $V + W$ durch Summierung der entsprechenden Werte der Bilanzen von V und W und eine eventuelle Saldierung erhält.
6. Vor der Aufstellung von Abschlußberichten müssen gewöhnlich bestimmte *Berichtigungsbuchungen* durchgeführt werden. Durch sie werden aufgelaufene Abschreibungen, Zinsen oder Mieten, Abschreibungen dubioser Forderungen, Fehlerberichtigungen usw. berücksichtigt. Die Buchungen der Wertberichtigungen gleichen den normalen Buchungsvorgängen, und wir wollen sie hier durch die Matrix B, die *Berichtigungsmatrix*, darstellen. Ist V die Matrix der Vorgänge einer entsprechenden Periode, dann ist $V + B$ die Matrix, die in Wirklichkeit für die Erstellung der Abschlußberichte benutzt wird. Nach Aufstellung der Berichte ist es jedoch manchmal von Nutzen, einige der Berichtigungsvorgänge wieder rückgängig zu machen. Dies geschieht dann durch sog. Rückbuchungen. Es sei nun R die Rückbuchungsmatrix und V' die Matrix, die alle die Berichtigungsbuchungen enthält, die rückgängig gemacht werden sollen. Alle anderen Stellen der Matrix seien mit 0 ausgefüllt. Es gibt nun zwei verschiedene Wege, die Rückbuchungen darzustellen:
   a) Zeigen Sie, daß die Matrix $-V'$ als die Rückbuchungsmatrix R benutzt werden kann.
   b) C^{TR} sei die Transponierte von C, d. h. die Matrix, die durch ein Auswechseln der Zeilen mit den Spalten aus der Matrix C entsteht. Zeigen Sie nun, daß $R = (V')^{TR}$ als die Rückbuchungsmatrix verwendet werden kann.

8. a) Zeigen Sie, daß für die Aufstellung der Bilanz und der Gewinn- und Verlustrechnung für die Reparaturwerkstatt Müllers die Kenntnis der Zeilen 13 und der Spalte 13 der in Abb. 12 gezeigten Matrix genügen.
   b) Zeigen Sie, daß es für die Aufstellung der Gewinn- und Verlustrechnung und der Bilanz ganz allgemein genügt, wenn man die Bilanz der vorangehenden Periode und die Summe der jeweiligen Belastungen und Gutschriften pro Konto einer gegebenen Periode kennt.

*9. Flußdiagramme für Buchhaltungssysteme mit doppelter Klassifizierung

Bei der traditionellen doppelten Buchführung geht man wie folgt vor: Die täglich anfallenden Geschäftsvorfälle werden in Journalen festgehalten. Dabei werden sie doppelt klassifiziert und einmal im Soll und einmal im Haben verbucht. In bestimmten Zeitabständen werden die Werte des Journals auf die Konten oder ins Hauptbuch übertragen. Auf Grund der Eintragungen in den Hauptbüchern erfolgt dann die Aufstellung der Abschlußberichte. Die Eintragungen in den Journalen und die Übertragung in die Hauptbücher wird gewöhnlich mit Hilfe bestimmter Buchhaltungsmaschinen automatisch durchgeführt. Selbst bei Benutzung dieser Maschinen ist jedoch ein großer Teil der Arbeiten weiterhin durch menschliche Arbeitskräfte auszuführen.

Wir wollen nun im folgenden unter Benutzung von Flußdiagrammen eine Methode einer Buchführung mit doppelter Klassifikation beschreiben, die ohne Schwierigkeiten für digitale Rechenanlagen programmiert werden kann. Um Speicherkapazität zu sparen, werden wir auf dem Ergebnis der Übung 8 des vorhergehenden Abschnittes aufbauen und von der Summe der Belastungen und der Summe der Gutschriften der einzelnen Konten ausgehen, ohne dabei die gesamte Matrix der Vorgänge durchzurechnen. Alle Rechen- und Übertragungsoperationen werden durch den Rechner ausgeführt werden.

Als Eingabedaten dienen alle einzelnen Geschäftsvorfälle (doppelt klassifiziert), die während einer gegebenen Zeitspanne anfielen. Jeder dieser Geschäftsvorfälle kann z. B. auf einer Lochkarte enthalten sein, die dann unter anderem den Betrag des Geschäftsvorfalles und die Kennziffer des zu belastenden und des zu erkennenden Kontos enthält. Zu diesen wirklich angefallenen Geschäftsvorfällen kommen Buchungen, die durch Geschäftsführungsentscheidungen ausgelöst werden. Sie betreffen die Zahlung von Dividenden und Boni, Abschreibungen dubioser Forderungen und außergewöhnliche Verluste. (Dazu mögen außerdem die in Übung 6 des vorhergehenden Abschnittes beschriebenen Berichtigungsbuchungen der verschiedenen Arten kommen!) Im Rahmen des Rechnerprogrammes werden dann die Summen der Belastungen und Gutschriften für jedes Konto ge-

bildet, dazu die Werte der Bilanz der vorangehenden Periode addiert und dann auf Grund dieser Daten die Bilanz und die Gewinn- und Verlustrechnung für die neue Periode ausgedruckt.

Beachten Sie, daß eine menschliche Tätigkeit lediglich beim doppelten Kontieren und bei der Ablochung der Geschäftsvorfälle in Lochkarten notwendig wird. Dadurch wird die Möglichkeit von Fehlern, die auf menschliches Versagen zurückzuführen sind, wesentlich eingeschränkt.

Um die Flußdiagramme beschreiben zu können, benötigen wir einige Bezeichnungen. Es bedeute t_i eine buchhalterische Transaktion (Geschäftsvorfall oder Berichtigungsbuchung). Jede dieser Transaktionen kann mit Hilfe von drei Zahlen gekennzeichnet werden: Dem Betrag a_i, der Kennzahl $d(i)$ des Kontos, auf dem die Debetbuchung (Sollbuchung) stattfinden soll, und der Kennzahl $c(i)$ des Kontos, auf dem die Kreditbuchung (Habenbuchung) durchgeführt werden soll. Wir können also t_i durch den dreikomponentigen Vektor

$$t_i = [a_i, d(i), c(i)]$$

ausdrücken.

Wir wollen annehmen, daß die Konten nach dem bei der Reparaturwerkstatt von Herrn Müller benutzten Schema numeriert seien, d. h. wie führen erst die Bilanzkosten auf, dann das Gewinn- und Verlustkonto, dann die Ertrags-

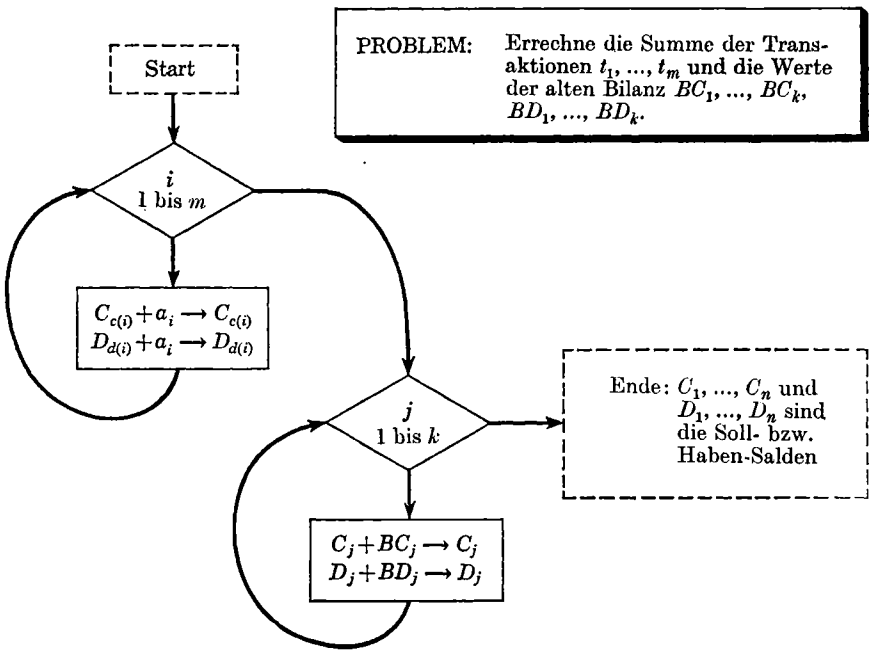


Abb. 16

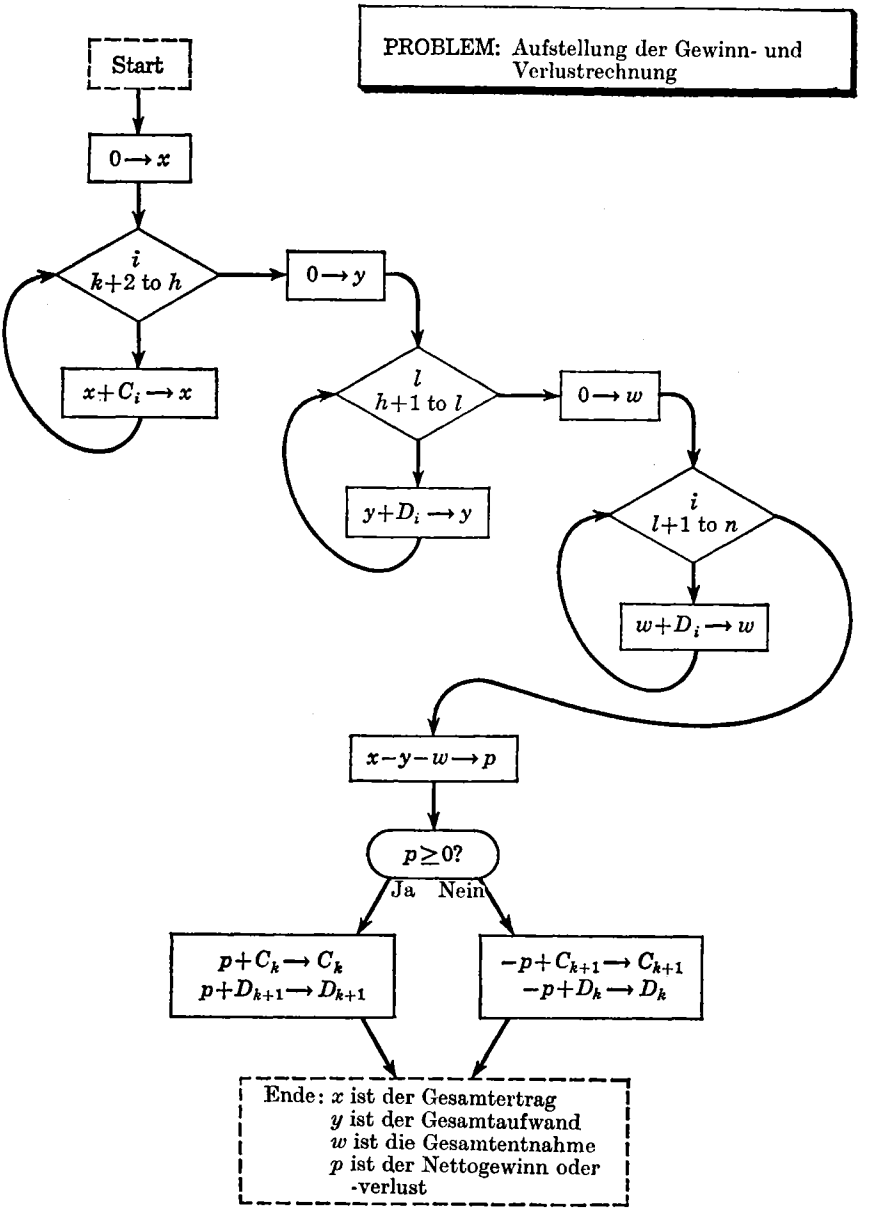

PROBLEM: Aufstellung der Gewinn- und Verlustrechnung
Start
0 → x
i
k+2 to h
0 → y
x+C_i → x
l
h+1 to l
0 → w
y+D_i → y
i
l+1 to n
w+D_i → w
x−y−w → p
p≥0?
Ja
Nein
p+C_k → C_k
p+D_k+1 → D_k+1
−p+C_k+1 → C_k+1
−p+D_k → D_k
Ende: x ist der Gesamtertrag
y ist der Gesamtaufwand
w ist die Gesamtentnahme
p ist der Nettogewinn oder -verlust

Abb. 17

konten, dann die Aufwandskonten und schließlich die Entnahmekonten. Im einzelnen wollen wir annehmen, daß die Indizes wie folgt zugeordnet seien:

$1\,2 \ldots k$	$k+1$	$k+2 \ldots h$	$h+1 \ldots l$	$l+1 \ldots n$
Bilanz-konten	Gewinn oder Verlust	Ertrags-konten	Aufwands-konten	Entnahme-konten

Das Eigenkapitalkonto soll im speziellen den Index k haben. Als nächstes seien $D_1, \ldots, D_n$ bzw. $C_1, \ldots, C_n$ die Summen der Soll- bzw. Habenbuchungen der verschiedenen Konten in der jeweiligen Spanne. Schließlich seien $BD_1, \ldots, BD_k$ bzw. $BC_1, \ldots, BC_k$ die Aktiva und Passiva der Bilanz. Die auszuführenden Rechnungen sollen nun durch die drei folgenden Flußdiagramme beschrieben werden. Dabei zeigt Abb. 16 die Rechnungen, die notwendig sind, um die Soll- und Habensalden der einzelnen Konten zu ermitteln.

Im Rahmen der ersten Schleife werden hier die einzelnen Transaktionen addiert und im Rahmen der zweiten Schleife die entsprechenden Werte der alten Bilanz hinzugefügt. Die für die Aufstellung der Gewinn- und Verlustrechnung notwendigen Rechnungen zeigt Abb. 17. Hier werden im Rahmen

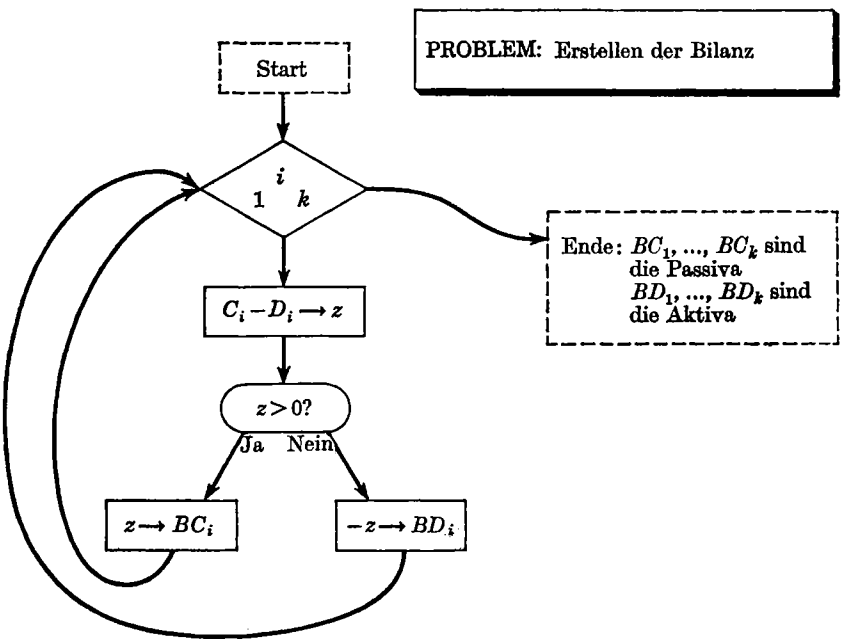


Abb. 18

der ersten Schleife die Ertragskonten summiert, im Rahmen der zweiten Schleife die Aufwandskonten und im Rahmen der dritten Schleife die Entnahmekonten.

Als nächstes wird nun der Gewinn oder Verlust p errechnet und im Falle eines Gewinns als Habenbuchung, im Falle eines Verlustes als Sollbuchung auf dem Eigenkapitalkonto verbucht. Die für die Aufstellung der Bilanz notwendigen Rechnungen werden in Abb. 18 gezeigt. Die einzige Rechenoperation, die noch auszuführen ist, ist im wesentlichen die Saldierung der ersten k Konten. Der Leser sollte sich selbst davon überzeugen, daß diese Saldierung mit dem in Abb. 18 gezeigten Flußdiagramm durchgeführt werden kann.

Beispiel. Wir wollen den Gebrauch der Flußdiagramme noch einmal dadurch illustrieren, daß wir mit ihrer Hilfe die Abschlußberichte für die Reparaturwerkstatt Müller für den Januar aufstellen. Es ist $k = 5$, $h = 7$, $l = 10$ und $n = 11$. Die Tabelle der Abb. 19 zeigt, wie sich die Soll- und Habenvektoren während der verschiedenen Rechnungen verändern.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
(1)	850	600	120	100				150	150	50	500
(1′)	600	1500	900								
(2)	1450	2100	1020	100				150	150	50	500
(2′)						150					
(3)	1450	2100	1020	100		150		150	150	50	500
(4)	570	1650	870								

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_7	C_9	C_{10}	C_{11}
(1)	880	450	150	40			1000				
(1′)				100	2900						
(2)	880	450	150	140	2900		1000				
(2′)					150						
(3)	880	450	150	140	3050		1000				
(4)				40	3050						

Abb. 19

In den Tabellen enthält Zeile (1) die Summen der einzelnen Transaktionen und (1′) die Werte der alten Bilanz. Zeile (2) gibt dann die Werte der Soll- und Habenvektoren, nachdem (1) und (1′) im Rahmen des Flußdiagramms der Abb. 16 addiert wurde. Mit Hilfe des in Abb. 17 gezeigten Flußdiagramms werden dann die Gewinn- und Verlustrechnungen durchgeführt. Dabei erhalten wir die Größen

$$x = 1000,\ y = 350,\ w = 500 \text{ und } p = 150.$$

Zeile (2′) der Abb. 19 zeigt den errechneten Gewinn. Mit Hilfe des Flußdiagramms der Abb. 18 werden dann die Bilanzkosten saldiert, wobei sich die in Zeile (4) der Abb. 19

gezeigten Soll- und Habenvektoren ergeben. (Bitte beachten Sie, daß wir die Soll- und Habensalden des Gewinn- und Verlustkontos 0 gesetzt haben, um für die Rechnungen des nächsten Monats bereit zu sein.)
Nach der Durchführung der in Abb. 16 enthaltenen Rechenoperationen ergeben sich die in Zeile (2) gezeigten Soll- und Habenvektoren. Nach der Durchführung der Gewinn- und Verlustrechnungen ergeben sich die in Zeile (3) gezeigten und nach der Durchführung der Bilanzrechnungen die in Zeile (4) gezeigten Werte. Es ist sehr instruktiv, alle diese Rechnungen Schritt für Schritt gemäß der einzelnen Flußdiagramme durchzuführen.

ÜBUNGEN

1. Modifizieren Sie das in Abb. 17 gezeigte Flußdiagramm so, daß die automatische Rückstellung von 20% des Nettogewinns (nicht Verlustes) für Einkommensteuerzahlungen möglich ist.
2. Stellen Sie die Gewinn- und Verlustrechnung und die Bilanz per Ende Januar für die Reparaturwerkstatt Müller unter Benutzung der in diesem Abschnitt beschriebenen Flußdiagramme auf, indem Sie die zusätzlichen Berichtigungsbuchungen, wie sie in Übung 2 des Abschnittes 7 erwähnt werden, berücksichtigen.
3. Stellen Sie die Bilanz und die Gewinn- und Verlustrechnung der Reparaturwerkstatt Müller per Ende Februar unter Benutzung der Flußdiagramme des vorliegenden Abschnittes auf (siehe Übung 6, Abschnitt 7).
4. Modifizieren Sie die Flußdiagramme so, daß Berichtigungs- und Rückbuchungen berücksichtigt werden können.
5. Entwerfen Sie unter Benutzung des in Kapitel III, Abschnitt 1, Beispiel 3, beschriebenen Lochkartensystems für ein kleines bis mittleres Unternehmen ein Buchhaltungssystem mit doppelter Klassifikation. Entwerfen Sie unter Benutzung der Flußdiagramme des vorliegenden Abschnittes Anweisungen zur manuellen Aufstellung der Bilanz und der Gewinn- und Verlustrechnung.

Empfohlene Lektüre

Isaac: Praktische Anwendungen der Finanzmathematik, Essen 1954.
Kolms, H.: Finanzwissenschaft, Berlin 1959 (Göschen Band 148, 776 und 782).
Kosiol, E.: Finanzmathematik, 7. Aufl. 1956.
Lotz, W.: Finanzwissenschaft 1931.
Timpe: Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik, Wiesbaden 1953.

VII. Lineares Programmieren

1. Polyedrische konvexe Punktmengen[1]

Wir wollen eine Gleichung, die eine oder mehrere Variable enthält, eine *offene Aussage*[2] nennen. Ein Beispiel hierfür ist

(a) $$-2x_1 + 3x_2 = 6.$$

Setzen wir $A = (-2, 3)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $b = 6$, so können wir (a) in Matrixform als

$$Ax = (-2, 3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_1 + 3x_2 = 6 = b$$

schreiben.

Hierbei ist die Aussage $Ax = b$ für einige der zweikomponentigen Vektoren x richtig und für andere falsch. Ist z. B. $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, so ist die Aussage wahr, da $-2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 6$ ist. Ist dagegen $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, so ist sie falsch, da $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 8$. Wir wollen die Klasse all der zweikomponentigen Vektoren, für die offene Aussage $Ax = b$ wahr ist, als die Wahrheitsklasse der offenen Aussage bezeichnen.

Beispiel 1. In der ebenen Geometrie ist es üblich, die Wahrheitsklassen von offenen Aussagen, wie (a), in einer Ebene darzustellen. Wir können uns also jeden Vektor x mit zwei Komponenten als die Koordinaten eines Punktes einer Ebene vorstellen. Die Wahrheitsklasse oder der *geometrische Ort* (der das geometrische Äquivalent der Wahrheitsklasse darstellt) von (a) ist also die in Abb. 1 gezogene Linie. Die Punkte dieser Geraden erhält man, indem man für eine der Variablen willkürliche Werte annimmt und die entsprechenden Werte für die andere Variable errechnet. Setzen wir also $x_1 = 0$, so finden wir $x_2 = 2$, d. h. der Punkt $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt auf dem geometrischen Ort. Setzen wir $x_2 = 0$, so finden wir entsprechend $x_1 = -3$, so daß auch der Punkt $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dem geometrischen Ort liegt.

---

[1] Dem im Original verwandten Wort „set" entspricht im Deutschen sowohl der Begriff „Klasse" als auch der Begriff „Menge" oder „Punktmenge". Da man in der Linearplanung gern geometrisch interpretiert, wurde hier „set" mit Punktmenge übersetzt. Alle gemachten Aussagen lassen sich auch auf allgemeine Klassen übertragen.

[2] Die amerikanische Fassung enthält an dieser Stelle das Wort „statement", das in diesem Zusammenhang nur schwer ins Deutsche zu übersetzen ist. Der deutsche Begriff der „Aussage" — aber auch der „Festlegung" — kommt dem Sachverhalt m. E. am nächsten. [Der Übersetzer.]

Auch Ungleichungen der Form $Ax \leqq b$, $Ax < b$ oder $Ax > b$ sind offene Aussagen und besitzen dementsprechend Wahrheitsklassen. Ist x ein Vektor mit zwei Komponenten, so können diese in der Ebene dargestellt werden.

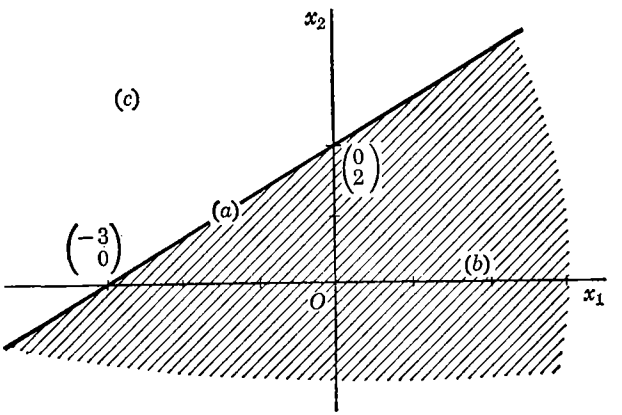


Abb. 1

Beispiel 2. Betrachten Sie die Ungleichungen (b) $Ax < b$, (c) $Ax > b$, (d) $Ax \leqq b$ und (e) $Ax \geqq b$, wobei A, x und b die gleichen Werte wie in Beispiel 1 besitzen sollen. Diese Ungleichungen können wir nun in der folgenden Form schreiben

(b) $\quad -2x_1 + 3x_2 < 6$
(c) $\quad -2x_1 + 3x_2 > 6$
(d) $\quad -2x_1 + 3x_2 \leqq 6$
(e) $\quad -2x_1 + 3x_2 \geqq 6.$

Betrachten wir zunächst (b): Welche Punkte $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ genügen dieser Ungleichung? Durch Versuchen können wir verschiedene Punkte ermitteln, die auf dem geometrischen Ort liegen. So liegt z. B. der Punkt $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ darauf, da $-2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 < 6$. Auf der anderen Seite genügt der Punkt $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ den Bedingungen nicht, da $-2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = -2 + 9 = 7$, also nicht kleiner als 6 ist. Zwischen diesen beiden Punkten finden wir den Punkt $\begin{pmatrix}1\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}$, der gerade auf der Grenze, d. h. auf dem geometrischen Ort (a) liegt. Wir sehen, daß, wenn wir mit $\begin{pmatrix}1\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}$ auf dem geometrischen Ort von (a) beginnen, wir dann den geometrischen Ort von (b) verlassen, wenn wir x_2 vergrößern und wir ihn wieder betreten, sobald wir x_2 verkleinern. Dies gilt ganz allgemein: Ist uns ein Punkt auf dem geometrischen Ort von (a) gegeben, so erhalten wir mehr als 6, wenn wir seine zweite Koordinate verkleinern. Wir erhalten damit einen Punkt innerhalb der Wahrheitsklasse (b). Wir sehen also, daß der geometrische Ort von (b) aus all den Punkten besteht, die unterhalb der Geraden (a) liegen oder, mit anderen Worten, aus der schraffierten Fläche der Abb. 1. Wir wollen hier die auf der einen Seite einer Geraden liegende Fläche als eine *offene Halbebene* bezeichnen.

Mit Hilfe genau der gleichen Analyse können wir nun zeigen, daß der geometrische Ort von (c) die offene Halbebene oberhalb der Geraden (a) ist. Man kann dies ebenfalls von der Tatsache ableiten, daß die Wahrheitsklassen der Aussagen (a), (b) und (c) voneinander unabhängig sind und daß als deren Vereinigung die gesamte Ebene anzusehen ist.
Da (d) die Disjunktion von (a) und (b) ist, bildet die Wahrheitsklasse von (d) die Vereinigung der Wahrheitsklassen von (a) und (b). Eine solche, die aus einer offenen Halbebene einschließlich der Punkte der Begrenzungslinie besteht, wird eine abgeschlossene Halbebene genannt. Offensichtlich besteht die Wahrheitsklasse von (e) aus der Vereinigung von (a) und (c) und ist damit ebenfalls eine abgeschlossene Halbebene.

Gewöhnlich stellen wir verschiedene offene Aussagen auf einmal als Behauptung auf, d. h. wir behaupten die Konjunktionen einer Anzahl solcher Aussagen. Dies kann einfach dadurch geschehen, daß wir A durch eine $m \cdot n$ Matrix, x durch einen n komponentigen Spaltenvektor und b durch einen m komponentigen Spaltenvektor ersetzen. Die Aussage $Ax \leqq b$ ist dann die Konjunktion der i Aussagen $A_i x \leqq b_i$, wobei $A_i x$ die i-te Zeile von A und b_i der i-te Wert von b ist.

Beispiel 3. Wir wollen das Beispiel $Ax \leqq b$ betrachten, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen wir nun die Komponenten der Gleichungen $Ax \leqq b$, so erhalten wir

(f) $\quad -x_1 \leqq 0$, was äquivalent zu $x_1 \geqq 0$ ist.
(g) $\quad -x_2 \leqq 0$, was äquivalent zu $x_2 \geqq 0$ ist.
(h) $\quad 2x_1 + 2x_2 \leqq 6.$

Hier stellen wir gleichzeitig drei verschiedene Behauptungen auf, d. h. wir behaupten ihre Konjunktion. Die Wahrheitsklasse von $Ax \leqq b$ wird daher durch die Überschneidung der individuellen Wahrheitsklassen gebildet. Die Wahrheitsklasse von (f) ist die rechte Halbebene, die Wahrheitsklasse von (g) ist die obere Halbebene und die Wahrheitsklasse von (h) die Halbebene unterhalb der Geraden $2_1x + 3x_2 = 6$. Die Überschneidung dieser Wahrheitsklassen wird durch das in Abb. 2 schraffierte Dreieck (einschl. dessen Seiten) gebildet. Die in Abb. 2 schraffierte Fläche enthält also alle Punkte, die gleichzeitig (f), (g) und (h) genügen.

Wir haben uns in den Beispielen bis jetzt auf offene Aussagen mit zwei Variablen beschränkt. Die Wahrheitsklassen solcher Aussagen können in einer Ebene dargestellt werden. Auf die gleiche Weise können die Wahrheitsklassen der Aussagen mit drei Variablen im dreidimensionalen Raum dargestellt werden. Die Wahrheitsklassen von offenen Aussagen mit vier und mehr Variablen können dagegen auf diese Weise nicht mehr veranschaulicht werden. Leider führen praktische Probleme gewöhnlich zu solchen Aussagen. Wir werden jedoch (in Abschnitt 4) Methoden entwickeln, mit deren Hilfe wir solche Probleme lösen können, ohne die Wahrheitsklassen geometrisch darstellen zu müssen.

Um im folgenden leichter allgemein über Konjunktionen mehrerer offener Aussagen sprechen zu können, werden wir für den Rest dieses Kapitels unter b einen Spaltenvektor mit m Komponenten, unter x einen Spaltenvektor mit n Komponenten und unter A eine $m \times n$ Matrix verstehen. Die i-te Zeile von A wird mit A_i bezeichnet. Entsprechend wollen wir unter b_i die i-te Komponente von b verstehen. Natürlich ist A_i ein Zeilenvektor mit n Komponenten und b_i ein *Skalar*. Unter X_n werden wir die Klasse aller n komponentigen Spaltenvektoren x verstehen. Im Beispiel 3 war also $m = 3$ und $n = 2$. A war eine $3 \cdot 2$ Matrix, x ein Spaltenvektor mit zwei Komponenten und b ein Spaltenvektor mit drei Komponenten. Die Klasse aller zweikomponentigen Spaltenvektoren x wäre mit X_2 zu bezeichnen gewesen. Zum Zwecke späterer Ausführungen wollen wir nun noch einige Definitionen festlegen:

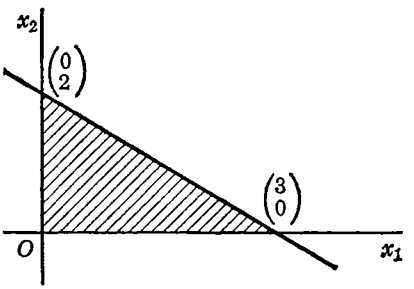


Abb. 2

Definition. Die Wahrheitsklasse von $A_i x = b_i$ wird eine Hyperebene innerhalb von X_n genannt. Mit *offenen Halbräumen* bezeichnet man die Wahrheitsklassen der Ungleichungen der Form $A_i x < b_i$ oder $A_i x > b_i$, während man mit abgeschlossenen Halbräumen innerhalb von Xn die Wahrheitsklassen von Ungleichungen der Art $A_i x \leqq b_i$ oder $A_i x \geqq b_i$ bezeichnet.

Behaupten wir die Konjunktion verschiedener offener Aussagen, so wird die sich daraus ergebende Wahrheitsklasse durch die Intersektion der Wahrheitsklassen der einzelnen offenen Aussagen gebildet. So haben wir z. B. in Beispiel 3 die Konjunktion von $n = 3$ offenen Aussagen innerhalb von X_2 vorliegen. Wir zeigen dies in Abb. 2 geometrisch als die Intersektion von $m = 3$ abgeschlossenen Halbräumen in $n = 2$ Dimensionen. Solche Intersektionen abgeschlossener Halbräume sind für unsere Betrachtungen besonders wichtig.

Definition. Die Intersektion einer endlichen Anzahl geschlossener Halbräume bildet eine *polyedrische, konvexe Punktmenge*.

Theorem. Jede *polyedrische, konvexe Punktmenge* ist die Wahrheitsklasse einer Aussage in der Form der Ungleichung $A_x \leqq b$.

Beweis. Ein abgeschlossener Halbraum ist die Wahrheitsklasse einer Ungleichung der Form $A_i x \leqq b_i$. (Eine Ungleichung der Form $A_i x \geqq b_i$ kann durch die Multiplikation von —1 in die eben erwähnte Form überführt werden.) Eine polyedrische, konvexe Punktmenge ist nun die Wahrheits-

klasse der Konjunktion verschiedener solcher Aussagen. Da A die Matrix, deren i-te Zeile A_i, und b der Spaltenvektor mit b_i Komponenten ist, ist die Ungleichung $Ax \leqq b$ eine abgekürzte Form der Behauptung der Konjunktion der Ungleichung $A_1x \leqq b_1, \ldots, A_mx \leqq b_m$. Dies sollte bewiesen werden. Wir verwenden den Begriff polyedrische, konvexe Punktmenge, da diese Punktmengen spezielle Fälle konvexer Punktmengen sind. Man bezeichnet eine Punktmenge C dann als konvexe Punktmenge, wenn die Verbindung zweier Punkte u und v dieser Punktmenge innerhalb von C verläuft. Mit anderen Worten, eine Punktmenge ist dann konvex, wenn alle Punkte der Form $z = au + (1 - a)v$ für $0 \leqq a \leqq 1$ immer dann zu C gehören, wenn u und v Punkte der Punktmenge C sind. Wir werden uns in diesem Kapitel hauptsächlich mit polyedrisch, konvexen Punktmengen befassen.

ÜBUNGEN

1. Illustrieren Sie die Wahrheitsklassen von $Ax \leqq b$ für die im folgenden gegebenen A und b. (Zeichnen Sie zunächst die Wahrheitsklassen der einzelnen Aussagen und bestimmen Sie dann deren Intersektion.)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$

(g) $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}.$

(h) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

(j) $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(k) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Betrachten Sie die folgenden Punktmengen:

   U ist die gesamte Ebene.
   A ist die Halbebene, deren geometrischer Ort $-2x_1 + x_2 < 3$.
   B ist die Halbebene, deren geometrischer Ort $-2x_1 + x_2 > 3$.
   C ist die Halbebene, deren geometrischer Ort $-2x_1 + x_2 \leqq 3$.
   D ist die Halbebene, deren geometrischer Ort $-2x_1 + x_2 \geqq 3$.
   L ist die Gerade, deren geometrischer Ort $-2x_1 + x_2 = 3$.
   ϵ ist die leere Klasse.

   Zeigen Sie, daß die folgenden Zusammenhänge zwischen den genannten Punktmengen bestehen:

   $\tilde{A} = D$, $\tilde{B} = C$, $\tilde{L} = A \cup B$, $C \cap D = L$, $A \cap B = \mathfrak{E}$, $A \cap C = A$, $B \cap D = B$, $A \cup D = \mathfrak{U}$, $B \cup C = \mathfrak{U}$, $A \cup C = C$, $B \cup D = D$, $A \cup L = C$, $B \cup L = D$.

   Finden Sie noch andere Verhältnisse?

3. Welche der in Übung 1 genannten polyedrisch, konvexen Punktmengen bestehen aus einer begrenzten Fläche und welche aus einer unbegrenzten Ebene?
   [Teillös.: (c), (d), (f), (h) und (j) sind unbegrenzte Ebenen; (g) ist eine Gerade; (i) und (k) sind leer.]

4. Nennen Sie die Ungleichungen, die die Wahrheitsklassen der folgenden Halbebenen sind:
   a) die offene Halbebene oberhalb der x_1 Achse. [Lös.: $x_2 > 0$.]
   b) die abgeschlossene Halbebene einschließlich und oberhalb der Geraden, die mit der positiven x_1- und x_2-Achse einen Winkel von 45^0 bildet.

Die Übungen 5 bis 9 beziehen sich auf eine Situation, in der ein Einzelhändler darüber zu entscheiden hat, wie viele Einheiten der Güter A und B er auf Lager haben sollte. Es sei x die Anzahl der Einheiten A und y die Anzahl der Einheiten B. A koste 4 DM pro Einheit, und B koste 3 DM pro Einheit.

5. Man könne weder von A noch von B eine negative Anzahl von Einheiten am Lager halten. Drücken Sie diese Aussagen als Ungleichungen aus und zeichnen Sie deren Wahrheitsklassen.

6. Die maximale Nachfrage während der vom Einzelhändler betrachteten Zeitspanne werde 600 Einheiten A oder 600 Einheiten B nicht übersteigen. Modifizieren Sie die in Übung 5 bestimmte Wahrheitsklasse, indem Sie diese Tatsache berücksichtigen.

7. Der Einzelhändler sei nicht bereit, mehr als 2400 DM durch Lagerbestände zu binden. Modifizieren Sie dementsprechend die in Übung 6 bestimmte Wahrheitsklasse.

8. Der Einzelhändler entscheide sich, wenigstens zweimal soviel von A wie B auf Lager zu halten. Modifizieren Sie dementsprechend die Wahrheitsklasse der Übung 7.

9. Schließlich entscheide sich der Einzelhändler dazu, 900 DM in den Lagerbeständen von B zu investieren. Welche Möglichkeiten bestehen noch? [Lös.: keine.]

10. Nehmen Sie an, die minimalen Nahrungsforderungen der Menschen seien durch die folgende Tabelle gegeben:

	Phosphor	Calcium
Erwachsener	0,02	0,01
Kind	0,03	0,03
Säugling	0,01	0,02

Tragen Sie die Phosphormenge auf der vertikalen Achse und die Calciummenge auf der horizontalen Achse auf. Zeichnen Sie dann die konvexen Punktmengen der minimalen Anforderungen für Erwachsene, Kinder und Säuglinge. Geben Sie an, ob die folgenden Behauptungen wahr sind oder nicht:

a) Wenn die Anforderungen eines Kindes befriedigt sind, so sind auch die eines Erwachsenen befriedigt.

b) Die Anforderungen eines Säuglings sind nur dann befriedigt, wenn es die eines Kindes auch sind.

c) Den Anforderungen eines Erwachsenen wird dann entsprochen, wenn die Anforderungen eines Säuglings befriedigt werden.

d) Sowohl die Anforderungen eines Erwachsenen als die eines Säuglings werden nur dann befriedigt, wenn die Erfordernisse eines Kindes erfüllt sind.

e) Man kann die Anforderungen eines Erwachsenen zufriedenstellen, ohne die Anforderungen eines Säuglings zu erfüllen.

11. Beweisen Sie, daß die folgenden Punktmengen konvex sind. Welche davon sind polyedrisch, konvexe Punktmengen?

a) die Fläche einschließlich der Seiten eines Dreiecks.

b) die Fläche eines Kreises.

c) die Fläche eines Rechtecks.

d) ein Rechteck, das durch einen Halbkreis überdeckt wird.

12. Betrachten Sie eine Ebene, in die ein kartesisches Koordinatensystem eingezeichnet ist. Darin sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und a_2 $(a_1 \neq a_2)$ so eingezeichnet, daß sich eine Ecke im Ursprung befindet und zwei der Seiten auf den Achsen verlaufen. Beweisen Sie, daß die Fläche des Rechtecks einschließlich seiner Seiten eine polyedrische, konvexe Punktmenge bilden und nennen Sie die Aussage der Form $Ax \leqq b$, dessen Wahrheitsklasse sie darstellt.

13. Die folgenden Pdygone werden in eine Ebene, die ein kartesisches Koordinatensystem enthält, so eingezeichnet, daß sich jeweils eine Ecke im Ursprung befindet und eine Seite entlang der einen Achse läuft. Bestimmen Sie die Aussagen $Ax \leqq b$, deren Wahrheitsklassen sie bilden.

a) Ein regelmäßiges Fünfeck.

b) Ein regelmäßiges Sechseck.

2. Extremwerte; Maxima und Minima linearer Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst das Problem der Bestimmung der Extremwerte einer begrenzten, polyedrisch konvexen Punktmenge besprechen. Wir werden dann untersuchen, wie man die Maximum- und Minimum-Werte einer linearen Funktion bestimmt.

Wir wollen dabei folgende Bezeichnungen verwenden: Die polyedrische, konvexe Punktmenge C sei die Wahrheitsklasse der Aussage $Ax \leqq b$, wobei A eine $m \cdot n$ Matrix, x ein Spaltenvektor mit n Komponenten und b ein Spaltenvektor mit m Komponenten sei. Wir wollen mit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ die Zeilen von A bezeichnen. A_i ist also ein Zeilenvektor mit n Komponenten und

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Die Aussage $Ax \leqq b$ ist dann die Konjunktion der Aussagen

$$A_1x \leqq b_1,\ A_2x \leqq b_2,\ \ldots,\ A_mx \leqq b_m.$$

Definition. Wir wollen die Wahrheitsklasse der Aussage $A_ix = b_i$ die *begrenzende Hyperebene* des Halbraumes $A_ix \leqq b_i$ nennen.

In Abb. 1 des vorangehenden Abschnittes ist also die schräge Gerade (a) die begrenzende Hyperebene des Halbraumes (b).

Es kommt manchmal vor, daß eine der eine polyedrische, konvexe Punktmenge bestimmenden Ungleichungen überflüssig ist. Wir wollen dann die Ungleichung $A_ix \leqq b_i$ als überbestimmt bezeichnen, wenn die Wahrheitsklasse der Konjunktion aller Aussagen $A_1x \leqq b_1, \ldots, A_mx \leqq b_m$ die gleiche ist wie die Konjunktion aller dieser Aussagen mit Ausnahme von $A_ix \leqq b_i$. Fügen wir z. B. in Beispiel 3 des Abschnittes 1 den die polyedrische, konvexe Punktmenge definierenden Aussagen die Behauptung $x_1 \geqq -1$ hinzu, so ist dies als überflüssig (oder überbestimmend) zu bezeichnen, da die Aussage $x_1 \geqq 0$ $x_1 \geqq -1$ impliziert. In Übung 1 werden weitere Beispiele überbestimmter Aussagen gegeben. Offensichtlich ändert die Eliminierung überbestimmter Ungleichungen nicht die polyedrische, konvexe Punktmenge C, und wir werden daher in Zukunft annehmen, daß alle solche überbestimmten Ungleichungen bereits eliminiert wurden. Ist die Ungleichung $A_ix \leqq b_i$ nicht überbestimmt, so muß ihre begrenzende Hyperebene $A_ix = b_i$ einen Punkt der polyedrischen, konvexen Punktmenge C enthalten.

Definition. Die polyedrische, konvexe Punktmenge C sei durch $Ax \leqq b$ definiert. Die begrenzenden Hyperebenen von C sind dann die begrenzenden

Hyperebenen der (nicht überbestimmten) Halbräume, deren Intersektion C ist.

In Beispiel 3 des Abschnittes 1 sind z. B. die begrenzenden Hyperebenen der gegebenen polyedrischen, konvexen Punktmenge die drei Seiten des in Abb. 2 schraffierten Dreiecks. Beachten Sie, daß sich diese drei Geraden paarweise in drei Punkten, den Ecken des Dreiecks, schneiden.

Definition. Es sei C die polyedrische, konvexe durch $Ax \leqq b$ definierte Punktmenge. x sei ein Vektor mit n Komponenten. Der Punkt T soll dann als Extremwert (oder Ecke) von T bezeichnet werden, wenn er

a) zu C gehört und

b) der Schnittpunkt von n begrenzenden Hyperebenen von C ist.

Beispiel 1. Bestimmen Sie die Extremwerte der polyedrischen, konvexen Punktmenge $Ax \leqq b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eine Skizze der drei Halbräume (siehe Abb. 3) zeigt, daß die Punktmenge durch ein Dreieck dargestellt wird.

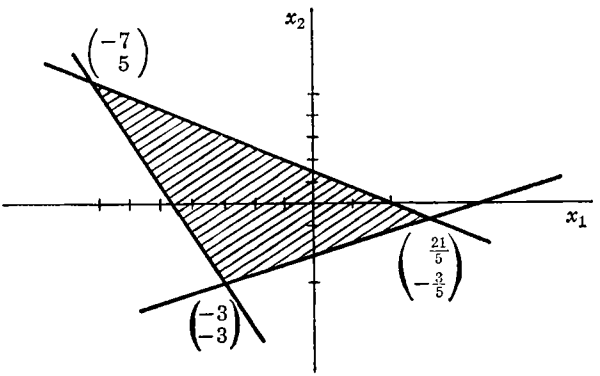


Abb. 3

Wir können daher die Extremwerte dadurch bestimmen, daß wir die Ungleichungen in Gleichungen verwandeln und drei Paare simultaner Gleichungen lösen. Auf diese Weise erhalten wir die Punkte

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

die die Extremwerte der Punktmenge darstellen.

Nun können wir für die verschiedenen Punkte der polyedrischen, konvexen Punktmenge Interpretationen mit Hilfe eines Systems von Ungleichungen

geben. Ein Extremwert liegt stets auf zwei Grenzen, d. h. zwei der Ungleichungen sind in Wirklichkeit Gleichungen. Ein Punkt der begrenzenden Geraden, der nicht Extremwert ist, liegt auf einer der Grenzen, d. h. für ihn ist eine der Ungleichungen eine Gleichung. Ein Punkt, der innerhalb des Polygons liegt, wird durch echte Ungleichungen bestimmt, d. h. es steht nicht nur $\leqq$, sondern $<$.

Es gibt eine mechanische (doch sehr langwierige) Methode für die Bestimmung aller Extremwerte einer konvexen Punktmenge C, die durch $Ax \leqq b$ definiert wird. Betrachten Sie die begrenzenden Hyperebenen $A_1x = b_1$, ..., $A_mx = b_m$ der Halbräume, die C bestimmen. Wählen Sie dann eine Unterklasse von n dieser Hyperebenen aus und lösen Sie deren Gleichungen gleichzeitig. Ergibt sich als Resultat ein eindeutig festgelegter Punkt x^0 (und dies gilt nur dann), so überprüfen Sie, ob x^0 zu C gehört oder nicht. Ist dies der Fall, so ist x^0 gemäß der obigen Definition ein Extremwert von C. Alle weiteren Extremwerte von C können nun auf die gleiche Weise bestimmt werden.

Beispiel 2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die durch $Ax \leqq b$ definierte, polyedrische, konvexe Punktmengz C ist dann der in Abb. 4 schraffierte erste Quadrant, der x_1, x_2 Ebene. Der einzige vorhandene Extremwert ist der Ursprung als Schnittpunkt der Geraden $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Dies ist ein Beispiel für eine *unbegrenzte* polyedrische, konvexe Punktmenge.

Bitte beachten Sie, daß die Punktmenge C den im Ursprung beginnenden Strahl, der den Winkel zwischen den Achsen halbiert, einschließt. Dieser Strahl wurde in Abb. 4 unterbrochen gezeichnet. Daneben enthält die Punktmenge natürlich noch viele andere Strahlen.

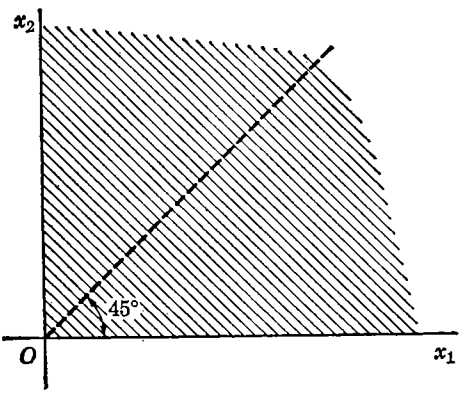


Abb. 4

Wir wollen eine polyedrische, konvexe Punktmenge dann als *begrenzt* bezeichnen, wenn sie keinen solcher Strahlen enthält. Punktmengen, die, wie die in Abb. 4 gezeigte Strahlen enthalten, sollen als *unbegrenzte* Punktmengen bezeichnet werden. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir uns in diesem Kapitel größtenteils auf die Diskussion von begrenzten, konvexen Punktmengen beschränken. D. h. insbesondere, daß $m > n$ oder mit anderen Worten, die konvexe Punktmenge muß die Intersektion von wenigstens $n + 1$ Halbräumen sein. Das ist eine notwendige, jedoch nicht ausreichende Bedingung dafür, daß die konvexe Punktmenge begrenzt ist (siehe Übung 23).

Beispiel 3. Wir wollen annehmen, daß innerhalb eines bestimmten Problems x_1 und x_2 von uns zu kontrollierende Größen seien, die lediglich bestimmten, durch Ungleichungen dargestellten Begrenzungen unterliegen. Wir wollen ferner annehmen, daß die Wahl von x_1 und x_2 durch das in Beispiel 1 angegebene System von Ungleichungen beschränkt wird. Weiterhin wollen wir voraussetzen, daß eine gegebene Wahl von x_1 und x_2 sich in einem Gewinn von $x_1 + 2x_2$ DM niederschlägt. Wie groß ist der maximale und der minimale Gewinn, den wir erreichen können? Wir müssen also den Maximal- und den Minimalwert für $x_1 + 2x_2$ für die Punkte (x_1, x_2) innerhalb des Dreiecks bestimmen. Wir wollen zunächst die Extremwerte diesbezüglich überprüfen. Bei $(-3, -3)$ hätten wir einen Gewinn von -9, d. h. einen Verlust von 9 DM. Bei $(-7, 5)$ hätten wir einen Gewinn von 3 DM und bei $(21/5, -3/5)$ ebenfalls einen Gewinn von 3 DM. Was können wir nun über den Rest des Dreiecks aussagen? Die letzte Ungleichung sagt uns, daß $x_1 + 2x_2 \leqq 3$; d. h. unser Gewinn kann 3 DM nicht übersteigen. Multiplizieren wir die erste Ungleichung mit 5/7 und die zweite mit 3/7 und addieren sie, so ergibt sich $x_1 + 2x_2 \geqq -9$, d. h. wir können keinen größeren Verlust als 9 DM haben. Damit haben wir gezeigt, daß sowohl der größte Gewinn als auch der größte Verlust an einem Extremwert auftritt. Wir wollen nun zeigen, daß dies ganz allgemein gilt.

Gegeben sei eine polyedrische, konvexe Punktmenge C und eine lineare Funktion

$$cx = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

mit $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Wir wollen nun zeigen, daß ganz allgemein das Maximum und das Minimum cx immer an den Ecken von C zu finden ist. Wir wollen unseren Beweis für den Fall von $n = 2$ durchführen, die dabei erhaltenen Ergebnisse sind jedoch allgemein gültig.

Wir werden zunächst zeigen, daß die Werte der linearen Funktion $c_1x_1 + c_2x_2$ auf der Verbindungsgeraden *zwischen* den Werten liegen, die die Funktion an den zwei Endpunkten annimmt. Wir stellen die Punkte als Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dar und sehen dann, daß unsere lineare Funktion durch den Zeilenvektor (c_1, c_2) dargestellt wird. Die Endpunkte der Begrenzungsstrecken seien

$$p = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \text{ und } q = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix}.$$

In Kapitel V (siehe Abb. 4) sahen wir, daß die Punkte zwischen p und q durch $tp + (1 - t)q$ mit $0 \leqq t \leqq 1$ gegeben werden. Da die Funktion linear ist, wird ein Punkt zwischen P und Q, den Werten der Funktion an den Punkten p und q, den Wert $tP + (1 - t)Q$ haben. (Nehmen Sie an, daß $P \geqq Q$.) Diesen Wert können wir durch

$$tP + (1 - t)Q = Q + (P - Q)t$$

darstellen, war (für $0 \leqq p \leqq 1$) einem minimalen Wert von Q und einem maximalen Wert von P entspricht.

Wir sind nun in der Lage, das in Beispiel 3 illustrierte Ergebnis zu beweisen.

Theorem. Eine lineare Funktion cx, die im Bereich einer polyedrischen, konvexen Punktmenge C definiert ist, erreicht ihr Maximum (und Minimum) an den Extremwerten von C.

Der Beweis dieses Theorems ist in Abb. 5 dargestellt. Wir wollen annehmen, daß die Funktion an der Ecke p einen Wert P annimmt, der größer oder gleich dem Wert aller anderen Ecken ist und daß die Funktion an der Ecke q den kleinstmöglichen Wert Q annimmt. Es sei r irgendein Punkt des Polygons. Ziehen Sie nun eine gerade Linie zwischen p und r und führen Sie diese so lange weiter, bis sie das Polygon wiederum am Punkt u schneidet. Dieser

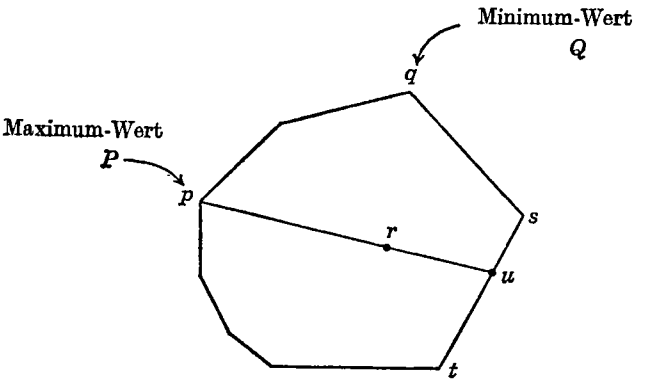


Abb. 5

Punkt u liege zwischen den Eckpunkten s und t. (Das Ergebnis ändert sich jedoch nicht, wenn die Verlängerung das Polygon in einem Eckpunkt schneidet.) Gemäß unserer Voraussetzung muß der Wert der Funktion an einem der Eckpunkte zwischen Q und P liegen. Gemäß dem oben erhaltenen Ergebnis muß der Wert der Funktion bei q zwischen den Werten bei s und t und damit zwischen Q und P liegen.

Gemäß dem obigen Ergebnis muß der Wert der Funktion bei r wiederum zwischen ihren Werten bei p und u und damit wiederum zwischen Q und P

liegen. Da r ein beliebiger Punkt des Polygons war, haben wir damit unser Theorem bewiesen.

Nehmen Sie nun an, wir hätten statt der linearen Funktion $c_1x_1 + c_2x_2$ die Funktion $c_1x_1 + c_2x_2 + k$ betrachtet. Die Addition der Konstanten k ändert lediglich jeden Wert der Funktion einschließlich des Maximums und des Minimums um eben diesen Betrag. Die Analyse der Funktion daraufhin, wo sich ihr Maximal- und ihr Minimalwert befindet, bleibt davon also unberührt. Wir kommen dadurch zu dem folgenden Theorem:

Theorem. Die Funktion $cx + k$, die im Bereich einer polyedrischen, konvexen Punktmenge C definiert ist, hat ihren Maximal- (und Minimal-) Wert an einer Ecke von C.

Das Maximum oder das Minimum der Funktion $cx + k$, die im Bereich einer konvexen Punktmenge C definiert ist, können wir dann nach der folgenden Methode bestimmen: Bestimmen Sie zunächst die Ecken der Punktmenge. Ihre Zahl wird begrenzt sein. Setzen Sie die Koordinaten jeder dieser Ecken in die Funktion ein. Der größte der auf diese Weise erhaltenen Werte ist dann das Maximum der Funktion und der kleinste der so erhaltenen Werte das Minimum. Diese Methode wurde in Beispiel 3 bereits illustriert.

In Abschnitt 4 werden wir die sog. *Simplexmethode* beschreiben, die eine wesentlich schnellere Methode zur Lösung des obigen Problems darstellt.

ÜBUNGEN

1. Bei den folgenden Sätzen von Ungleichungen ist jeweils mindestens eine überflüssig. Bestimmen Sie in jedem der Fälle die überflüssige Gleichung.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqq 3 \\ -x_1 - x_2 &\geqq 0 \\ x_1 &\geqq -1 \\ -x_2 &\leqq 2. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqq 0 \\ x_1 - x_2 &\leqq 0 \\ x_1 &\leqq 4 \\ x_2 &\geqq -4. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} -1 &\leqq x_1 \leqq 1 \\ -2 &\leqq x_2 \leqq 2 \\ x_1 + x_2 &\geqq -10 \\ 2x_1 - x_2 &\leqq 2. \end{aligned}$$

[Lös.: (a) $x_1 + x_2 \leqq 3$.]

2. a) Stellen Sie den durch die folgenden Ungleichungen definierten konvexen Raum graphisch dar:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 9 &\leqq 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 6 &\leqq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3 &\leqq 0. \end{aligned}$$

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Figur und Abb. 3?

3. Bestimmen Sie die Eckpunkte des in den Teilen a), b) und e) der Übung 1, Abschnitt 1, gegebenen Polygons.

[Lös.: (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.]

4. a) Zeigen Sie, daß die drei durch die folgenden Gleichungen gegebenen Geraden die Ebene in 7 konvexe Abschnitte aufteilen. Bezeichnen Sie diese Abschnitte mit den römischen Ziffern I—VII.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 9 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

   b) Nennen Sie für jeden der sieben Abschnitte einen Satz dreier Ungleichungen, deren geometrischer Ort der jeweilige Abschnitt ist. [Hinweis: Zwei dieser Sätze von Ungleichungen werden in Übung 2 betrachtet.]

   c) Es gibt noch einen anderen Weg, die Gleichheitszeichen in den drei in a) gegebenen Gleichungen durch Ungleichheitszeichen zu ersetzen. Welchen geometrischen Ort hat dieser zweite Satz von Ungleichungen?

[Lös.: Die leere Klasse ϵ.]

5. Die Eckpunkte eines konvexen Polygons seien (—1, 0), (3, 4), (0, —3) und (1, 6). Bestimmen Sie den Satz von Ungleichungen, der dieses konvexe Polygon bestimmt.

6. Bestimmen Sie die Eckpunkte des durch folgende Ungleichungen gegebenen Polygons.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 9 &\geqq 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 6 &\geqq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3 &\leqq 0 \\ x_1 + x_2 &\leqq 0. \end{aligned}$$

[Hinweis: Benutzen Sie dazu einen Teil des Ergebnisses von Beispiel 1.]

7. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion G, die im Bereich des in Übung 6 gegebenen Polygons durch folgende Gleichung definiert ist:

$$G(x) = 7x_1 + 5x_2 - 3.$$

8. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$G(x) = -2x_1 + 5x_2 + 17$$

innerhalb jedes, der in den Teilen a), b) und e) der Übung 1, Abschnitt 1, gegebenen, konvexen Polygonen. [Lös.: a) 33, 1; e) 36, —2.]

9. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$G(x) = 5x_1 + 3x_2 - 6$$

innerhalb jeder, in den Teilen a) und j) der Übung 1, Abschnitt 1 gegebenen polyedrischen, konvexen Punktmenge.

[Lös.: h) es existiert weder ein Maximum noch ein Minimum; j) Minimum = 3.]

10. Der Besitzer eines Kesselwagens mit einer Kapazität von 500 Gallonen transportiert Benzin und Ölprodukte von einer Stadt zur anderen. Bei jeder Fahrt möchte er seinen Wagen wenigstens mit 200 Gallonen normalem Benzin, wenigstens 100 Gallonen Superbenzin und höchstens 150 Gallonen Brennöl beladen. Bestimmen Sie die konvexe Punktmenge aller Möglichkeiten, in der er seinen Wagen beladen kann, unter der Voraussetzung, daß er immer seine volle Kapazität ausnutzt. Interpretieren Sie die Extremwerte dieser Punktmenge. [Hinweis: Es gibt vier Extremwerte.]

11. Ein Werbefachmann möchte eine halbstündige Fernsehsendung zusammenstellen. Er besteht darauf, daß mindestens drei Minuten dieser halben Stunde kommerzielle Sendungen enthalten, während die Sendeleitung die Zeit für kommerzielle Sen-

dungen auf höchstens 15 Minuten begrenzt. Der innerhalb der Sendung auftretende Komiker weigert sich, mehr als 22 Minuten innerhalb einer halben Stunde zu arbeiten. Während der Zeit, während der weder kommerzielle Sendungen noch Darbietungen des Komikers gesendet werden, sorgt eine Kapelle für Unterhaltung. Stellen Sie die konvexe Punktmenge C der möglichen Kombinationen humoristischer, kommerzieller und musikalischer Darbietungen auf, die innerhalb der 30 Minuten stattfinden können. Bestimmen Sie die Extremwerte von C.
[Lös.: Wenn x_1 die Zeit des Komikers, x_2 die Zeit der kommerziellen Sendungen und $30 - x_1 - x_2$ die Darbietungszeit der Kapelle sind, so sind die Extremwerte $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}22\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}22\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}15\\15\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\15\end{pmatrix}$.]

12. Nehmen Sie in Übung 10 an, daß der Kesselwagenfahrer für den Transport einer Gallone normalen Benzins 3 Pf, einer Gallone Superbenzin 2 Pf und einer Gallone Heizöl 1 Pf erhalte. Nennen Sie eine allgemeine Form für die Gesamtbeträge, die er bei allen möglichen Transportkombinationen erhält. Was sollte der Fahrer laden, um einen maximalen Verdienst zu erreichen?
[Lös.: Er sollte 400 Gallonen Normalbenzin, 100 Gallonen Superbenzin und kein Heizöl laden.]

13. Wieviel muß er mindestens für den Transport von Heizöl bekommen, wenn er davon, bei Maximierung seines Gewinnes, seiner Ladung einen Teil beifügt, wenn er wie in Übung 12 3 Pf pro transportierter Gallone Normalbenzin und 2 Pf pro transportierter Gallone Superbenzin erhält?
[Lös.: Er muß mindestens 3 Pf pro Gallone Heizöl erhalten.]

14. Nehmen Sie in Übung 11 an, x_1 sei die Anzahl der Minuten des Auftritts des Komikers und x_2 sei die Anzahl der Minuten kommerzieller Sendungen innerhalb des Programmes. Der Komiker koste pro Minute 200 DM, und die kommerziellen Sendungen kosteten pro Minute 50 DM. Für die Kapelle entstehen keine Aufwendungen. Wie sollte das Programm zusammengesetzt sein, um die Kosten zu minimieren?

15. Betrachten Sie die polyedrische, konvexe, durch die folgenden Ungleichungen definierte, Punktmenge P

$$-1 \leqq x_1 \leqq 4$$
$$0 \leqq x_2 \leqq 6.$$

Bestimmen Sie vier verschiedene Systeme von Bedingungen für die Konstanten a und b der Funktion $F(x) = ax_1 + bx_2$ in der Weise, daß die Funktion an einem und nur an einem der vier Eckpunkte von P ihr Maximum hat. Bestimmen Sie die Bedingungen so, daß F an jeder dieser Ecken ein Minimum hat.

[Lös.: Das Maximum ist z. B. $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$, wenn $a > 0$ und $b > 0$ ist.]

16. Es sei H die innerhalb der konvexen Punktmenge C definierte, quadratische Funktion $H(x) = (x_1 - 1/4)^2 + (x_2 - 1/4)^2$. C sei die Wahrheitsklasse der folgenden Ungleichungen

$$x_1 + x_2 \leqq 1, \quad x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0.$$

Befinden sich die Maximum- und Minimumwerte von H an den Ecken von C? Nennen Sie die Gründe dafür, daß dieses Problem wesentlich schwieriger zu lösen ist als die Bestimmung der Extremwerte einer linearen Funktion innerhalb einer polyedrischen, konvexen Punktmenge.

17. Eine Punktmenge wird dann als konvex bezeichnet, wenn sie immer dann, wenn sie zwei Punkte enthält, auch deren Verbindungslinie einschließt. Zeigen Sie, daß
    a) wenn zwei Punkte der Wahrheitsklasse einer Ungleichung angehören, dann auch jeder Punkt der Verbindungslinie zu dieser Wahrheitsklasse gehört.
    b) jede polyedrische, konvexe Punktmenge eine konvexe Punktmenge in dem oben angeführten Sinne ist.

18. Geben Sie ein Beispiel für ein Vieleck, das keine konvexe Punktmenge ist.

19. Beweisen Sie, daß für die drei Vektoren u, v und w die Punktmenge aller Punkte $au + bv + cw$ ($a \geqq 0, b \geqq 0, c \geqq 0, a + b + c = 1$) eine konvexe Punktmenge ist. Welche geometrische Figur ist der geometrische Ort?
    [Lös.: Im allgemeinen ist der geometrische Ort ein Dreieck.]

20. C sei eine beliebige, ebene, polyedrische, konvexe Punktmenge. Zeigen Sie, daß dann, wenn x auf einer der Grenzen von C liegt, eine der C definierenden Ungleichungen überbestimmt ist.

21. x und y seien zwei bestimmte Punkte einer polyedrischen, konvexen Punktmenge C. p sei $0 < t < 1$ und $z = tx + (1 - t)y$. Zeigen Sie, daß z kein Extremwert von C ist.

22. Beweisen Sie, daß die Intersektion zweier Halbebenen nur dann eine begrenzte konvexe Punktmenge ist, wenn diese leer ist.

23. Nennen Sie Beispiele, die zeigen, daß die Intersektionen dreier Halbebenen begrenzte konvexe Punktmengen sein können, aber nicht sein müssen.

3. Probleme linearer Programmierung

Eine wichtige Klasse von praktischen Problemen ist die, bei der die Bestimmung des Maximums oder des Minimums einer linearen, im Bereich einer polyedrischen, konvexen Punktmenge C definierten Funktion $cx + k$ notwendig ist. Wir wollen diese Art von Problemen mit Hilfe der folgenden Beispiele illustrieren. Im nächsten Abschnitt werden wir dann die Simplexmethode beschreiben, die zur Lösung dieser Beispiele verwandt wird.

Beispiel 1. Ein Automobilfabrikant stelle in seinen zwei Werken Personen- und Lastwagen her. In Werk 1, in dem die grundlegenden Montagearbeiten durchgeführt werden, werden Fünf-Mann-Tage pro Lastwagen und Zwei-Mann-Tage pro Personenwagen benötigt. Im Werk 2, in dem die Endmontage durchgeführt wird, seien pro Personenwagen und pro Lastwagen je Drei-Mann-Tage nötig. Die Kapazität des Werkes 1 betrage 180-Mann-Tage pro Woche und die des Werkes 2 125-Mann-Tage pro Woche. Wie viele Personen- und Lastwagen sollte der Fabrikant herstellen, um seinen Gewinn zu maximieren, wenn er an einem Lastwagen 300 DM verdient und an einem Personenwagen 200 DM?
Um das Problem in mathematische Form zu kleiden, wollen wir folgende Abkürzungen benutzen: x_1 sei die Anzahl der wöchentlich hergestellten Lastwagen und x_2 die Anzahl der im gleichen Zeitraum fabrizierten Personenwagen. Diese Größen müssen dann den folgenden Bedingungen genügen:

$$5x_1 + 2x_2 \leqq 180$$
$$3x_1 + 3x_2 \leqq 135.$$

Wir wollen nun die lineare Funktion $300\,x_1 + 200\,x_2$ unter den obigen Bedingungen maximieren, wobei $x_1 \geqq 0$ und $x_2 \geqq 0$ sein soll.
Zur weiteren Vereinfachung können wir die folgenden Größen definieren:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 180 \\ 135 \end{pmatrix} \text{ und } c = (300, 200).$$

Wir können dann dieses lineare Programmierungsproblem wie folgt formulieren:

Maximierungsproblem: Bestimmen Sie den Vektor x so, daß bei gegebenem cx und unter der Begrenzung von $Ax \leqq b$ und $x \geqq 0$ der wöchentliche Gewinn ein Maximum wird. Die durch die Ungleichungen ausgedrückten Begrenzungen stellen sicher, daß die vorhandene Kapazität nicht überschritten wird und daß keine negativen Automobilzahlen produziert werden.
In Abb. 6 wird nun die konvexe Punktmenge der möglichen x Vektoren dargestellt. Offensichtlich haben wir es hier mit einem Problem der Art zu tun, wie wir sie im vorangehenden Abschnitt besprachen.
Die Extremwerte der konvexen Punktmenge C sind

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Wir gehen nun nach der im vorigen Abschnitt beschriebenen Lösungsmethode vor und setzen in die Funktion $xc = 300\,x_1 + 200\,x_2$ die Koordinaten für jeden dieser Punkte ein. Die Werte der Funktion an diesen Punkten sind 0, 10, 800, 9000 und 12000. Der maximale wöchentliche Gewinn wäre also 12000 DM, und er würde durch die Herstellung von 30 Lastwagen und 15 Personenwagen pro Woche erreicht.

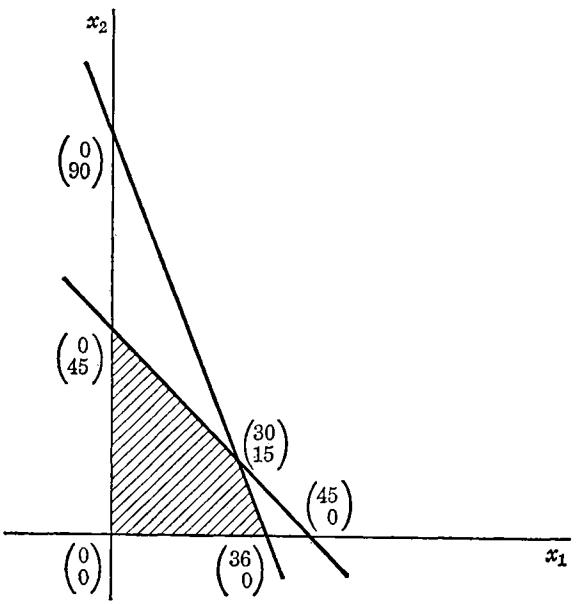


Abb. 6

Beispiel 2. Eine Bergwerksgesellschaft besitze zwei verschiedene Gruben, in denen bestimmte Erzarten gefördert werden. Die Gruben befinden sich an verschiedenen Landesteilen und verfügen über unterschiedliche Kapazitäten. Nach dem Brechen werden beim Erz drei verschiedene Klassen unterschieden: grobkörniges, mittelkörniges und feinkörniges Erz. Nach jeder Erzart bestehe eine gewisse Nachfrage. Die Bergwerksgesellschaft konzentriere sich darauf, einem Hüttenwerk wöchentlich 12 Tonnen grobkörniges, 8 Tonnen mittelkörniges und 24 Tonnen feinkörniges Erz zu liefern. Die Betriebskosten für die Gruben seien 200 DM pro Tag bei Grube 1 und 160 DM pro Tag bei Grube 2. In der Grube 1 werden dabei pro Tag 6 Tonnen grobkörniges, 2 Tonnen mittelkörniges und 4 Tonnen feinkörniges Erz gefördert, während die zweite Mine eine tägliche Leistung von 2 Tonnen grobkörnigem, 2 Tonnen mittelkörnigem und 12 Tonnen feinkörnigem Erz habe. Wie viele Tage sollte jede der Gruben pro Woche befahren werden, um die Aufträge der Firma auf wirtschaftliche Weise zu erfüllen?

Wir wollen, ehe wir an die Lösung des Problemes gehen, die oben gegebene Information in der in Abb. 7 gezeigten Tabelle zusammenfassen. Die Zahlen dieser Tabelle bilden dabei eine $2 \cdot 3$ Matrix, die Anforderungen einen Zeilenvektor c und die Kosten einen Spaltenvektor b. Die Komponenten der Matrix zeigen die Produktion jeder Grube, ausgegliedert in die drei Erzarten, die Komponenten des Vektors c geben die angeforderten Mengen an, und die Komponenten des Vektors b stellen die täglichen Betriebskosten der beiden Gruben dar.

	Grobkörniges Erz	Mittelkörniges Erz	Feinkörniges Erz	
Grube 1	6	2	4	200 DM
Grube 2	2	2	12	160 DM
	12	8	24	

b (rechts) — c (unten)

Abb. 7

Es sei nun $w = (w_1, w_2)$, der zweikomponentige Zeilenvektor, dessen Komponente w_1 die Anzahl der Tage angebe, an denen in Grube 1 pro Woche gefördert wird und dessen Komponente w_2 die Anzahl der Tage angibt, an denen in Grube 2 gefördert wird. Definieren wir die Größen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 12 \end{pmatrix}, \quad c = (12, 8, 24) \text{ und } b = \begin{pmatrix} 200 \\ 160 \end{pmatrix},$$

so können wir das obige Problem als Minimierungsproblem darstellen.

Minimierungsproblem: Errechnen Sie den Wert des Vektors w, bei dem die wöchentlichen Betriebskosten bei der Fördermenge wb und unter den Bedingungen $wA \geqq c$ und $w \geqq 0$ ein Minimum werden. Die durch die Ungleichungen gegebenen Beschränkungen stellen sicher, daß die wöchentlichen Förderanforderungen erfüllt werden und daß die Beschränkungen der Komponenten von w nicht überschritten werden.

Offensichtlich gleicht dieses Minimierungsproblem dem im einzelnen im vorigen Kapitel diskutierten. Wir zeigen dazu in Abb. 8 die polyedrische, konvexe Punktmenge C, die durch die Ungleichungen $wA \geqq c$ definiert ist.

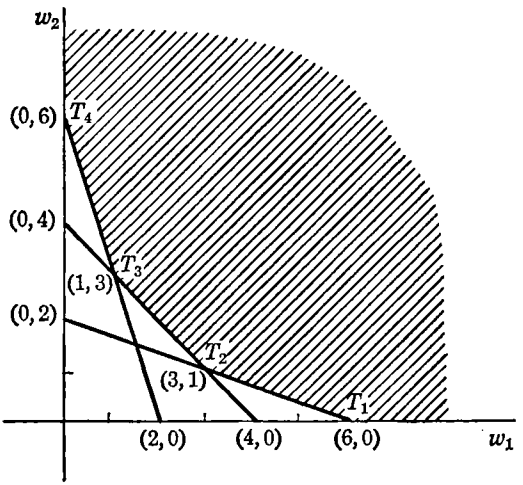


Abb. 8

Die Extremwerte der konvexen Punktmenge C sind

$$T_1 = (6, 0),\ T_2 = (3, 1),\ T_3 = (1, 3),\ T_4 = (0, 6).$$

Setzen wir diese Werte in die Funktion $wb = 200\, w_1 + 160\, w_2$ ein, so sehen wir, daß sie an diesen Punkten die Werte 1200, 760, 680 und 960 annimmt. Die minimalen Betriebskosten pro Woche betragen also 680 DM und werden bei T_3 erreicht, d. h. indem man die erste Mine einen Tag pro Woche fördern läßt und die zweite drei Tage in der Woche.

Bitte beachten Sie, daß die wöchentliche Förderung der Gruben, wenn man sie in der angegebenen Form betreibt, genau 12 Tonnen grobkörniges Erz, 8 Tonnen mittelkörniges und 40 Tonnen feinkörniges Erz beträgt. Mit anderen Worten, bei dieser Produktionskombination erhalten wir zuviel feinkörniges Erz. Besteht dafür keine zusätzliche Nachfrage, so muß die Gesellschaft diese 16 Tonnen pro Woche bei einer Lösung mit minimalen Produktionskosten auf einer Halde lagern. Wir wollen diesen Punkt genauer in Abschnitt 5 untersuchen.

Beispiel 3. Wir wollen als Variante zu Beispiel 2 annehmen, der Kostenvektor sei $b = \begin{pmatrix}160\\200\end{pmatrix}$, d. h. daß nun in der ersten Grube mit niedrigeren Kosten gefördert werden könne als in der zweiten. Gehen wir nach der gleichen Methode vor, so finden wir, daß die minimalen Produktionskosten wiederum 680 DM betragen und daß sie dadurch erreicht werden, daß man in der ersten Grube drei Tage pro Woche fördert und in der zweiten einen Tag pro Woche. Bei dieser Lösung werden anstatt 12 Tonnen grobkörnigen Erzes 20 Tonnen gefördert, während die Anforderungen an mittelkörnigem und feinkörnigem Erz genau erfüllt werden. Hier müssen also 8 Tonnen grobkörnigen Erzes auf die Halde gefahren werden.

Beispiel 4. Eine andere Variante des Beispiels 2 ist, anzunehmen, daß der Kostenvektor durch $b = \begin{pmatrix}200\\200\end{pmatrix}$ gegeben sei. Hier sind also die Förderkonten beider Gruben gleich. Untersuchen wir in diesem Fall die Kostenfunktion wb an den Eckpunkten der

konvexen Punktmenge, so sehen wir, daß an den beiden Eckpunkten T_1 und T_4 die Kosten 1200 DM und an den beiden anderen Eckpunkten T_2 und T_3 die Kosten 800 DM betragen. Wir erreichen also die Lösung mit den minimalen Kosten, indem wir in einer der beiden Gruben an drei Tagen und in der anderen an einem Tage pro Woche fördern. Hier bestehen jedoch auch noch andere Lösungen, da dann, wenn zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte der konvexen Punktmenge Minimallösungen darstellen, auch jeder Punkt zwischen den beiden Eckpunkten eine Minimallösung darstellt. Mit anderen Worten, jeder Vektor w, bei dem $1 \leqq w_1 \leqq 3$ und $1 \geqq w_2 \leqq 3$ sowie $w_1 + w_2 = 4$ ist, bildet eine Lösung minimaler Produktionskosten. So könnte z. B. in jeder der Minen an zwei Tagen gefördert werden.
Es kann ferner gezeigt werden (siehe Übung 2), daß bei jeder Lösung für w, bei der $1 < w_3 < 3$, $1 < w_2 < 3$ und $w_3 + w_2 = 4$ ist, sowohl zuviel grobkörniges Erz als auch zuviel feinkörniges produziert wird.

ÜBUNGEN

1. Nehmen Sie in Beispiel 1 an, daß die zu erreichenden Gewinne pro Lastwagen 200 DM und pro Personenwagen 300 DM seien. Wie sollte nun das Produktionsprogramm der Fabrik aussehen, um einen maximalen Gewinn zu erreichen?

2. Zeigen Sie, daß in Beispiel 4 für Lösungsvektoren b mit $1 < w_1 < 3$, $1 < w_2 < 3$ und $w_1 + w_2 = 4$ sowohl zuviel grobkörniges als auch feinkörniges Erz produziert wird.

3. Ein in Amerika sehr bekannter Kinderreim heißt „Hans Sprat konnte kein Fett essen und seine Frau (nennen wir sie Grete) kein mageres Fleisch . . .". Nehmen Sie nun an, Hans möchte pro Tag mindestens ein Pfund mageres Fleisch haben, während Grete pro Tag mindestens 0,4 Pfund Fett braucht. Nehmen Sie an, diese beiden kaufen lediglich Rindfleisch mit 10% fettem und 90% magerem Fleisch und Schweinefleisch mit 40% fettem und 60% magerem Fleisch. Hans und Grete wollen nun ihre Nahrungsbedürfnisse zu den niedrigstmöglichen Kosten decken.
   a) Es sei x die Menge Rindfleisch und y die Menge Schweinefleisch, das die beiden pro Tag kaufen. Zeichnen Sie die konvexe Punktmenge, die die Käufe darstellt, welche die minimalen Nahrungsbedürfnisse der beiden Personen erfüllen.
   b) Schlagen Sie Beschränkungen für die Einkäufe vor, die die Punktmenge in ein konvexes Polygon verwandeln.
   c) Zeigen Sie, daß die Einkäufe bei minimalen Kosten lediglich aus Schweinefleisch bestehen, wenn Rindfleisch 1 DM pro Einheit und Schweinefleisch 50 Pfg pro Einheit kostet. Bestimmen Sie die minimalen Kosten. [Lös.: 0,83 DM.]
   d) Bestimmen Sie die minimalen Kosten und zeigen Sie, daß eine ganze Lösungsstrecke für den Fall besteht, daß Rindfleisch 75 Pfg pro Einheit und Schweinefleisch 50 Pfg pro Einheit kostet. [Lös.: 0,83 DM.]
   e) Zeigen Sie, daß die eindeutige Lösung bei minimalen Kosten sowohl Schweine- als auch Rindfleisch enthält, wenn sowohl beim Rindfleisch als auch beim Schweinefleisch eine Einheit 1 DM kostet. Bestimmen Sie die minimalen Kosten. [Lös.: 1,40 DM.]
   f) Zeigen Sie, daß die in Teil b) gemachten Einschränkungen die in c) und e) gegebenen Antworten nicht beeinflussen.

4. Zeigen Sie in Übung 3d), daß Hans jeweils genau seine Minimalforderungen fetten Fleisches erfüllt bekommt, währenddessen Grete bei allen außer einer Lösung mehr Fett als erforderlich erhält. Zeigen Sie ferner, daß alle außer einer Lösung etwas Rindfleisch enthalten.

5. Zeigen Sie, daß in Übung 3d) sowohl Hans als auch Grete genau ihre Anforderungen erfüllt bekommen.
6. In Übung 3 sei der Preis des Schweinefleisches bei 1 DM pro Einheit festgesetzt. Wie weit muß der Rindfleischpreis fallen, ehe Hans und Grete nur Rindfleisch essen? [Lös.: 0,25 DM.]
7. Nehmen Sie in Übung 3 an, daß Hans sich dazu entscheide, seine Anforderungen auf 0,6 Pfund pro Tag zu reduzieren. Wie wird dadurch die konvexe Punktmenge verändert? Wie werden die Lösungen in 3c), d) und e) beeinflußt?
8. Ein Geflügelfarmer ziehe Hühner, Enten und Truthähne auf und verfüge über Raum für 500 Vögel. Obwohl er insgesamt über 500 Vögel verfügt, wolle er nicht mehr als 300 Enten auf einmal auf seiner Farm haben. Nehmen Sie an, daß die Kosten für das Aufziehen eines Huhnes 1,50 DM, für das einer Ente 1 DM und für das eines Truthahnes 4 DM betragen. Nehmen Sie ferner an, der Farmer könne Hühner für 3 DM, Enten für 2 DM und Truthähne für T DM verkaufen. Er möchte nun wissen, welche Geflügelart er züchten soll, um seinen Gewinn zu maximieren.
   a) Es sei nun x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Enten, die er aufzieht. Die Anzahl der von ihm aufgezogenen Truthähne ist dann $500 - x - y$. Welche konvexe Punktmenge der möglichen Werte von x und y erfüllt die obigen Bedingungen?
   b) Bestimmen Sie in allgemeiner Form die Kosten für das Aufziehen von x Küken, y Enten und $(500 - x - y)$ Truthähnen. Bestimmen Sie, wiederum in allgemeiner Form, den Gesamtbetrag, den er für dieses Geflügel erhält. Errechnen Sie ferner den Gewinn, den er unter diesen Umständen machen würde.
   c) Zeigen Sie, daß der Farmer nur Truthähne aufziehen sollte, wenn er seinen Gewinn maximieren will und $T = 6$ DM ist. Wie hoch ist dann der maximale Gewinn? [Lös.: 1000 DM.]
   d) Zeigen Sie, daß er dann nur Hühner aufziehen sollte, wenn $T = 5$ DM ist, und bestimmen Sie seinen maximalen Gewinn. [Lös.: 750 DM.]
   e) Zeigen Sie, daß er dann jede Kombination von Küken und Truthähnen aufziehen kann, wenn $T = 5{,}50$ DM ist, und bestimmen Sie für diesen Fall den maximalen Gewinn. [Lös.: 750 DM.]
9. Lösen Sie noch einmal die Übung 8 unter der Voraussetzung, daß der Preis pro Einheit Küken auf 2 DM fällt und T a) 6 DM, b) 5 DM, c) 4,50 DM und d) 4 DM ist.
10. Zeigen Sie, daß der Farmer in Übung 8 nur Küken aufziehen sollte, wenn der Preis der Truthähne auf 5,50 DM fällt. Zeigen Sie weiterhin, daß er, wenn der Preis über 5,50 DM bleibt, nur Truthähne aufziehen sollte.
11. Nehmen Sie in Übung 10 des Abschnittes 2 an, daß der Lastwagenfahrer p Pf für den Transport einer Gallone Normalbenzin, q Pf für den Transport einer Gallone Superbenzin und r Pf für den Transport einer Gallone Heizöl bekomme. Zeigen Sie, daß er bei seinem Streben nach maximalem Gewinn nur dann Heizöl transportieren sollte, wenn $r \geqq p$ und $r \geqq q$.
12. Nehmen Sie in Übung 11, Abschnitt 2, an, daß für jede Minute, in der der Komiker im Programm auftritt, 70000 weitere Zuschauer den Apparat einstellen, für jede Minute, in der die Kapelle spielt weitere 10000 Personen den Apparat einstellen und für jede Minute der kommerziellen Sendungen eine weitere Person den Fernsehapparat einstellt. N sei nun die Funktion, die für jeden Punkt C die Anzahl der Personen angibt, die ihren Apparat einschalten. Wie sollten die Zeiten verteilt werden, um N ein Maximum werden zu lassen?
    [Lös.: Die Sendung sollte drei Minuten kommerzielle Sendungen, 22 Minuten Sendungen der Komikers und 5 Minuten Sendungen der Kapelle enthalten.]

13. Nehmen Sie in Übung 11, Abschnitt 2, an, daß sowohl die Kapelle als auch der Komiker pro Minute 200 DM kosten und die kommerziellen Sendungen pro Minute 50 DM. Nennen Sie die Funktion der Kosten des Programms. Zeigen Sie, daß eine Lösungsstrecke für die Lösungen minimaler Kosten besteht.
[Lös.: Das Programm besteht aus 15 Minuten kommerzieller Sendungen, während die verbleibenden 15 Minuten in beliebiger Weise zwischen Komiker und Kapelle aufgeteilt werden können.]

4. Die Lösung von Problemen der linearen Programmierung mit Hilfe der Simplexmethode

In Kapitel V entwickelten wir einen Algorithmus zur Errechnung der Lösungen simultaner Gleichungen mit mehreren Unbekannten der Form

(1) $$Ax = b.$$

Der Leser wird sich daran erinnern, daß wir, wenn die Lösung eindeutig war, mittels Zeilentransformation

(2) $$(A \mid b) \text{ in } (E \mid x)$$

überführten.

Wir wissen nun, daß das geometrische Äquivalent dieses Vorgehens die Ermittlung der Intersektion von n Hyperebenen im n-dimensionalen Raum ist. Glücklicherweise ermöglicht es uns der Algorithmus (2), eine Lösung zu finden, ohne das Problem graphisch darstellen zu müssen.

Wir lösten in Abschnitt 3 einfache Probleme linearer Programmierung mit zwei Variablen, indem wir die konvexen Punktmengen in einer Ebene darstellten. Wollten wir Probleme mit mehr als zwei Variablen auf die gleiche Weise lösen, so müßten wir konvexe Punktmengen in mehr als zwei Dimensionen darstellen, was außerordentlich schwierig ist. Glücklicherweise existiert ein Algorithmus, der sogenannte *Simplexalgorithmus*, der es uns erlaubt, umfangreiche lineare Programmierungsprobleme ohne eine solche graphische Darstellung zu lösen, und zwar im wesentlichen auf die gleiche Weise, wie (2) die Lösung von (1) ohne graphische Darstellung ermöglicht.
Obwohl die Simplexmethode auf alle Probleme der linearen Programmierung angewendet werden kann, wollen wir zwei Voraussetzungen machen, die uns die Beschreibung der Methode erleichtern:

I. *Die Voraussetzung des positiven Wertes.* Wir wollen annehmen, daß immer $b \geqq 0$, d. h. daß keine Komponente von b negativ ist.

II. *Die Annahme, es handle sich um kein entartetes System.* Ist r die Anzahl der linear-unabhängigen Zeilen von A, so kann man c nicht als eine lineare Kombination von weniger als r Zeilen von A darstellen, und es

ist nicht möglich, b als eine lineare Kombination von weniger als r Spalten von A zu schreiben.

Schlössen wir die „Entartung" nicht aus, so müßten wir besondere Vorsichtsmaßnahmen treffen, wenn die Simplexmethode immer zum Ziel führen soll. In Wirklichkeit (siehe Übung 2) führt die Simplexmethode selbst dann fast immer zum Erfolg, wenn es sich um entartete Probleme handelt. Man kann insofern beide Voraussetzungen fallen lassen, und wir verweisen den interessierten Leser auf die am Ende des Kapitels empfohlene Lektüre, innerhalb derer darauf eingegangen wird, welche Vorsichtsmaßnahmen dann zu treffen sind.

Bitte rufen Sie sich zunächst ins Gedächtnis zurück, daß jedes Problem linearer Programmierung in einer der zwei folgenden Formen dargestellt werden kann:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Max } cx \\ \text{Unter der Bedingung} \\ Ax \leqq b \\ x \geqq 0 \end{array}\right\} \text{ als MAXIMIERUNGSproblem} \tag{3}$$

oder

$$\left.\begin{array}{r} \text{Min } wb \\ \text{Unter der Bedingung} \\ wA \geqq c \\ w \geqq 0 \end{array}\right\} \text{ als MINIMIERUNGSproblem} \tag{4}$$

Sind die Komponenten von A, b und c die gleichen, so nennt man die Probleme (3) und (4) zueinander *duale, lineare Programmierungsprobleme.* Jedes der Probleme linearer Programmierung hat ein duales, das in der oben angegebenen Weise dargestellt werden kann. Häufig hat das duale eines gegebenen Problemes wichtige wirtschaftswissenschaftliche Bedeutungen, und es ist fast immer von mathematischer Wichtigkeit. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die Diskussion im nächsten Abschnitt.

Bei der Behandlung eines Maximierungsproblems geht man wie folgt vor: Die zu bestimmenden Variablen seien $x_1, \ldots, x_n$, die als Spaltenvektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

angeordnet werden.

Wir schreiben dann die durch Ungleichungen gegebenen Beschränkungen als $Ax \leqq b$, wobei A eine $m \times n$ Matrix und b ein m-komponentiger Spaltenvektor ist. Wir schreiben nun die Funktion, die zu maximieren ist, als cx, wobei c einen n-komponentigen Spaltenvektor darstellt.

Bei der Lösung eines Minimierungsproblemes geht man wie folgt vor: Die zu bestimmenden Variablen seien $w_1, \ldots, w_m$, die wir als Zeilenvektor

$$w = (w_1, \ldots, w_m)$$

schreiben.

Die Beschränkungen haben die Form $wA \geqq c$, wobei A eine $m \times n$ Matrix und c ein n-komponentiger Zeilenvektor ist. Die zu minimierende Zielfunktion wird wiederum in der Form wb geschrieben, wobei b einen m-komponentigen Spaltenvektor darstellt.

Bitte beachten Sie, daß wir bei beiden Problemen die $m \times n$ Matrix A, den m-komponentigen Spaltenvektor b, der auch als $m \times 1$ geschrieben werden kann, und den n-komponentigen Zeilenvektor c, den wir als $1 \times n$ schreiben können, erhalten. Mit Hilfe dieser drei Matrizen bilden wir das *Ausgangssimplextableau*, wie es Abb. 9 zeigt. Die Indices weisen auf die Dimensionen hin, E ist eine Einheitsmatrix, und 0 stellt eine Nullmatrix dar.

$A_{m\times n}$	$I_{m\times m}$	$b_{m\times 1}$
$-c_{1\times n}$	$0_{1\times m}$	$0_{1\times 1}$

Abb. 9

Wir wollen nun dieses Ausgangssimplextableau in einer etwas erweiterten Form schreiben, in der wir die Zeilen und Spalten der Matrix bezeichnen. Wir stellen dies in Abb. 10 dar.

Die Bezeichnung A_j bedeutet dabei die j-te Spalte der Matrix A, und die Bezeichnung E_j bedeutet die j-te Spalte der Einheitsmatrix E. Die Bezeichnungen der Spalten werden dabei immer gleichbleiben. Die Bezeichnungen der Zeilen werden sich im Laufe des Rechenvorgangs ändern. Die Werte der letzten Zeile des Simplextableaus wollen wir mit Ausnahme des letzten Wertes als die „Indikatoren" bezeichnen.

	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	E_1	E_2	$\ldots$	E_m	
E_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1	0		0	b_1
E_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0	b_2
.	.	.	$\ldots$	.	.	.	$\ldots$	.	.
E_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	1	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_n$	0	0	$\ldots$	0	0

Indikatoren $\qquad cx = wb = 0$

Abb. 10

Um das soeben Gesagte zu illustrieren, wollen wir das Ausgangssimplextableau für das Lastwagen — Personenwagen-Beispiel und für das Beispiel der Bergwerksgesellschaft aus Abschnitt 3 aufstellen.

Beispiel 1. Abb. 11 zeigt das Ausgangssimplextableau für Beispiel 1, Abschnitt 3.

	A_1	A_2	E_1	E_2	
E_1	⑤	2	1	0	180
E_2	3	3	0	1	135
	—300	—200	0	0	0

Indikatoren

Abb. 11

Beispiel 2. Abb. 12 zeigt das Ausgangssimplextableau für Beispiel 2, Abschnitt 3.

	A_1	A_2	A_3	E_1	E_2	
E_1	⑥	2	4	1	0	200
E_2	2	2	12	0	1	160
	—12	—8	—24	0	0	0

Indikatoren

Abb. 12

Der Leser sollte nun selbst die Ausgangssimplextableaus für die Beispiele 3 und 4 des gleichen Abschnittes aufstellen.

Hierbei wird er feststellen, daß in jedem Fall einige der Ausgangsindikatoren negativ sind. Mit Hilfe des Simplexalgorithmus wird das Ausgangstableau in ein zweites, dieses in ein drittes usw. verwandelt. Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis das erhaltene Tableau keine negativen Indikatoren mehr enthält. Das letzte Tableau enthält dann die gesuchten Antworten. In Abb. 13 stellen wir in Form eines Flußdiagrammes die Verwendung des Simplexalgorithmus dar.

Aus dem Flußdiagramm ist zu ersehen, wie die Rechnungen auszuführen sind. Betrachten Sie zunächst das Rechteck 1 in der linken, oberen Ecke der Abb. 13: Wir sehen, daß wir die dort genannten Befehle für die Beispiele 1 und 2 bereits ausgeführt haben. Wir haben nämlich die Probleme bereits formuliert und die Ausgangssimplextableaus aufgestellt. Wir wollen nun für diese zwei Beispiele den Rest der durchzuführenden Rechnungen im einzelnen besprechen.

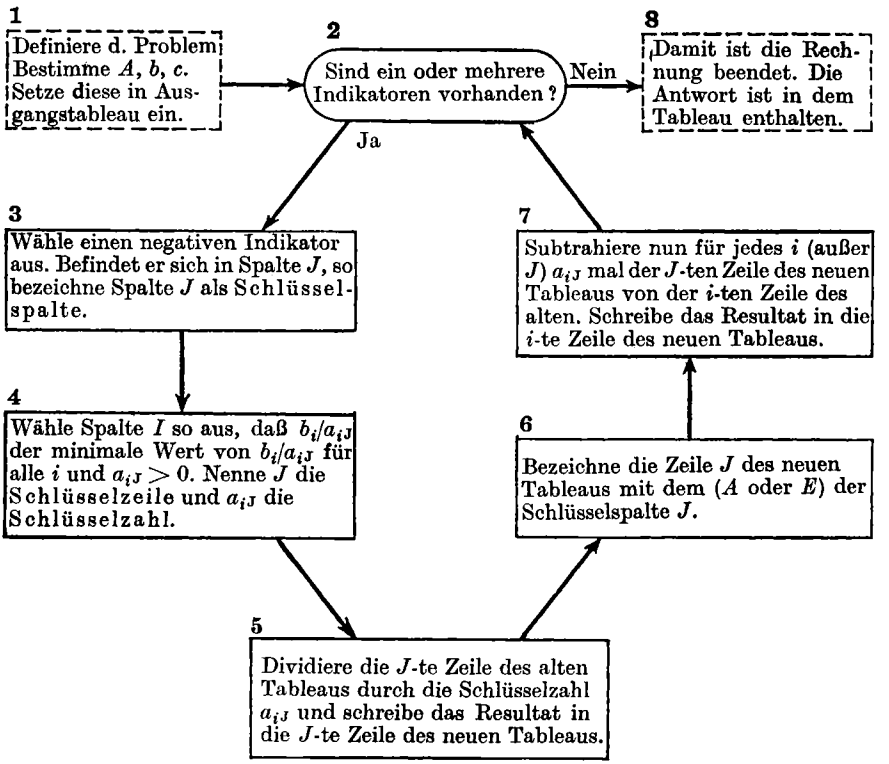


Abb. 13

Beispiel 1 (Fortsetzung). Betrachten wir nun das Kästchen 2 des Flußdiagramms, so müssen wir die dort gestellte Frage nach negativen Indikatoren in dem Ausgangssimplextableau der Abbildung mit „ja" beantworten. Wir gehen also weiter zu Kästchen 3, das uns auffordert, „einen negativen Indikator auszuwählen". Nehmen Sie an, wir wählen -300 und machen dadurch Spalte 1 zur Pivotspalte und $J = 1$. Wir gehen nun weiter zu Kästchen 4 und bemühen uns, die Pivotzeile zu finden. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Verhältnisse b_i/a_{i1} für $i = 1$ und 2. Dafür ergibt sich $180/5 = 36$ und $135/3 = 45$. Da das kleinere Verhältnis in der ersten Zeile zu finden ist, ergibt sich die 5 in der ersten Spalte der Abb. 11 als Pivotzahl und $I = 1$, so daß die erste Zeile die Pivotzeile ist. Die Pivotzahl ist in Abb. 11 mit einem Kreis umgeben.

Als nächstes stellen wir das in Abb. 14 gezeigte neue Simplextableau auf. Wir sehen in Kästchen 5 des Flußdiagramms, daß wir die alte erste Zeile durch die Pivotzahl, nämlich 5, zu dividieren haben, um die erste Zeile des in Abb. 14 gezeigten neuen Tableaus zu erhalten. Wir bezeichnen dann nach Kästchen 6 die erste neue Zeile mit A_1, der Bezeichnung der Pivotspalte. Mit Hilfe der Befehle des Kästchens 7 vervollständigen wir nun Abb. 14. Wir erhalten z. B. die zweite Zeile des neuen Tableaus, indem wir von der zweiten Zeile des alten Tableaus das Dreifache der ersten Zeile des neuen Tableaus abziehen. Diese Rechnung sieht also in Vektorform wie folgt aus:

$$-3(1\ \tfrac{2}{5}\ \tfrac{1}{5}\ 0\ 36) + (3\ 3\ 0\ 1\ 135) = (0\ \tfrac{9}{5}\ -\tfrac{3}{5}\ 1\ 27).$$

Die letzte Zeile des neuen Tableaus erhalten wir schließlich, indem wir von der letzten Zeile des alten Tableaus die erste Zeile des neuen Tableaus, multipliziert mit —300, abziehen. Der Leser sollte alle diese Rechnungen selbst durchführen.
Damit treffen wir nun wieder bei Kästchen 2 der Abb. 13 ein. Die Antwort auf die dort gestellte Frage wird wiederum „ja" lauten, da sich in der zweiten Spalte des zweiten Tableaus in Abb. 14 ein weiterer negativer Indikator, nämlich —18, befindet. Wir durchlaufen also die Schleife des Flußdiagramms noch einmal und stellen damit das dritte Tableau auf. Bei der Auswahl der Pivotzahl ergeben sich die zwei Verhältnisse zu $36/\frac{2}{5} = 90$ und $27/\frac{9}{5} = 15$, so daß die zweite Zeile Pivotzeile und 9/5 (in Abb. 14 mit Kreis versehen) die neue Pivotzahl wird. Führen wir alle im Flußdiagramm enthaltenen Rechnungen durch, so erhalten wir das in Abb. 15 gezeigte dritte Simplextableau.

	A_1	A_2	E_1	E_2	
A_1	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	36
E_2	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	27
	0	—80	60	0	10800

Indikatoren

Abb. 14

	A_1	A_2	E_1	E_2	
A_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	30
A_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	15
	0	0	$\frac{100}{3}$	$\frac{400}{9}$	12000

Indikatoren

Abb. 15

Damit befinden wir uns nun wiederum in Kästchen 2 des Flußdiagramms. Dieses Mal befinden sich jedoch in der letzten Zeile der Abb. 15 keine negativen Indikatoren. Die Antwort auf die gestellte Frage lautet also diesmal „nein", und wir gehen weiter zu Kästchen 8. Danach ist die Rechnung hier beendet, und das Ergebnis in dem eben aufgestellten Tableau enthalten. Wir können es auch wirklich in der letzten Spalte, nämlich $x_1 = 30$ in der ersten Zeile und $x_2 = 15$ in der zweiten, mit A_2 bezeichneten Zeile finden. Auch den maximalen Wert der Zielfunktion finden wir in der unteren rechten Ecke als 12000 DM.

Wie ist nun ein letztes Simplextableau zu interpretieren, das wir daran erkannten, daß alle Indikatoren nicht negativ geworden sind? Ein solches Tableau wird in Abb. 16 gezeigt.

Der endgültige Optimalwert der Zielfunktion, gleichgültig ob es sich um eine Maximierung oder eine Minimierung handelt, erscheint in der rechten

	A_1	...	A_n	E_1	...	E_n	
T_1	a_{11}^*	...	a_{1n}^*	e_{11}^*	...	e_{1m}^*	b_1^*
.	.	...	.	.	...	.	.
T_m	a_{m1}^*	...	a_{mn}^*	e_{m1}^*	...	e_{mm}^*	b_m^*
	c_1^*	...	c_n^*	w_1^0	...	w_m^0	v

Die Werte der mit A bezeichneten Zeilen sind die Komponenten x_i^0 des Optimums x^0. Alle anderen $x_i^0 = 0$.

Optimumvektor w^0 für Minimierungsproblem

Endgültiger Wert für $cx^0 = w^0b$

Abb. 16

unteren Ecke des letzten Tableaus. Der Optimumvektor w^0 eines Minimierungsproblemes wird durch die untersten Werte der mit E bezeichneten Spalten dargestellt. Die Werte in den der letzten Spalte gegenüberliegenden Zeilen, die mit A_i bezeichnet sind, stellen die von 0 verschiedenen Werte x_1^0 der optimalen Lösung x^0 eines Maximierungsproblemes dar. Bitte beachten Sie, daß für eine optimale Lösung immer $cx^0 = w^0b$ gilt. Der Grund hierfür wird im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

Beispiel 2 (Fortsetzung). Wir wollen nun mit Hilfe der Simplexmethode das zweite Beispiel lösen. Abb. 12 zeigt das dazugehörige Ausgangstableau, aus dem wir den ersten Indikator, nämlich —12, auswählten, so daß die erste Spalte zur Pivotspalte wird. Die Pivotzahl ist damit 6, was in Abb. 12 durch einen Kreis angedeutet wurde. Wir kamen zu dieser Zahl, da die zu untersuchenden Verhältnisse 100/3 betrugen, was kleiner als 160/2 = 80 ist, womit die erste Zeile zur Pivotzeile wurde. Führen wir nun die Schritte 5, 6 und 7 des Flußdiagramms durch, so erhalten wir das zweite, in Abb. 17 gezeigte Tableau.

	A_1	A_2	A_3	E_1	E_2	
A_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{100}{3}$
E_2	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{280}{3}$
	0	—4	—16	2	0	400

Abb. 17

Noch sind zwei negative Indikatoren enthalten, von denen wir den ersten, nämlich —4, auswählen, so daß damit die zweite Spalte zur Pivotspalte wird. Pivotzahl ist nun 4/3, was wir wiederum in Abb. 17 durch einen Kreis andeuten. Führen wir nun die Schritte 5, 6 und 7 des Flußdiagramms aus, so erhalten wir das in Abb. 18 gezeigte, letzte Tableau. Hier sind alle Indikatoren nicht-negativ, so daß die Rechnung damit abgeschlossen ist. Als optimale Lösung erhalten wir $w_1^0 = 1$ und $w_2^0 = 3$, und die Unterhaltungskosten der Gruben betragen 680 DM. Natürlich erhalten wir hier die gleichen Antworten, wie wir sie mit Hilfe der Methode des Abschnittes 3 erhielten.

	A_1	A_2	A_3	E_1	E_2	
A_1	1	0	−2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	10
A_2	0	1	8	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	70
	0	1	16	1	3	680
				w_1^0	w_2^0	

Abb. 18

Beispiel 3. Unser letztes Beispiel zeigt nun einen Fall, bei dem einige der w_j Indikatoren negativ werden. Die notwendigen Tableaus werden in den Abb. 19 bis 22 gezeigt, wobei die Pivotzahlen jeweils mit einem Kreis versehen sind. Man kann dieses Problem auch noch auf eine andere Weise lösen, so daß man lediglich zwei Tableaus braucht. Hier beginnt man dann mit einer Pivotzahl in der ersten Spalte, anstatt der zweiten (siehe Übung 2). Hierdurch wird die Regel bestätigt, daß es gewöhnlich (jedoch nicht unbedingt) am günstigsten ist, bei der Simplexmethode mit der Spalte zu beginnen, in der der höchste negative Indikator zu finden ist.

	A_1	A_2	E_1	E_2	
E_1	2	①	1	0	3
E_2	3	1	0	1	4
	−17	−5	0	0	0

Abb. 19

	A_1	A_2	E_1	E_2	
A_2	2	1	1	0	3
E_2	①	0	−1	1	1
	−7	0	5	0	15

Abb. 20

A_2	0	1	③	−2	1
A_1	1	0	−1	1	1
	0	0	−2	7	22

Abb. 21

E_1	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{17}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Abb. 22

ÜBUNGEN

1. Lösen Sie mit Hilfe der Simplexmethode das Beispiel 3 des Abschnittes 3.
2. Lösen Sie mit Hilfe der Simplexmethode das Beispiel 2 des Abschnittes 3, obwohl es sich hier um ein entartetes Problem handelt. Zeigen Sie, daß es zwei verschiedene Lösungswege gibt, die zu unterschiedlichen Minimierungslösungen führen.
3. Wählen Sie in dem Tableau der Abb. 12 als Pivotzahl die 2 der ersten Spalte anstatt der eingekreisten 6. Zeigen Sie, daß dies zu einem negativen Wert von w_1 führt, und erklären Sie, welche Gründe für die Wahl der Pivotzahl im Rahmen des Kästchens 4 des Flußdiagramms sprachen.
4. Lösen Sie das Problem des Beispiels 3, indem Sie den ersten Wert der ersten Spalte als Pivotzahl wählen. Zeigen Sie, daß dann die Lösung mit einem Schritt erreicht werden kann.
5. Lösen Sie mit Hilfe der Simplexmethode das folgende lineare Programmierungsproblem:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } c = (1 \;\; 0).$$
6. Versuchen Sie, das folgende Problem mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } c = (1 \;\; 0).$$
Zeigen Sie, daß die Simplexmethode nicht zum Erfolg führt, und beweisen Sie dann, unabhängig davon, daß das Problem keine Lösung hat.
Formulieren Sie die folgenden Probleme als Aufgaben der linearen Programmierung und lösen Sie sie mit Hilfe des Simplexalgorithmus.
7. Ein Gastwirt wisse, daß er an einem gegebenen Tag 40 Servietten und an dem Tag darauf 70 Servietten brauchen wird. Er kann Servietten für 20 Pf je Stück kaufen, und er kann gebrauchte Servietten für 5 Pf je Stück waschen lassen. Wie viele Servietten sollte er zunächst kaufen, und wie viele sollte er danach waschen lassen, um seine Kosten zu minimieren?
[Lös.: Es sei w_1 die Anzahl der gekauften und w_2 die Anzahl der gewaschenen Servietten. Die Daten des Problems ergeben sich dann wie folgt:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } c = (-40, 110).$$
Der Gastwirt sollte also 70 Servietten kaufen und 40 nach dem ersten Tag waschen lassen.]
8. Eine etwas kompliziertere Fassung der Übung 7 ist die folgende: Ein Gastwirt wisse, daß er an drei aufeinanderfolgenden Tagen 40, 70 bzw. 60 Servietten brauchen wird. Er kann Servietten zu 20 Pf pro Stück kaufen und kann danach gebrauchte Servietten entweder in einer Expreßreinigung innerhalb eines Tages zu 15 Pf oder durch eine normale Wäscherei innerhalb von zwei Tagen zu 8 Pf je Stück reinigen lassen. Wie viele Servietten sollte er anfänglich kaufen und wie viele gebrauchte Servietten sollte er an jedem der Tage reinigen lassen, wenn er seine Kosten minimieren will?
[Lös.: Es sei w_1 die Anzahl der gekauften, w_2 die Anzahl der gebrauchten Servietten des ersten Tages, die durch die Expreßreinigung gereinigt werden, w_3 die Anzahl der gebrauchten Servietten des ersten Tages, die in der normalen Wäscherei gewaschen werden, und w die Anzahl der gebrauchten Servietten des zweiten Tages, die durch die Expreßwäscherei gewaschen werden. Es ergeben sich dann für das Problem die folgenden Daten:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ und } c = (-40, 110, -110, 170).$$

Der Gastwirt sollte 110 Servietten kaufen, 40 nach dem ersten Tag durch die normale Wäscherei reinigen lassen und 20 am zweiten Tag in die Expreßreinigung geben.]

9. Ein nußverarbeitendes Unternehmen verfüge über 121 Pfund Erdnüsse und 49 Pfund Walnüsse. Der Unternehmer könne zwei Mischungsarten dieser Nüsse verkaufen: Eine billige Mischung, die aus 80% Erdnüssen und 20% Walnüssen besteht, oder eine teure Mischung, die aus 30% Erdnüssen und 70% Walnüssen besteht. Wie viele Pfund jeder der Mischungen sollte er herstellen, wenn er seinen Ertrag maximieren will und er die Mischungen zu 80 Pf bzw. 50 Pf je Pfund verkaufen kann?
[Lös.: Es sei x_1 die Menge der teuren Mischung in Pfund und x_2 die Menge der billigeren Mischung ebenfalls in Pfund. Es ergeben sich also die folgenden Daten:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 121 \\ 49 \end{pmatrix} \text{ und } c = (80, 50).$$

Der Hersteller sollte also 30 Pfund der teuren Mischung und 140 Pfund der billigeren Mischung verkaufen. Sein Ertrag ist dann 94 DM.]

10. Wir wollen nun ein anderes Beispiel eines Maximierungsproblemes betrachten: In einer Ölraffinerie werde Rohöl in Benzin, Heizöl und Dieselöl überführt. Die Raffinerie verarbeite am Tag 20000 Tonnen Rohöl, woraus sie insgesamt höchstens 15 Tonnen Benzin und Heizöl gewinnen kann. Im Rahmen des Raffinierungsprozesses falle jeweils mindestens soviel Heizöl wie Benzin an, und der Rest des Rohöles werde dann in Dieselöl überführt. Wieviel Tonnen jedes der drei Endprodukte sollte der Produzent herstellen, wenn er seinen Ertrag maximieren will und die Großhandelspreise von Heizöl, Benzin und Dieselöl 40, 60 bzw. 20 Pf betragen?

11. Zwei sehr kleine Länder, wir wollen sie P und Q nennen, entscheiden sich, bei der Produktion von Nahrungsmitteln und Kleidung zusammenzuarbeiten. Im Land P stehen 28000 Mann-Stunden pro Monat zur Verfügung, wobei zur Herstellung von einer Einheit Nahrungsmitteln eine Mann-Stunde und zur Herstellung von drei Einheiten Kleidung auch eine Mann-Stunde aufzuwenden sei. Im Land Q stehen 15000 Mann-Stunden zur Verfügung, wobei mit einer Mann-Stunde zwei Einheiten Nahrungsmittel oder 1/2 Einheit Bekleidung hergestellt werden könne. Im Land P werden die Arbeiter der Nahrungsmittelindustrie mit 2 DM pro Stunde und die der Bekleidungsindustrie mit 3 DM pro Stunde bezahlt, während im Land Q ein Arbeiter der Nahrungsmittelindustrie 5 DM pro Stunde und ein Arbeiter der Bekleidungsindustrie 4 DM pro Stunde erhalten. Wie sollten die beiden Länder die zur Verfügung stehenden Arbeitskräfte verteilen, wenn sie 10000 Einheiten Nahrungsmittel und 15000 Einheiten Bekleidung benötigen und sie ihre Gesamtarbeitskosten minimieren wollen? [Teillös.: Kein Arbeiter des Landes Q arbeitet.]

12. Nehmen Sie in Übung 11 an, daß das Land P die Löhne der Nahrungsmittelarbeiter auf 4 DM pro Stunde erhöhe. Welche Lösung erhalten wir nun?
[Teillös.: Die Nahrungsmittelarbeiter des Landes P und die Bekleidungsarbeiter des Landes Q arbeiten nicht.]

13. Der Hersteller einer bestimmten Ware besitze zwei Lagerhäuser und versorge zwei verschiedene Märkte. Im ersten Lagerhaus liegen 90 Tonnen der Ware und im zweiten Lagerhaus 120 Tonnen. Der erste der beiden Märkte benötige 60 Tonnen der Ware, während auf dem zweiten Markt 150 Tonnen abgesetzt werden können. Die Transportkosten für eine Tonne betragen vom ersten Lagerhaus zum ersten Markt 6 DM und zum zweiten Markt 10 DM. Ein Transport vom zweiten Lagerhaus zum ersten Markt koste 8 DM und zum zweiten Markt 12 DM. Welche Mengen sollte der Hersteller von jedem der Lagerhäuser zu jedem der Märkte transportieren, um seine Transportkosten zu minimieren?
[Mit Hilfe der Simplexmethode erhalten wir zwei Lösungen. Bei jeder der Lösungen versorgt eines der Lagerhäuser den gesamten Markt eins.]

5. Duale Probleme des linearen Programmierens

Der Leser hat sicherlich schon bemerkt, daß bei der im letzten Abschnitt beschriebenen Methode Maximierungs- und Minimierungsprobleme gleich behandelt wurden. Der einzige Unterschied bei der Formulierung der beiden Probleme war die Wahl der Zeilen- oder Spaltenvektoren für die verschiedenen in Betracht kommenden Größen. In jedem der Fälle erhielten wir eine Matrix A, einen Spaltenvektor b und einen Zeilenvektor c. Unter Benutzung dieser Daten können wir sowohl ein Maximierungs- als auch Minimierungsproblem formulieren, wobei wir jedoch nur an einem der Probleme interessiert sind. Das andere Problem wird dann das duale lineare Programmierungsproblem genannt. Das duale eines Maximierungsproblemes ist also ein Minimierungsproblem, und das duale eines Minimierungsproblemes ist ein Maximierungsproblem. Das duale Problem des dualen Problems ist in jedem der Fälle wiederum das Ausgangsproblem.

Es ist hierbei wichtig festzustellen, daß in der von uns beschriebenen Simplexmethode das Ausgangsproblem und das dazu duale Problem gleichzeitig gelöst werden. Daher ist es interessant zu untersuchen, welche Interpretation man dem dualen Problem eines Problems der linearen Programmierung geben kann. Wir werden dabei sehen, daß es für das duale Problem immer eine mathematische Interpretation gibt und daß es außerdem möglich ist, dem dualen Problem eine wirtschaftswissenschaftliche Interpretation zuzuordnen, die oft von großem Interesse ist. Wir machen diese Gedankengänge am besten an Hand von Beispielen klar:

Beispiel 1. Wir wollen noch einmal das Lastwagen—Personenwagen-Beispiel (Beispiel 1) des Abschnittes 3 betrachten. Nehmen Sie an, die Betriebsführung des Unternehmens möchte den beiden Arbeitsarten der verschiedenen Betriebe je einen bestimmten Wert zuordnen. Die Antwort auf eine solche Frage mag durchaus wichtig für Arbeitgeber—Arbeitnehmer-Behandlungen sein. Der von uns errechnete Wert wird dabei nicht von dem Lohn eines einzelnen Arbeiters abhängig sein, sondern von dem abgeleiteten Wert seiner Arbeit. Für diesen Zweck sei w_1 der Wert (DM pro Mann-

Tag) eines Arbeiters in Werk 1 und w_2 der Wert eines Arbeiters in Werk 2. Da für den Bau eines Lastwagens 5 Mann-Tage des Werkes 1 und 3 Mann-Tage des Werkes 2 benötigt werden und da der erreichte Gewinn 300 DM beträgt, soll $5w_1 + 3w_2 \geqq 300$ sein. Da für den Bau eines Personenwagens 2 Mann-Tage des Werkes 1 und 3 Mann-Tage des Werkes 2 nötig sind und da beim Verkauf eines Personenwagens ein Gewinn von 200 DM erzielt werden kann, soll entsprechend $2w_1 + 3w_2 \geqq 200$ sein. Setzen wir nun $w = (w_1, w_2)$ und lassen A und c unverändert, so können wir diese beiden Ungleichungen zu $wA \geqq c$ zusammenfassen. Diese Ungleichungen implizieren nun, daß die zugeordneten Werte wenigstens so groß wie der zu erreichende Gewinn sein sollten.
Auf der anderen Seite möchte die Betriebsführung die gesamten abgeleiteten wöchentlichen Arbeitskosten so klein wie möglich halten. Daraus ergibt sich dann $180\, w_1 + 135\, w_2 = wb$. Da es sich hier offensichtlich um ein lineares Minimierungsproblem handelt, können wir sagen: Minimiere wb unter der Bedingung $wA \geqq c$. Da weiterhin die Arbeitswerte vernünftigerweise nicht negativ sein können, fügen wir als zusätzliche Ungleichung $w \geqq 0$ hinzu.
Es mag zunächst etwas ungewöhnlich erscheinen, den Wert von Arbeitsstunden auf diese Weise abzuleiten. Dieser Eindruck entsteht teilweise, weil es uns eine nicht geläufige Ableitungsart ist, teilweise, weil der *abgeleitete Wert* eines Arbeiters sich durchaus von seinem wirklichen Lohn unterscheiden kann. Die Art jedoch, in der Löhne festgesetzt werden, unterscheidet sich wesentlich von der oben beschriebenen Methode für die Errechnung abgeleiteter Werte. Der wirkliche Nutzen von abgeleiteten Werten liegt im Gebrauch dieser Werte durch die Betriebsführung bei der Beurteilung des Herstellungsprozesses.

Beispiel 2. Wir wollen nun ein mit Beispiel 2 des Abschnittes 3 in Verbindung stehendes Problem betrachten. Nehmen Sie an, die Verwaltung der Bergwerksgesellschaft wolle jeder der Erzarten, die von der Gesellschaft gefördert wird, einen bestimmten Wert zuordnen. Eine solche Zuordnung mag bei der Bestimmung des Verkaufspreises nützlich sein. Im Endeffekt werden diese Preise eine Zuordnung der Unterhaltskosten der Gruben zu jeder Erzart darstellen.
Manche Wirtschaftswissenschaftler bezeichnen diese Werte, die keine unbedingte Verbindung mit den Marktpreisen haben, als *Schattenpreise*. Wie wir sehen werden, wird jedem Produkt, das im Überfluß hergestellt wird, selbst dann der Schattenpreis 0 zugeordnet, wenn Teile davon zu einem positiven Marktpreis verkauft werden. Wir können ein solches Produkt z. B. als ein Nebenprodukt der Bergwerksgesellschaften interpretieren. Wir werden ferner sehen, daß bei eintretenden Nachfrageveränderungen durchaus Nebenprodukte zu Hauptprodukten und Hauptprodukte zu Nebenprodukten werden können.
Wir wollen zu dem Bergwerksbeispiel zurückkehren und mit x_1 den Schattenpreis des grobkörnigen Erzes, mit x_2 den Schattenpreis des mittelkörnigen Erzes und mit x_3 den Schattenpreis des feinkörnigen Erzes bezeichnen. x sei ein dreikomponentiger Spaltenvektor, bestehend aus x_1, x_2 und x_3. Der Schattenwert der wöchentlichen Verkäufe ist unter Zugrundelegung dieser Schattenpreise $cx = 12x_1 + 8x_2 + 24x_3$. Für das Unternehmen ist es offensichtlich erstrebenswert, diesen Betrag so groß wie möglich werden zu lassen. Soll der Schattenwert jedoch einen Sinn haben, so darf der Gesamtschattenwert des hergestellten Erzes nicht größer sein als der Betrag der täglichen Unterhaltskosten einer Grube. Wir wollen diese Tatsache durch zwei Ungleichungen ausdrücken: Für Grube 1 lautet sie

$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqq 200$$

und für Grube 2

$$2x_1 + 2x_2 + 12x_3 \leqq 160.$$

Wir können dies in Matrixform einfacher als $Ax \leqq b$ schreiben. Da die Preise im allgemeinen nicht negativ sein werden, können wir dem die Ungleichung $x \geqq 0$ hinzufügen.

Die gerade von uns formulierten linearen Programmierungsprobleme sind die dualen, zu den ursprünglich in Abschnitt 3 aufgeführten. Bei beiden werden die gleichen Daten verwandt, und wir können ein paar zueinander duale, lineare Programmierungsprobleme wie folgt definieren:

Das MAXIMIERUNGSproblem	Das MINIMIERUNGSproblem
Max cx	Min wb
Unter den Bedingungen	Unter den Bedingungen
(1) $Ax \leqq b$	(3) $wA \geqq c$
(2) $x > 0$	(4) $w \geqq 0$.

Alle Vektoren x, die (1) und (2) und alle Vektoren w, die (3) und (4) genügen, werden *zulässige* Vektoren genannt.

Wir wollen nun versuchen, eine allgemeine Interpretation eines Paares dualer, linearer Programmierungsprobleme zu geben. Bei jedem der Probleme soll die Matrix A die Matrix der *technologischen Koeffizienten* genannt werden, da sie zeigt, wie die Vektoren durch die Ungleichungen eingeschränkt werden. Wir können dann verschiedene Interpretationen für die Vektoren c, b, x und w geben, je nachdem, ob unser Ausgangsproblem ein Maximierungs- oder ein Minimierungsproblem ist.

Handelt es sich beim Ausgangsproblem um ein Maximierungsproblem, so interpretieren wir x als den *Aktivitätenvektor*, der Vektor b wird als der Vektor der *Restriktionen* (Nebenbedingungen) interpretiert, der die Menge des „Rohmaterials", das im Rahmen eines gegebenen Aktivitätsvektors verbraucht werden darf, begrenzt. Der Vektor c ist dann der *Gewinnvektor*, dessen Werte für jede Komponente des Aktivitätenvektor x den zu erreichenden Gewinnbetrag angibt. Schließlich ist der Vektor w der Vektor der *abgeleiteten* Werte, dessen Komponenten die abgeleiteten (Schatten-)Werte der Arbeitszeiten oder des Rohmaterials angeben, die in dem Prozeß verbraucht werden.

Handelt es sich jedoch beim Ausgangsproblem um ein Minimierungsproblem, so interpretieren wir w als den *Aktivierungsvektor*, der Vektor c ist dann der Vektor der *Anforderungen*, dessen Werte die minimalen Mengen dessen angeben, was produziert werden muß. Der Vektor b ist dann der *Kostenvektor*, dessen Werte die Kosten jeder der Komponenten des Aktivitätenvektors w darstellen. Schließlich ist der Vektor x der Vektor der *abgeleiteten Werte*, des Rohmaterials, das in den Prozeß einfließt.

Wie wir schon ausführten, haben wir bereits die beiden dualen Probleme der Beispiele 1 und 2 des Abschnittes 3 gelöst. Wir können nun zu den Sim-

plexrechnungen des vorigen Abschnittes zurückkehren und sie in der richtigen Weise interpretieren.

Beispiel 1 (Fortsetzung von Abschnitt 3). Aus den Abb. 11, 14 und 15 ersehen wir, daß sich diese Rechnungen, die wir für ein Maximierungsproblem durchgeführt hatten, geändert hätten, wenn wir unser Arbeitswertproblem als Minimierungsproblem formuliert und ausgerechnet hätten. Aus Abb. 15 erhalten wir $x_1^0 = 100/3$ und $w_2^0 = 400/9$. Der Arbeit im Werk 2 ist also ein etwas größerer abgeleiteter Wert zuzuordnen als der Arbeit in Werk 1. Beachten Sie weiterhin, daß der gesamte abgeleitete wöchentliche Arbeitswert 12000 DM ist, was genau dem gesamten, wöchentlichen maximalen Gewinn entspricht.

Beispiel 2 (Fortsetzung von Abschnitt 3). Wir können wiederum die Abb. 12, 17 und 18 als Teile der Errechnung der abgeleiteten Preise des Bergwerkproblems auffassen. Als Lösung ergibt sich dabei

$$x^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d. h. grobkörniges Erz hat einen Schattenwert von 10 DM pro Einheit, mittelkörniges Erz einen von 70 DM pro Einheit und feinkörniges Erz einen von 0 DM pro Einheit. Bitte beachten Sie, daß der Schattenpreis des Erzes mehr von den Produktionskosten als von der Qualität abhängt (im Verkaufspreis *würde sich die Qualität widerspiegeln*). Beachten Sie ferner, daß das im Überfluß produzierte feinkörnige Erz den Schattenpreis 0 hat, d. h. es ist ein Nebenprodukt. Schließlich können wir feststellen, daß $\max cx = \min wb = 680$ DM ist.

Es ist nun kein Unglück, daß duale Probleme gemeinsame Werte haben. Das nächste, grundlegende Prinzip des linearen Programmierens zeigt, daß dies immer der Fall sein wird, wenn die Probleme über Lösungen verfügen.

Das Dualitätstheorem. Das Maximierungsproblem hat als Lösung dann und nur dann den zulässigen Vektor x^0 mit $cx^0 = \max cx$, wenn das Minimierungsproblem als Lösung den zulässigen Vektor w^0 mit $w^0b = \min wb$ hat. Weiterhin gilt die Gleichung $cx^0 = w^0b$ dann und nur dann, wenn x^0 und w^0 Lösungen der entsprechenden Probleme sind.

Das Dualitätstheorem ist außerordentlich aussagefähig, da es besagt, daß, wenn eines der Probleme eine Lösung hat, dann auch notwendigerweise eine Lösung für das andere Problem existiert und daß beide Probleme einen gemeinsamen Wert haben. Eine weitere Konsequenz dieses Theorems ist, daß, wenn eines der Probleme über keine Lösung verfügt, dann auch für das andere Problem keine Lösung vorhanden ist.

Der Beweis des Dualitätstheorems geht über den Rahmen dieses Buches hinaus. Teile davon werden jedoch in Übung 5 behandelt. Übung 6 gibt dann ein Beispiel für ein Problem linearer Programmierung, für das keine Lösung existiert.

Als letztes wollen wir noch einmal die Simplexmethode gründlicher betrachten. Ehe wir den Ablauf der Simplexmethode beschreiben können, müssen wir noch eine kleine Änderung bei der Formulierung der dualen Programme vornehmen. Dies geschieht, indem wir durch Einführung von *Schlupfvariablen* in die Ungleichungen (1) und (4) daraus Gleichungen machen. Als Beispiel wollen wir das folgende System von Ungleichungen betrachten:

$$-u + 2v \leqq 5, \quad u \geqq 0 \quad \text{und} \quad v \geqq 0.$$

Wir fügen nun eine neue Schlupfvariable w hinzu und erhalten dadurch das neue Gleichungssystem

$$-u + 2v + w = 5, \; u \geqq 0, \; v \geqq 0 \text{ und } w \geqq 0.$$

Auf diese Weise erhalten wir also die Gleichung

$$-u + 2v + w = 5$$

mit nicht negativen Variablen. Bitte beachten Sie, daß das neue System dem alten äquivalent ist, da jede Lösung des neuen Systems, für die $w = 0$ ist, den Fall darstellt, bei dem $-u + 2v = 5$ und eine Lösung des neuen Systems mit $w > 0$ den Fall repräsentiert, für den $-u + 2v > 0$ ist. Weiterhin ist es offensichtlich, daß jede Lösung des alten Systems dadurch in eine Lösung des neuen Systems umgeformt werden kann, daß man für w den entsprechenden, nicht negativen Wert bestimmt. Die Wahrheitsklassen dieser beiden Systeme sind also identisch.

Um nun die Ausdrücke (1) und (4) in Gleichungen zu überführen, müssen wir $m + n$ Schlupfvariable einführen. Zu diesem Zweck definieren wir die folgenden Vektoren der Schlupfvariablen: y ist ein m-komponentiger Spaltenvektor, bestehend aus Schlupfvariablen y_1 und z ist ein n-komponentiger Zeilenvektor, der aus den Schlupfvariablen z_j besteht. Die dualen, linearen Programmierungsprobleme können dann in folgender Weise dargestellt werden:

Das MAXIMIERUNGSproblem	Das MINIMIERUNGSproblem
max cx	min wb
Unter den Bedingungen	Unter den Bedingungen
(1′) $Ax + y = b$	(3′) $wA - z = c$
(2′) $x \geqq 0, \; y \geqq 0$	(4′) $w \geqq 0, \; z \geqq 0.$

Die Vektoren x und y, die (1′) und (2′) genügen, und die Vektoren w und z, die (3′) und (4′) genügen, sollen wieder *zulässige* Vektoren genannt werden. Wir wollen diese Form des Problems dadurch kennzeichnen, daß wir sagen, ihre Restriktionen hätten die Form von *Gleichungen*.

Die Tatsache, daß die Lösungen eines linearen Programmierungsproblems, dessen Restriktionen in Gleichungsform gegeben sind, die gleichen sind, als

wenn die Restriktionen des Problems in Form von Ungleichungen gegeben sind, kann dadurch bewiesen werden, daß die Wahrheitsklassen der x und y Vektoren in jedem der Fälle gleich sind und daß die Schlupfvariablen die zu maximierende oder minimierende Funktion nicht beeinflussen.

Da wir vorausgesetzt haben, daß $b \geqq 0$, werden die Gleichungen (1′), (2′) und (3′) durch die folgenden Vektoren gelöst:

$$x = 0,\ y = b,\ w = 0,\ z = -c. \tag{5}$$

Bitte beachten Sie, daß x, y und w bereits nicht-negativ sind, daß jedoch z nur dann nicht-negativ ist, wenn wir bereits über eine Lösung des Problems verfügen. Beachten Sie ferner, daß anfänglich $cx = wb = 0$.

Nun können wir auch die Gründe für die verschiedenen Schritte des in Abb. 13 gezeigten Flußdiagramms erklären. Das ursprüngliche Diagramm wurde unter Zugrundelegung der Werte (5) aufgestellt (siehe Übung 3). Mit Hilfe der Simplexmethode werden nun die Tableaus systematisch mit dem Ziel abgeändert, c in einen nicht negativen Vektor zu überführen, ohne dabei x, y oder w negativ werden zu lassen und ohne die Bedingung $cx = wb$ zu verletzen. In Schritt 4 der Abbildung wurde die Pivotzahl mit dem kleinsten Verhältnis b_i/a_{ij} gewählt, um keine der x_i oder y_i Variablen negativ werden zu lassen. Der Leser möge sich vergegenwärtigen, daß einige der Variablen negativ werden, wenn eine andere Pivotzahl gewählt wird (siehe Übung 3 des vorangehenden Abschnittes). Der Grund dafür, daß der Algorithmus dann beendet war, wenn alle Indikatoren positiv sind, ist ebenso klar: Bei allen Schritten waren die Gleichungen (1′), (2′), (3′) und $cx = wb$ erfüllt. Sind nun alle Indikatoren nicht-negativ, so gilt auch $b \geqq 0$ und $z \geqq 0$, womit wiederum (4′) erfüllt ist. (siehe Übung 4). Gemäß dem Dualitätstheorem hat man jedoch dann eine Lösung des Programmierungsproblemes gefunden, wenn x^0, x, y^0 und z den Gleichungen (1′) bis (4′) und $cx^0 = w^0b$ genügen.

ÜBUNGEN

1. Interpretieren Sie die dualen Probleme für jede der Übungen 7 bis 14 des vorangehenden Abschnittes. Bestimmen Sie deren Lösungen auf Grund der bereits in den Simplextableaus bestimmten Lösungen für die Ausgangspositionen.

2. Ein Nahrungswissenschaftler möchte die Nahrungsmengen bestimmen, die alle für den menschlichen Organismus nötigen Vitamine enthalten. Bei der Untersuchung dreier verschiedener Lebensmittel F_1, F_2 und F_3 finde er die folgenden Mengen der Vitamine A und B:

	F_1	F_2	F_3
Vitamin A	2	4	3
Vitamin B	5	2	5

Die Zahlen geben die in einem Pfund des Nahrungsmittels enthaltenen Vitaminmengen an. Nehmen Sie nun an, der Mensch brauche mindestens 80 Einheiten Vitamin A und wenigstens 60 Einheiten Vitamin B. Die Preise für die drei Nahrungsmittel betragen 1 DM pro 1/2 kg F_1, 80 Pf pro 1/2 kg F_2 und 1,50 DM pro 1/2 kg F_3. Welchen Vorschlag soll der Nahrungsmittelwissenschaftler machen, wenn gefordert wird, daß die Vitaminanforderungen bei geringsten Kosten zu decken sind? Interpretieren und lösen Sie gleichzeitig das duale Maximierungsproblem.
[Lös.: 5 Einheiten F_1 und 17½ Einheiten F_2 zu einem Preis von 19 DM. Die abgeleiteten Werte pro Einheit sind 12½ Pf pro Vitamin A und 15 Pf pro Vitamin B.]

3. Betrachten Sie das Ausgangssimplextableau der Abb. 10 und die Ausgangslösung für Gleichung (5).
   a) Zeigen Sie, daß in der unteren rechten Ecke der Abb. 10 $cx = wb = 0$ erscheint.
   b) Zeigen Sie, daß am unteren Ende des Ausgangstableaus $z = -c$ und $w = 0$ erscheint.
   c) Zeigen Sie, daß $y = b$ in der rechten Spalte des Ausgangstableaus erscheint, da die ersten m Zeilen ursprünglich mit E_i bezeichnet sind.
   d) Zeigen Sie, daß ursprünglich $x = 0$ ist, obwohl keine der Komponenten im Ausgangstableau erscheint, da zunächst keine der Zeilen mit A bezeichnet ist.

4. Betrachten Sie das Endsimplextableau der Abb. 16.
   a) Zeigen Sie, daß in der rechten unteren Ecke des Tableaus $cx^0 = w^0$ erscheint.
   b) Zeigen Sie, daß die Werte der ersten n Spalten der letzten Zeile die Endwerte der Schlupfvariablen $z_1, \ldots, z_n$ darstellen. Zeigen Sie weiterhin, daß die nächsten m Werte der letzten Zeile die Endwerte der Antworten $w_1^0, \ldots, w_m^0$ sind.
   c) Zeigen Sie, daß die Werte der letzten Spalte, deren Zeilen mit A bezeichnet sind, die von 0 verschiedenen Werte der Antworten $x_1^0, \ldots, x_n^0$ darstellen, während die Werte der letzten Spalte, deren Zeilen mit E bezeichnet sind, die von 0 verschiedenen Werte von $y_1, \ldots, y_n$ sind. Alle anderen Komponenten von x und y sind 0.

5. x^0 und w^0 seien die nicht-negativen Vektoren, für die $cx^0 = w^0b$, $Ax^0 \leqq b$ und $w^0A \geqq c$ gilt.
   a) Zeigen Sie, daß dann, wenn x irgendein anderer zulässiger Vektor ist, die folgende Bedingung gilt
   $$cx \leqq w^0 Ax \leqq w^0b = cx^0.$$
   Damit löst x^0 das Maximierungsproblem.
   b) Zeigen Sie, daß dementsprechend w^0 das Minimierungsproblem löst.
   c) Zeigen Sie, daß $cx^0 = w^0b = w^0Ax^0$.

6. Betrachten Sie das folgende Problem: Minimieren Sie $-w_1 + w_2$ unter den Restriktionen $w_1 \geqq 0$, $w_2 \geqq 0$ und $w_1 - w_2 \geqq 1$.
   a) Skizzieren Sie die konvexe Punktmenge der zulässigen Vektoren und zeigen Sie, daß diese unbegrenzt ist.
   b) Wie lautet die konvexe Punktmenge der Vektoren für das duale Problem?
   c) Beweisen Sie unter Benutzung des Dualitätstheorems, daß die dualen Probleme keine Lösung haben.
   d) Beweisen Sie direkt, daß das Minimierungsproblem keine Lösung hat.

Empfohlene Lektüre

Beckmann, M. J.: Lineare Planungsrechnung, Ludwigshafen 1959.

Böhm, H. H.: Nichtlineare Programmplanung, Wiesbaden 1959.

Churchman, Ackoff, Arnoff: Operations Research, Wien 1961.

Förstner, K., Henn, R.: Dynamische Produktionstheorie und lineare Programmierung, Meisenheim 1957.

Joksch, H. C.: Lineares Programmieren, Tübingen 1962.

Krelle, W., Künzi, H. P.: Lineare Programmierung, Zürich 1958.

Vajda, S.: Einführung in die Linearplanung und die Theorie der Spiele, München 1961.

Zimmermann, H. J.: Mathematische Entscheidungsforschung und ihre Anwendung auf die Produktionspolitik, Berlin 1963.

VIII. Die Theorie der Spiele

1. Einführung: Determinierte Spiele

Die ersten acht und der zehnte Abschnitt dieses Kapitels sind so geschrieben, daß ihnen der Leser folgen kann, wenn er die ersten fünf Kapitel dieses Buches gelesen hat. Für das Verständnis des Abschnittes 9 ist jedoch die Kenntnis der in Kapitel VII besprochenen Simplexmethode Voraussetzung.

Die Theorie der Spiele befaßt sich mit Situationen, in denen zwei oder mehr Personen durch ihre Verhaltensweisen das Ergebnis eines bestimmten Vorganges beeinflussen, aber nicht vollständig bestimmen können. Je nach dem wirklich eintretenden Ergebnis erhalten die Spieler verschiedene Zahlungen. Beträgt die Summe aller Zahlungen für jedes mögliche Ergebnis 0, so wird das Spiel als ein *Nullsummenspiel* bezeichnet. Andernfalls ist es ein Nicht-Nullsummenspiel. Gewöhnlich stimmen die Spieler in dem von ihnen gewünschten Ergebnis nicht überein, so daß ihre Ziele sich innerhalb des Spieles unterscheiden. Im Falle eines Matrixspieles, d. h. eines Spieles mit zwei Personen, in dem der eine Spieler verliert, was der andere gewinnt (es handelt sich also um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel), liefert die Theorie der Spiele eine Lösung, die auf der Annahme beruht, daß jeder Spieler versucht, sich so zu verhalten, daß er für sich einen bestimmten Betrag sichern kann, unabhängig davon, was sein Gegenspieler unternimmt. In den Abschnitten 1 bis 9 wollen wir solche Matrixspiele besprechen. Für Nicht-Nullsummenspiele mit mehreren Personen sind verschiedene Lösungskonzepte entwickelt worden, von denen wir einige in Abschnitt 10 besprechen wollen.

Die meisten Gesellschaftsspiele, wie Poker, Bridge, Skat und andere Kartenspiele, können als Strategiespiele angesehen werden. Auf der anderen Seite sind Glücksspiele wie Roulette usw. keine Strategiespiele, da hierbei die einzelnen Personen lediglich ihre Wettchancen als Richtschnur nehmen können. Die eigentlichen, oben angeführten Strategiespiele sind zu kompliziert, als daß wir sie hier vollständig analysieren könnten. Wir werden daher einfache Beispiele auswählen, die, wenn sie auch von dem Standpunkt eines Spielers aus uninteressant sind, die zugrunde liegende Theorie gut illustrieren und die auch einer rechnerischen Untersuchung zugängig sind.

Im vorliegenden und im nächsten Abschnitt werden wir einige einfache Spielbeispiele besprechen. Die allgemeine Definition eines Matrixspieles wird dann in Abschnitt 3 gegeben.

Beispiel. Betrachten Sie das folgende Kartenspiel. Nehmen Sie an, es gäbe zwei Spieler, wir wollen sie S und Z nennen (der Grund für die Wahl dieser beiden Buchstaben wird später erklärt werden); der Spieler Z erhalte eine rote und eine schwarze Fünf, während der Spieler S eine schwarze Fünf und eine rote Drei in der Hand halte. Sie spielen nach den folgenden Regeln: Auf ein gegebenes Zeichen hin, legen die Spieler *gleichzeitig* eine ihrer Karten auf den Tisch. Haben diese beiden Karten die gleiche Farbe, so gewinnt der Spieler Z die (positive) Differenz zwischen den Zahlenwerten der beiden Karten. Unterscheiden sich die beiden Karten, die auf dem Tisch liegen, in ihrer Farbe, so gewinnt der Spieler S die (positive) Differenz zwischen den Zahlenwerten der beiden Karten. Die strategische Entscheidung, die jeder der Spieler zu fällen hat, ist offensichtlich, welche der beiden Karten er auf den Tisch legt.
Ein gebräuchlicher Weg, dieses Spiel darzustellen, ist der in Form der in Abb. 1 gezeigten Matrix. (Im Rahmen der Theorie der Spiele ist es üblich, Matrizen in dieser „Tabellenform" darzustellen, die man auch Auszahlungstabelle nennt.) Die Zeilen stellen die möglichen Entscheidungen des Spielers Z und die Spalten die möglichen Entscheidungen des Spielers S dar. Wir wählen deshalb auch die beiden Buchstaben S und Z. Der Wert an der Stelle a_{ij} stellt den Gewinn von Z dar, wenn Z die Zeile i und S die Spalte j wählt. Eine positive Zahl bedeutet eine Zahlung von S an Z, während ein negativer „Gewinn" von Z eine Zahlung von Z an S ist. Wählt z. B. Z die Zeile 1 (spielt s 5), und S wählt die Spalte 1 (spielt s 5), so gewinnt Z die Differenz der beiden Zahlen, die in diesem Fall 0 ist. Wählt Z die Zeile 1 und S die Spalte 2 (spielt r 3), so gewinnt S die Differenz zwischen 2 und 0, was in der Matrix durch den Wert —2 angedeutet wird. Durch die in Abb. 1 gezeigte Matrix werden die strategischen Charakteristika des Spieles vollkommen beschrieben. Das in Abb. 1 gezeigte Spiel ist ein sog. *Matrixspiel.*

		Spieler S	
		$s5$	$r3$
Spieler Z	$s5$	0	—2
	$r5$	0	2

Abb. 1

Jede $2 \cdot 2$ Matrix kann als ein Zwei-Personen-Matrixspiel betrachtet werden, wenn man die Zeilen als die Strategien des einen Spielers, die Spalten als die Strategien des anderen Spielers und die einzelnen Matrixwerte als die Zahlungen des Spieles definiert. Wir werden in Abschnitt 3 sehen, daß eine Matrix beliebiger Größe auf die gleiche Weise als Matrixspiel betrachtet werden kann.
Wie sollten nun die Spieler das Matrixspiel der Abb. 1 spielen? Der Spieler S würde sicherlich gerne die Möglichkeit —2 der Matrix erreichen, dies kann er jedoch nur dann, wenn er die zweite Spalte der Matrix wählen würde. In diesem Falle würde sicherlich Spieler Z die Zeile 2 wählen, und S würde eher 2 verlieren als gewinnen. Wählt S auf der anderen Seite die erste Spalte (d. h. spielt er s 5), so stellt er unabhängig von der Wahl von Z wenigstens sicher, daß er weder verliert noch gewinnt. Es ist klar, daß Z nichts zu verlieren hat und daß er möglicherweise durch die Wahl der zweiten Zeile gewinnen kann. Er wird daher diese Zeile wählen. Das Wissen darum bestärkt jedoch S in seiner Wahl der ersten Spalte. Die optimale Vorgehensweise für die Spieler ist also: Z sollte die rote 5 und S die schwarze 5 spielen. Spielen die Spieler in dieser Weise, so gewinnt keiner von ihnen etwas, d. h. wir bezeichnen das Spiel als fair.
Wir wollen eine Aussage der Form „Spiele r 5" oder „Spiele s 3" eine *Strategie* nennen. Benutzt nun Spieler Z die Strategie „Spiele r 5" in dem in der Abb. 1 gezeigten Spiel,

so stellt er sicher, daß er unabhängig von der Handlungsweise von S wenigstens eine Zahlung von 0 erhalten wird. Benutzt S die Strategie „Spiele s 5", so stellt er entsprechend sicher, daß er unabhängig davon, was Z tut, *höchstens* eine Zahlung von 0 erhält, d. h. sein Verlust höchstens 0 ist. Da Z durch eigenes Handeln nicht sicherstellen kann, mehr als 0 zu gewinnen, und S, ebenfalls durch eigenes Handeln, nicht sicherstellen kann, weniger als 0 zu verlieren, und da diese beiden Zahlen gleich sind, bezeichnen wir diese Handlungsweise als *optimale Strategien* des Spieles. Die 0 bezeichnen wir als den *Wert* des Spieles, da sie dann als Ergebnis auftritt, wenn beide Spieler ihre jeweils optimale Strategie benutzen.

Definition. Wir wollen ein $2 \cdot 2$ Matrixspiel dann als *streng determiniert* bezeichnen, wenn die Matrix einen Wert, sagen wir v, enthält, der gleichzeitig das *Minimum* einer Zeile und das *Maximum* einer Spalte ist[1]. Die *optimalen Strategien* der Spiele sind dann:

Für Spieler Z: „Wähle eine Zeile, die v enthält."

Für Spieler S: „Wähle eine Spalte, die v enthält."

Der *Wert* des Spieles ist dann v. Ist der Wert Null, so wird das Spiel als *fair* bezeichnet.

Wir werden in Abschnitt 3 zeigen, daß die hier definierten Strategien in dem oben angegebenen Sinne optimal sind und daß v das Optimum dessen ist, was jeder Spieler für sich sicherstellen kann.

Da in Abb. 1 die 0 in der linken unteren Ecke der Matrix das Minimum der zweiten Zeile und das Maximum der ersten Spalte dieser Matrix ist, hat das in Abb. 1 gezeigte Spiel einen Sattelpunkt. Bitte überzeugen Sie sich davon, daß die in der obigen Definition gegebenen optimalen Strategien mit den im Beispiel gefundenen übereinstimmen. Da der Wert des Spieles gemäß der obigen Definition 0 ist, kann man es als fair bezeichnen.

Die Lösung eines streng bestimmten Spieles ist besonders leicht zu finden, da sich jeder der Spieler die optimale Strategie errechnen kann und daher weiß, was der andere unternehmen wird. Wie wir jedoch im nächsten Abschnitt sehen werden, sind nicht alle $2 \cdot 2$ Matrixspiele so leicht zu lösen. Abb. 2 zeigt drei verschiedene Matrixspiele. Das Spiel der Abb. 2a hat einen Sattelpunkt und ist fair, und seine optimalen Strategien sind für Z die erste Zeile und für S die erste Spalte.

Das Spiel der Abb. 2b hat zwar einen Sattelpunkt, ist jedoch nicht fair, da sein Wert 2 beträgt. Welche Strategien sind in diesem Falle optimal? Das in Abb. 2c gezeigte Spiel hat keinen Sattelpunkt. Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit der Lösung solcher Spiele beschäftigen.

---

[1] Dieser Wert wird dann als „Sattelpunkt" bezeichnet. Im deutschen Sprachgebrauch hat sich der Begriff „Matrixspiel mit Sattelpunkt" durchgesetzt. Der im amerikanischen Original benutzte Begriff des „streng determinierten Matrixspieles" entspricht dem erstgenannten vollkommen. [Der Übersetzer.]

0	1
−3	10

(a)

5	2
−7	−4

(b)

0	1
2	0

(c)

Abb. 2

ÜBUNGEN

1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Spiele einen Sattelpunkt haben und welche fair sind. Nennen Sie die optimalen Strategien jedes Spielers für die streng bestimmten Spiele.

(a)

0	2
−1	4

(b)

5	0
0	2

(c)

3	1
4	0

(d)

1	−1
−1	1

(e)

3	1
−4	0

(f)

0	4
0	2

(g)

7	0
0	0

(h)

0	0
0	−7

(i)

0	0
0	0

(j)

1	1
1	1

[Lös.: a) Hat einen Sattelpunkt und ist fair; Z spielt Zeile 1, S spielt Spalte 1; b) kein Sattelpunkt; e) Sattelpunkt, jedoch nicht fair; Z spielt Zeile 1, S spielt Spalte 2; j) hat Sattelpunkt, ist jedoch nicht fair; beide Spieler können eine beliebige Strategie verwenden.]

2. Nehmen Sie an, Z halte r 5 und s 3, und S besitze die Karten s 3 und r 3. Stellen Sie das dementsprechende Matrixspiel dar. Hat es einen Sattelpunkt? Ist es fair? Bestimmen Sie die optimalen Strategien dieses Spieles.

[Lös.: ja. ja. Beide spielen s 3.]

3. Zwei Spieler zeigen gleichzeitig einen oder zwei Finger, und S zahle an Z eine Summe, die gleich der Gesamtzahl der gezeigten Finger ist. Stellen Sie die Spiel-

matrix auf. Zeigen Sie, daß das Spiel einen Sattelpunkt hat und bestimmen Sie Wert und optimale Strategie.

4. Von zwei Spielern zeigt jeder gleichzeitig einen oder zwei Finger, und S zahle an Z einen Betrag, der der Gesamtzahl der gezeigten Finger entspricht, während Z an S einen Betrag zahle, der gleich dem Produkt der Zahlen der gezeigten Finger ist. Stellen Sie die Spielmatrix auf. (Die Werte entsprechen dem Nettogewinn von Z.) Bestimmen Sie Wert und optimale Strategien.
[Lös.: $v = 1$. Z muß einen Finger zeigen, und S kann einen oder zwei Finger zeigen.]

5. Zeigen Sie, daß ein Spiel mit Sattelpunkt dann und nur dann fair ist, wenn eine 0 existiert, in deren Zeile beide Werte nicht negativ und in deren Spalte beide Werte nicht positiv sind.

6. Betrachten Sie das Spiel

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline -1 & a \\ \hline \end{array} .$$

   a) Zeigen Sie, daß G, unabhängig vom Wert a, einen Sattelpunkt hat.
   b) Bestimmen Sie den Wert von G. [Lös.: 2.]
   c) Bestimmen Sie die optimalen Strategien für jeden Spieler.
   d) Wäre $a = 1$ Million, so würde offensichtlich Z bemüht sein, diese als Gewinn zu erhalten. Gibt es irgendeinen Weg, auf dem er das sicherstellen kann? Was passierte, wenn er versuchen würde, diesen Betrag zu erhalten?
   e) Zeigen Sie, daß der Wert des Spieles der höchste Betrag ist, den Z sich sichern kann.

7. Betrachten Sie das Matrixspiel

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} .$$

   Zeigen Sie, daß G für jeden Satz von Werten für a, c und d einen Sattelpunkt hat. Zeigen Sie, daß das gleiche dann gilt, wenn zwei Werte einer gegebenen Spalte immer gleich sind.

8. Nennen Sie notwendige und ausreichende Bedingungen dafür, daß das Spiel

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline a & 0 \\ \hline 0 & b \\ \hline \end{array}$$

   einen Sattelpunkt hat. [Hinw.: Diese Bedingungen werden durch Verhältnisse zwischen den Zahlen a, b und 0 ausgedrückt.]

9. Nehmen Sie an, daß in dem im Text diskutierten Beispiel der Spieler Z über die Karten sx und ry verfüge, und der Spieler S über die Karten bu und rv, wobei x, y, u und v reale Zahlen seien. Nehmen Sie ferner an, daß sie das folgende Matrixspiel spielen:

		Spieler S: $s \cdot u$	Spieler S: $r \cdot v$
Spieler R	$s\,x$	$x - u$	$v - x$
	$r\,y$	$u - y$	$y - v$

a) Zeigen Sie, daß das Spiel dann einen Sattelpunkt hat und fair ist, wenn $x = u$, $v = x$ und $y \geqq x$ ist.
b) Zeigen Sie, daß das Spiel dann einen Sattelpunkt hat und fair ist, wenn $y = v$, $y \leqq x$ und $y \leqq u$ ist.

10. Betrachten Sie ein $2 \cdot 2$ Matrixspiel G mit Sattelpunkt. Nehmen Sie an, u und v seien zwei Werte der Matrix, die jeweils das Minimum ihrer Zeile und das Maximum ihrer Spalte sind. Zeigen Sie, daß dann $u = v$.

2. Spiele ohne Sattelpunkt

Wie wir bei den numerischen Beispielen des letzten Abschnittes sahen, gibt es Matrixspiele, die nicht streng bestimmt sind, d. h. die über keinen Wert verfügen, der gleichzeitig ein Zeilenminimum und ein Spaltenmaximum ist (die also keinen Sattelpunkt haben). Wir können $2 \cdot 2$ Matrixspiele ohne Sattelpunkt wie folgt charakterisieren:

Theorem. Das Matrixspiel

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

hat genau dann keinen Sattelpunkt, wenn eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a < b$, $a < c$, $d < b$ und $d < c$.
(ii) $a > b$, $a > c$, $d > b$ und $d > c$.

(Diese Gleichungen fordern, daß die zwei Werte auf der einen Diagonalen der Matrix jeweils größer sein müssen als jeder der zwei Werte der anderen Diagonale.)

Beweis. Gilt eine der Bedingungen (i) oder (ii), so ist es leicht zu überprüfen, daß kein Wert der Matrix gleichzeitig das Minimum einer Zeile und das Maximum einer Spalte ist. Das Spiel ist daher nicht streng bestimmt. Bitte rufen Sie sich ins Gedächtnis zurück, daß nach Übung 7 des letzten Abschnittes ein Spiel dann streng bestimmt ist, wenn zwei Werte der gleichen Zeile oder der gleichen Spalte von G gleich sind. Wir können also annehmen,

daß keine zwei Werte der gleichen Zeile oder der gleichen Spalte gleich sind. Nehmen Sie nun an, daß $a < b$ ist. Es muß dann $a < c$ sein, da sonst a ein Zeilenminimum und ein Spaltenmaximum wäre. Es muß ferner $c > b$ sein, da sonst c ein Zeilenminimum und ein Spaltenmaximum ist. Des weiteren muß $d < b$ gelten, da sonst d ein Zeilenminimum und ein Spaltenmaximum wäre. Die Annahme $a < b$ führt also zum obigen Fall (i).

Auf ähnliche Weise führt die Annahme $a > b$ zum Fall (ii). Damit wäre das Theorem vollständig bewiesen.

Beispiel 1. Betrachten Sie das Kartenspiel des im letzten Abschnitt genannten Beispiels, und nehmen Sie an, daß der Spieleer Z die Karten s 5 und r 3 habe, während der Spieler S über die Karten s 3 und r 5 verfüge. Die Spielregeln seien die gleichen wie im vorigen Abschnitt. Das entsprechende Matrixspiel ist dann

		Spieler S	
		$s3$	$r5$
Spieler Z	$s5$	2	0
	$r3$	0	2

Dies Spiel hat offensichtlich keinen Sattelpunkt.

Beispiel 2. Betrachten Sie noch einmal das Beispiel 1 aus Abschnitt 2 des dritten Kapitels. Bitte erinnern Sie sich daran, daß Schulze entweder ein 1-DM-Stück oder ein 2-DM-Stück in der Hand hat und daß Müller dieses erhält, wenn er richtig rät. Das Matrixspiel ist dann

		Müller rät	
		1	2
Schulze wählt	2 DM	−1	0
	1 DM	0	−2

Auch dieses Spiel hat keinen Sattelpunkt.

Wie sollten sich nun die Spieler bei einem Spiel ohne Sattelpunkt verhalten? Wir müssen zunächst uns selbst davon überzeugen, daß keine Verhaltensweise für einen der beiden Spieler klar optimal ist. In Beispiel 1 würde Z z. B. gerne 2 gewinnen. Wählt er jedoch s 5 und S merkt das, so kann S r 5 spielen und dadurch eine 0 erreichen. Wählt Z r 3, so kann S s 3 spielen und dadurch wiederum eine 0 erreichen. Findet auf der anderen Seite Z heraus, wie S zu spielen beabsichtigt, so kann Z 2 gewinnen. Wir kommen also zunächst zu dem Ergebnis, daß jeder der Spieler versuchen muß, den anderen daran zu hindern herauszufinden, welche Karte er spielen will.

Wir sehen ferner, daß bei einem einzigen Spielgang solange zwischen den zwei Strategien kein Unterschied besteht, wie der Opponent die Strategie nicht verläßt. Wir wollen nun mehrere Runden des Spiels betrachten. Wie sollte sich dann Z verhalten? Sicherlich sollte er nicht die gleiche Karte bei jedem Durchgang spielen, da sonst S dadurch profitieren kann, daß er voraussagt, was Z tun wird. Z sollte vielmehr manchmal die eine und manchmal die andere Karte spielen. Die Frage, die wir uns zu stellen haben, ist also: „Wie oft sollte Z jede seiner Karten spielen?" Auf Grund der Symmetrie des Problems könnten wir annehmen, daß er beide Karten gleich oft spielen sollte, d. h. die Hälfte der Zeit die eine und die andere Hälfte der Zeit die andere Karte. (Wir werden später sehen, daß dies wirklich optimal ist.) In welcher Reihenfolge sollte dies nun geschehen? Sollte er z. B. die Karten s 5 und r 3 abwechselnd spielen? Dies ist gefährlich, da S bald das System herausfinden könnte und er von diesem Wissen profitieren würde. Wir sehen also, daß Z zwar s 5 die Hälfte der Zeit spielen sollte, dafür jedoch ein schwer erratbares System verwenden sollte. Der einzige sichere Weg, dies durchzuführen, ist, diese Karte die Hälfte der Zeit willkürlich zu spielen. Er könnte z. B. eine Münze werfen (ohne daß es S sehen kann) und stets dann s 5 spielen, wenn die Zahl oben liegt, und r 3 spielen, wenn das Wappen zu sehen ist. Sein Opponent könnte dann seine Entscheidung nicht erraten, da er selbst nicht weiß, wie er sich entscheiden wird. Wir können also schließen, daß es für jeden der Spieler günstig ist, seine Strategien zu mischen und einmal die eine und das andere Mal die andere Karte auszuwählen. Die Strategien sollten dabei willkürlich gemischt werden, wobei gewisse Verhältnisse (Wahrscheinlichkeiten) für die Wahl jeder der Strategien bestehen.

Wir wollen unter einer *gemischten Strategie* des Spielers Z eine Aussage der folgenden Form verstehen: „Spiele mit der Wahrscheinlichkeit von p_1 die Zeile 1 und mit der Wahrscheinlichkeit von p_2 die Zeile 2", wobei wir voraussetzen, daß $p_1 \geqq 0$ und $p_2 \geqq 0$ und $p_1 + p_2 = 1$. Entsprechend wäre eine gemischte Strategie des Spielers S eine Aussage der Form: „Spiele Spalte 1 mit der Wahrscheinlichkeit von q_1 und die Spalte 2 mit der Wahrschneilichkeit von q_2", wobei $q_1 \geqq 0$, $q_2 \geqq 0$ und $q_1 + q_2 = 1$. Ein Vektor einer gemischten Strategie für den Spieler Z ist dann der Zeilenvektor (p_1, p_2) und für den Spieler S der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$.

Beispiele gemischter Strategien sind dann $(1/2, 1/2)$ und $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$. Der Leser wird sich nun wahrscheinlich fragen, wie ein Spieler in Wirklichkeit eine der Strategien durchführen kann; die gemischte Strategie $(1/2, 1/2)$ ist leicht zu realisieren, da es einfach der oben beschriebenen Strategie durch das Werfen einer Münze entspricht. Die gemischte Strategie $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ ist schon schwieriger zu realisieren, da es keinen allgemeingebräuchlichen Zufalls-

apparat gibt, der auf diese Wahrscheinlichkeiten abgestimmt ist. Nehmen Sie jedoch z. B. an, wir stellten uns ein Ziffernblatt her, das zu 4/5 schraffiert und zu 1/5 unschraffiert ist, und befestigten darauf, wie Abb. 3 zeigt, einen einfachen drehbaren Zeiger. Wir könnten dann den Zeiger in Bewegung setzen (ohne es natürlich Z sehen zu lassen) und je nachdem, ob er über dem schraffierten oder dem unschraffierten Feld stehenbleibt, die eine oder andere Strategie wählen. Durch das Variieren des Verhältnisses von schraffierter zu unschraffierter Fläche können ohne Schwierigkeiten andere Strategien realisiert werden. Ein anderes, ebenso brauchbares Hilfsmittel für die Realisierung einer gegebenen, gemischten Strategie ist der Gebrauch einer Tabelle von Zufallszahlen (siehe Tabelle II). Für die Realisierung der Strategie $\binom{1/5}{4/5}$ könnten wir z. B. die Ziffern 0 und 1 für das Spiel der Spalte 1 und die verbleibenden Ziffern für ein Spiel der Spalte 2 auswählen.

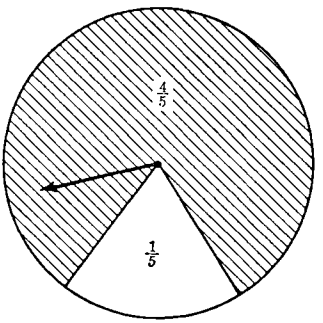


Abb. 3

Betrachten Sie nun das nicht streng determinierte Spiel

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}\,.$$

Wir haben oben festgestellt, daß jeder Spieler bei der Teilnahme an einem Spiel ohne Sattelpunkt gemischte Strategien verwenden sollte. Wir müssen nun noch herausfinden, wie man eine optimal gemischte Strategie bestimmt.

Definition. Es sei G ein nicht streng determiniertes Spiel. Sind nun die folgenden Ungleichungen erfüllt, so heißt wiederum v der Wert des Spieles, $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ und $q^0 = (q_1^0, q_2^0)$ die optimalen Strategien für Z bzw. S:

$$(1) \qquad p^0 G = (p_1^0, p_2^0) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geqq (v, v)$$

$$(2) \qquad G q^0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}.$$

(Sind z und w Vektoren, so bedeutet die Ungleichung $z \geqq w$, daß jede Komponente von z größer oder gleich der entsprechenden Komponente von w ist.) Das Spiel ist dann fair, wenn $v = 0$ ist.

Wählt Z eine gemischte Strategie $p = (p_1, p_2)$ und S (unabhängig davon) eine gemischte Strategie $q = \binom{q_1}{q_2}$ so erhält der Spieler Z die Auszahlung a mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 q_1$ und die Auszahlung b mit der Wahrschein-

lichkeit p_1q_2. Da seine mathematischen Erwartungen (siehe Kapitel 4, Abschnitt 11) durch

$$ap_1q_1 + bp_1q_2 + cp_2q_1 + dp_2q_2 = pGq$$

gegeben sind, erhält er c mit der Wahrscheinlichkeit von p_2q_1 und d mit der Wahrscheinlichkeit p_2q_2. Mit Hilfe einer ähnlichen Rechnung kann man zeigen, daß die Erwartungen des Spielers S das Negative des oben angeführten Ausdruckes sind.

Um nun die oben angeführte Definition der mathematischen Erwartung zu rechtfertigen, müssen wir zeigen, daß dann, wenn v, p^0 und q^0 für G existieren, jeder Spieler sich selbst eine Erwartung von v sichern kann. Es sei nun q irgendeine Strategie von S. Multiplizieren wir die rechte Seite von (1) mit q, so erhalten wir $p^0Gq \geqq (v, v)\, q = v$. Wir sehen also, daß Z sich selbst eine Erwartung von mindestens v sichern kann, unabhängig davon, wie S spielt. Entsprechend sei p ein beliebiger Strategievektor von Z. Multiplizieren wir die rechte Seite von (2) mit p, so erhalten wir $pGq^0 \leqq p \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = v$, woraus wiederum zu ersehen ist, daß S sich eine Erwartung von höchstens v sichern kann, unabhängig davon, was Z spielt. In diesem Sinne sind p^0 und q^0 optimal. Daraus folgt ferner, daß dann, wenn beide Spieler optimal spielen, sowohl die Erwartungen von Z als auch die Erwartungen von S genau v sind (siehe Übung 11). Wir werden daher v den (erwarteten) *Wert* des Spieles nennen. Wir haben nun zu untersuchen, ob die Strategien p^0 und q^0 für das Spiel G existieren. Wir werden das Bestimmen optimaler Strategien für kompliziertere Spiele in Abschnitt 9 diskutieren. Für nicht streng determinierte 2×2 Spiele erreicht man die Lösungen mit Hilfe der folgenden Formeln:

$$p_1^0 = \frac{d - c}{a + d - b - c} \tag{3}$$

$$p_2^0 = \frac{a - b}{a + d - b - c} \tag{4}$$

$$q_1^0 = \frac{d - b}{a + d - b - c} \tag{5}$$

$$q_2^0 = \frac{a - c}{a + d - b - c} \tag{6}$$

$$v = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}. \tag{7}$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die Formeln (3) bis (7) den Bedingungen (1) und (2) genügen (siehe Übung 12). In Wirklichkeit werden die Ungleichungen (1) und (2) in diesem einfachen Fall zu Gleichungen, was jedoch nicht allgemein für nicht streng determinierte Spiele größeren Umfanges gilt.

Die Nenner aller dieser Formeln werden durch die Differenz zwischen den Summen der Werte der zwei Diagonalen gebildet. Da bei nicht streng

bestimmten Spielen die Werte der einen Diagonale größer als diejenigen der anderen Diagonale sein müssen, kann der Nenner nie 0 werden.

Wir wollen nun diese Formeln dazu benutzen, die bereits angeführten Beispiele zu lösen.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Durch einfaches Einsetzen in die obigen Formeln können wir in diesem Fall leicht die Lösung ermitteln. Dabei erhalten wir (1/2, 1/2) als die optimale Strategie für Z und $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ als die optimale Strategie für S. Jeder der beiden Spieler sollte also die Münzwurfstrategie anwenden, um optimale Ergebnisse zu erreichen. Der Wert des Spieles ist $+1$, d. h. es ist günstiger für Z, der einen erwarteten Gewinn von 1 pro Spiel hat.

Beispiel 2 (Fortsetzung). Setzen wir die entsprechenden Werte in die Formeln ein, so erhalten wir (2/3, 1/3) als die optimale Strategie für Z und $\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}$ als die optimale Strategie für S. Der Wert des Spieles ist — 2/3, d. h. Müller wird in dem Spiel begünstigt. Müller sollte also $66^2/_3$ Pf für eine Teilnahme an dem Spiel zahlen, womit die in Kapitel III aufgeworfene Frage beantwortet wäre.

ÜBUNGEN

1. Bestimmen Sie die Werte der folgenden Spiele und die jeweils optimalen Strategien für alle Spieler.

(a)

1	2
3	4

(b)

1	0
—1	2

(c)

2	3
1	4

(d)

15	3
—1	2

(e)

7	—6
5	8

(f)

3	15
—1	10

[Lös.: (a) $v = 3$; $(0, 1)$; $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. (b) $v = \frac{1}{2}$; $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$; $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(d) $v = 3$; $(1, 0)$; $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. (e) $v = \frac{43}{8}$; $(\frac{3}{16}, \frac{13}{16})$; $\begin{pmatrix}\frac{7}{8}\\\frac{1}{8}\end{pmatrix}$.]

2. Stellen Sie das Knobeln mit Hilfe einer Münze als Matrixspiel dar. Bestimmen Sie seinen Wert und die optimalen Strategien. Wie können die optimalen Strategien bei diesem Spiel durch die Teilnehmer realisiert werden?

3. Zwei Personen spielen folgendes Spiel: Jeder der Spieler hält entweder einen oder zwei Finger hoch. Ist die Summe der gezeigten Finger gerade, so erhält der Spieler Z die Summe, ist sie ungerade, so erhält sie der Spieler S.

   a) Zeigen Sie, daß dieses Spiel durch die folgende Spielmatrix dargestellt wird

		Spieler S: 1	Spieler S: 2
Spieler Z	1	2	−3
	2	−3	4

   b) Bestimmen Sie die optimalen Strategien für jeden Spieler und den Wert des Spieles. [Lös.: $(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}; \begin{pmatrix}\frac{7}{12}\\ \frac{5}{12}\end{pmatrix}; v = -\frac{1}{12}$.]

4. Führen Sie Übung 3 noch einmal unter der Annahme durch, daß S die gerade Summe und Z die ungerade Summe erhält.

5. Betrachten Sie das folgende „Kriegsführungs"problem: Einige angreifende Bomber versuchen, eine durch Jäger beschützte Stadt zu bombardieren. Die Bomber können dabei jeden Tag entweder „hoch" oder „niedrig" angreifen, wobei die Bombardierung bei niedrigem Flug genauer wird. Entsprechend können die Jäger jeden Tag die Bomber entweder „hoch" oder „niedrig" suchen. Geben Sie den Bombern jeweils 6 Punkte, wenn es ihnen gelingt, die Jäger zu vermeiden, und 0 Punkte, wenn sie von den Jägern abgefangen werden. Gewähren Sie den Bombern außerdem drei Extrapunkte bei niedrigem Flug für genaues Bombardieren.

   a) Stellen Sie die Spielmatrix auf.
   b) Bestimmen Sie die optimalen Strategien für jeden Spieler.
   c) Geben Sie den Bomber- und Jägerkommandeuren Instruktionen, so daß sie durch Münzwurf entscheiden können, wie sie sich verhalten sollen.

   [Lös.: c) Der Bomberkommandeur sollte eine Münze werfen, um zu entscheiden, ob er hoch oder niedrig fliegt. Der Jägerkommandeur sollte zwei Münzen werfen und dann hoch fliegen, wenn bei beiden Münzen die Zahl vorliegt.]

6. Verallgemeinern Sie das in Übung 5 angeführte Problem, indem Sie den Bombern x Punkte für das Vermeiden der Jäger und y Punkte für das Niedrigfliegen gewähren. (Nehmen Sie an, daß x und y positiv sind.)

   a) Stellen Sie die Matrix auf.
   b) Zeigen Sie, daß das Spiel dann streng determiniert ist, wenn $y \geqq x$ ist, und bestimmen Sie die optimalen Strategien dafür.
   c) Zeigen Sie, daß das Spiel dann keinen Sattelpunkt hat, wenn $y < x$, und bestimmen Sie dann die optimalen Strategien.
   d) Kommentieren Sie diese Ergebnisse mit besonderer Berücksichtigung der Strategien der Bomber.

7. Beweisen Sie, daß das Spiel

$$G = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

   nicht streng determiniert ist und daß es dann und nur dann fair ist, wenn $ad = bc$.

8. Beweisen Sie, daß in den Formeln (3) bis (7) $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $q_1 > 0$ und $q_2 > 0$ ist. Muß v größer als 0 sein?

9. Bestimmen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übung 7 des letzten Abschnittes notwendige und ausreichende Bedingungen dafür, daß das Spiel

$$G = \begin{array}{|c|c|}\hline a & 0 \\ \hline 0 & b \\ \hline \end{array}$$

nicht streng determiniert ist. Bestimmen Sie die optimalen Strategien für jeden der Spieler und den Wert von G, wenn es nicht streng bestimmt ist.

[Lös.: a und b müssen beide positiv oder beide negativ sein.]

$$G = \begin{array}{|c|c|}\hline a & 0 \\ \hline 0 & b \\ \hline \end{array}$$

10. Nehmen Sie an, daß Z über die Karten sx und ry und S über die Karten su und rv verfügt (wobei x, y, u und v positive ganze Zahlen sein sollen). Es soll das folgende Matrixspiel gespielt werden:

	su	rv
sx	xu	$-xv$
ry	$-yu$	yv

Zeigen Sie, daß das Spiel immer ohne Sattelpunkt und fair ist.

11. Zeigen Sie, daß $v = p^0 G q^0$ ist, wenn G, p^0, q^0 und v die in der Definition gegebenen Bedeutungen haben.

12. Zeigen Sie, daß (3) bis (7) den Bedingungen (1) und (2) genügen.

3. Matrixspiele

Wir werden in diesem Abschnitt eine sehr umfangreiche Klasse von Spielen betrachten und sie in verhältnismäßig allgemeiner Form diskutieren. Unsere Spiele sollten nach genau festgelegten Regeln zwischen zwei Spielern gespielt werden. Jeder der Spieler führe gemäß den Spielregeln bestimmte Handlungen aus, und am Ende des Spieles mag der eine Spieler an den anderen eine bestimmte Zahlung zu leisten haben. Die Spiele können dabei oft wiederholt werden. Während eines solchen Spieles mag ein Spieler viele strategische Entscheidungen zu fällen haben. Wir verstehen in diesem

Zusammenhang unter einer (reinen) *Strategie* eines Spielers einen kompletten Satz von Regeln für das Fällen seiner Entscheidungen. Man kann sich eine Strategie auch als einen Satz von Befehlen vorstellen, der in eine Maschine eingegeben wird, so daß die Maschine das Spiel auf genau die gleiche Weise spielt, wie wir es getan hätten. Wir wollen die Strategien des ersten Spielers mit $1, 2, \ldots, m$ und die des zweiten Spielers mit $1, 2, \ldots, n$ bezeichnen. Da sich jeder der Spieler an eine seiner Strategien halten muß, kann das Spiel auf eine von $m \times n$ Weisen fortschreiten, und das Ergebnis ist dann determiniert, wenn jeder der Spieler eine bestimmte Strategie wählt. Auch hier können wir uns wiederum vorstellen, daß wir zwei verschiedene Maschinen mit Hilfe der zwei Strategien steuern und sie ausrechnen lassen, welches Ergebnis sich dabei ergibt. Wir wollen annehmen, daß dann, wenn der erste Spieler die Strategie i und der zweite die Strategie j anwendet, der erste den Betrag g_{ij} gewinnt. Diese Werte g_{ij} wollen wir in einer $m \times n$-Matrix, der Spielmatrix, anordnen. Wir können uns dann das Spiel als aus der Wahl einer Zeile durch den ersten Spieler und einer Spalte durch den zweiten Spieler bestehend vorstellen. Wir sehen also, daß jedes Zwei-Personen-Nullsummenspiel, für das Regeln festgelegt worden sind, als ein Matrixspiel angesehen werden kann.

Anders ausgedrückt kann jede Matrix als ein Spiel betrachtet werden. Eine $m \times n$ Matrix stellt dann ein Spiel mit zwei Teilnehmern dar, wenn der Spieler Z eine der m Zeilen und der Spieler S gleichzeitig eine der n Spalten auswählt. Als Ergebnis des Spieles zahlt S an Z den Betrag, dessen Wert auf dem Schnittpunkt der Zeile und der Spalte zu finden ist. (Wie üblich stellt ein negativer Wert dann eine Zahlung von Z an S dar.)

In einem $m \times n$ Matrixspiel stehen dem Spieler Z m reine Strategien und dem Spieler S n reine Strategien zur Verfügung. Wie wir im letzten Abschnitt sahen, müssen wir zusätzlich die gemischten Strategien der beiden Spieler in Betracht ziehen. Wir wollen dieses Konzept auf $m \times n$ Spiele erweitern.

Definition. Ein m-komponentiger Zeilenvektor p ist dann der Vektor einer gemischten Strategie für Z, wenn er einen Wahrscheinlichkeitsvektor darstellt. Entsprechend stellt dann ein n-komponentiger Spaltenvektor q einen Vektor einer gemischten Strategie für S dar, wenn es sich um einen Wahrscheinlichkeitsvektor handelt. (Bitte rufen Sie sich aus Kapitel V ins Gedächtnis zurück, daß ein Wahrscheinlichkeitsvektor aus nicht-negativen Komponenten besteht, deren Summe 1 ist.) Es seien V und V' die Vektoren

$$V = \underbrace{(v, v, \ldots, v)}_{m \text{ Komponenten}} \quad \text{und} \quad V' = \left.\begin{pmatrix} v \\ v \\ \cdot \\ \cdot \\ v \end{pmatrix}\right\} n \text{ Komponenten}$$

wobei v eine gegebene Zahl ist. Es sind dann und nur dann v der *Wert des Spieles* und p^0 und q^0 die *optimalen Strategien* der Spieler, wenn die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$p^0 G \geqq V$$
$$Gq^0 \leqq V'.$$

In den Abschnitten 1 und 2 finden Sie einige Beispiele solcher Matrixbeispiele zusammen mit ihren Lösungen. Bis jetzt haben wir noch *nicht* bewiesen, daß für ein beliebiges Matrixspiel ein Wert und optimale Strategien für jeden der Spieler bestehen. Diese Frage soll im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

Theorem. Ist G ein Matrixspiel, für das ein Wert und optimale Strategien existieren, dann ist der Wert des Spieles eindeutig.

Beweis. Nehmen Sie an, v und w seien zwei verschiedene Werte des Spieles G. Es seien nun V und W die beiden m-komponentigen Zeilenvektoren $V = (v, v, \ldots, v)$ und $W = (w, w, \ldots, w)$ und V' und W' die n-komponentigen Spaltenvektoren

$$V' = \begin{pmatrix} v \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v \\ v \end{pmatrix} \text{ und } W' = \begin{pmatrix} w \\ w \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w \end{pmatrix},$$

p^0 und q^0 seien dann die optimalen gemischten Strategievektoren mit dem zugeordneten Wert v, für die

(a) $$p^0 G \geqq V$$
(b) $$Gq^0 \leqq V'$$

gilt.

Entsprechend seien p^1 und q^1 die Vektoren der optimal gemischten Strategien mit dem zugeordneten Wert w, für die gilt

(c) $$p_1 G \geqq W$$
(d) $$Gq_1 \leqq W'.$$

Multiplizieren wir nun die rechte Seite von (a) mit q^1, so erhalten wir $p^0 G q^1 \geqq V q^1 = v$. Durch die Multiplikation der linken Seite von (d) mit p^0 erhalten wir $p^0 G q^1 \leqq w$. Aus den beiden soeben erhaltenen Ungleichungen erhalten wir $w \geqq v$.

Als Nächstes multiplizieren wir die linke Seite von (b) mit p^1und die rechte Seite von (c) mit q^0 und erhalten $v \geqq p^1 G q^0$ und $p^1 G q^0 \geqq w$, was wiederum $v \geqq w$ impliziert.

Da $v \leqq w$ und $v \geqq w$ zusammen $v = w$ impliziert, kommen wir zu dem Ergebnis, daß der Wert des Spieles eindeutig ist.

Theorem. Ist G ein Matrixspiel mit dem Wert v und den optimalen Strategien p^0 und q^0, dann ist $v = p^0Gq^0$.

Beweis. Gemäß Definition genügen v, p^0 und q^0 den Ungleichungen

$$p^0G \geqq V \text{ und } Gq^0 \leqq V'.$$

Multiplizieren wir die rechte Seite der ersten Ungleichung mit q^0 und die linke Seite der zweiten Ungleichung mit p^0, so erhalten wir $p^0Gq^0 \geqq v$ bzw. $p^0Gq^0 \leqq v$. Daraus ergibt sich jedoch, daß $v = p^0Gq^0$ ist, was zu beweisen war.

Die gerade bewiesenen Theoreme sind wichtig, da sie uns erlauben, den *Wert* eines Spieles als einen *Erwartungswert* (siehe Kapitel IV, Abschnitt 11) zu interpretieren. Kurz gesagt ergibt sich die folgende Interpretation: Wird das Spiel G oft wiederholt, und benutzt der Spieler Z jedesmal die gemischte Strategie p^0 und der Spieler S die gemischte Strategie q^0, so ist v der erwartete Wert des Spieles G für Z. Nach dem Gesetz der großen Zahl nähert sich dann der durchschnittliche Wert der Gewinne Z's beliebig nahe dem Wert v des Spieles G an (mit hoher Wahrscheinlichkeit), wenn die Anzahl der Wiederholungen des Spieles G hinreichend groß ist.

Wir wollen als ein Beispiel das folgende Matrixspiel G nehmen:

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Wie wir in Übung 2 des letzten Abschnittes feststellten, ist bei diesem Spiel für Z die optimale Strategie, jede der Zeilen mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 zu wählen, und für S, jede der Spalten mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 zu wählen. Der Wert von G ist 0. Bitte beachten Sie, daß die zwei einzigen Auszahlungen, die bei einem einzelnen Durchgang des Spieles auftreten können, $+1$ und -1 sind, d. h. keine von ihnen entspricht dem Wert des Spieles. Erst wenn das Spiel des öfteren wiederholt wird, nähert sich der Durchschnittswert der Auszahlungen, die Z erhält, dem Wert des Spieles, nämlich 0.

Theorem. Bei einem Spiel mit dem Wert v und den optimalen Strategien p^0 und q^0 ist v die höchste Erwartung, die Z sich sichern kann. Desgleichen ist v die kleinste Erwartung, die S sich sichern kann.

Beweis. Es sei p der Vektor einer beliebigen gemischten Strategie von Z und q^0 eine optimale Strategie von S. Multiplizieren wir nun die linke Seite der Ungleichung $Gq^0 \leqq V'$ mit p, so erhalten wir $pGq^0 \leqq v$. Aus der letzten Ungleichung ist nun zu ersehen, daß dann, wenn S optimal spielt, das höchste, was sich Z sichern kann, v ist. Ist nun p^0 optimal für Z, so ist für

jedes q $p^0Gq \geqq v$, so daß Z sich eine Erwartung von v sichern kann. Ähnlich ist der Beweis der anderen Aussage des Theorems.

Das obige Theorem gibt eine gefühlsmäßige Rechtfertigung der Definition des Wertes und der optimalen Strategien eines Spieles. So ist der Wert das „Beste", was ein Spieler erreichen kann, und die optimalen Strategien sind die Mittel, sich dieses „Beste" zu sichern.

Definition. Ein Matrixspiel G hat dann einen Sattelpunkt, wenn es einen Wert g_{ij} gibt, der gleichzeitig das Minimum der i-ten Zeile und das Maximum der j-ten Spalte ist. (Durch entsprechende Abordnung und Bezifferung der Zeilen und Spalten eines streng determinierten Matrixspieles G können wir erreichen, daß g_{11} der Wert ist, der gleichzeitig Minimum der Zeile 1 und Maximum der Spalte 1 ist.)

Theorem. Ist G ein streng determiniertes Matrixspiel, das wie in der Definition angegeben geordnet ist, so ist der Wert des Spieles $v = g_{11}$. Darüber hinaus sind die optimalen Strategien für die Spieler

$$p^0 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \text{ und } q^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Diese optimalen Strategien besagen lediglich, daß Z die Zeile wählen sollte, die den Wert g_{11} (erste Zeile) enthält, und S die Spalte, die den Wert g_{11} (erste Spalte) enthält. Vergleichen Sie diese optimalen Strategien mit denen in Abschnitt 1 für streng determinierte $2 \cdot 2$ Spiele gefundenen.)

Beweis. Nehmen Sie an, G sei ein streng determiniertes Spiel, dessen Zeilen und Spalten so angeordnet und numeriert sind, daß g_{11} das Minimum der Zeile 1 und das Maximum der Spalte 1 ist. Wir setzen dann $v = g_{11}$ und nennen die im Theorem definierten Strategien p^0 und q^0. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} p^0G &= (g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{1n}) \\ &\geqq (g_{11}, g_{11}, \ldots, g_{11}) = V, \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache benutzen, daß g_{11} das Minimum der ersten Zeile ist. Benutzen wir entsprechend die Tatsache, daß g_{11} das Maximum der ersten Spalte ist, so erhalten wir

$$Gq^0 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{m1} \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{11} \end{pmatrix} = V'.$$

Aus diesen zwei Ungleichungen und der oben gegebenen Definition eines Matrixspieles schließen wir, daß v der Wert des Spieles und p^0 und q^0 dessen optimale Strategien sind.

Theorem. Sind g_{11} und g_{ij} zwei Komponenten von G, die gleichzeitig das Minimum ihrer Zeilen und das Maximum ihrer Spalten sind, so ist $v = g_{11} = g_{1j} = g_{i1} = g_{ij}$.

Beweis. Ausgehend von der Tatsache, daß g_{11} und g_{ij} die Minima ihrer Zeilen und die Maxima ihrer Spalten sind, erhalten wir

$$g_{ij} \geqq g_{1j} \geqq g_{11}, \qquad g_{ij} \leqq g_{i1} \leqq g_{11}.$$

(Diese Ungleichungen sind zwar überflüssig, jedoch immer noch gültig, wenn $i = 1$ oder $j = 1$ ist.) Diese beiden Ungleichungen implizieren, daß $g_{ij} = g_{1j} = g_{i1} = g_{11} = v$ ist, und vervollständigen damit den Beweis des Theorems.

Beispiel 1. Obwohl wir bewiesen haben, daß der Wert eines Spieles eindeutig ist, kann es durchaus vorkommen, daß ein Spiel mehr als ein Paar optimaler Strategien besitzt. Es sei z. B. G das Spiel

$$G = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 1 & 7 \\ \hline -2 & 8 & 0 & -9 \\ \hline 1 & 12 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Wir sehen, daß G streng determiniert ist, den Wert 1 besitzt und die optimalen Strategien (1,0,0) und (0,0,1) für den Spieler Z und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für den Spieler S sind. Das nächste Theorem wird uns zeigen, daß daneben für dieses Spiel noch andere optimale Strategien existieren.

Theorem. Sind p^0 und p^1 zwei optimale Strategien für Z, so ist auch die Strategie

$$p = ap^0 + (1 - a)p^1$$

eine optimale Strategie für Z, wenn a der Bedingung $0 \leqq a \leqq 1$ genügt. Sind q^0 und q^1 optimale Strategien von S, so ist auch die Strategie

$$q = aq^0 + (1 - a)q^1$$

eine optimale Strategie für S, wenn a der Bedingung $0 \leqq a \leqq 1$ genügt.

Beweis. Wir wollen hier nur die erste Aussage beweisen und den Beweis der zweiten im Rahmen einer Übung durchführen (siehe Übung 3). Es ist

leicht zu zeigen, daß p ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist. Nach unserer Hypothese sind $p^0G \geqq V$ und $p^1G \geqq V$. Wir sehen also, daß

$$\begin{aligned} pG &= [ap^0 + (1-a)p^1]G \\ &= ap^0G + (1-a)p^1G \\ &\geqq aV + (1-a)V = V. \end{aligned}$$

Danach ist p auch eine optimale Strategie, was den Beweis des Theorems vervollständigt.

Dieses Theorem impliziert, daß im Beispiel 1 die Strategien der Form $a(1,0,0) + (1-a)(0,0,1) = (a,0,1-a)$ optimal für Z sind. Es ist leicht zu überprüfen, daß (1/2,0,1/2) und (1/4,0,3/4) optimal sind und dieser Form entsprechen.

ÜBUNGEN

1. Bestimmen Sie den Wert und alle optimalen Strategien der folgenden Spiele

(a)

15	2	−3
6	5	7
−7	4	0

[Lös.: $v = 5$; $(0, 1, 0)$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.]

(b)

5	2	−1	−1
1	1	0	1
3	0	−3	7

(c)

0	5	6	−3
1	−1	2	3
1	2	3	4
−1	0	7	5

2. Bestimmen Sie den Wert und alle optimalen Strategien für die folgenden Spiele

(a)

5	10	6	5
5	7	8	5
0	5	6	5

(b)

−2	0	−1
−5	7	8

(c)

0	0	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0

(d)

3	2	3
6	2	7
5	1	4

[Lös.: (a) $v = 5$; $(a, 1 - a, 0)$; $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (d) $v = 2$; $(a, 1 - a, 0)$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.]

3. Zeigen Sie, daß die Strategie

$$q = aq^0 + (1 - a)q^1$$

auch eine optimale Strategie des Spieles G ist, wenn q^0 und q^1 optimale Strategien für S sind und a eine Konstante $0 \leqq a \leqq 1$ ist.

4. Zeigen Sie, daß die Strategien $p^0 = (1/3, 1/3, 1/3)$ und

$$q^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

optimal für das folgende Matrixspiel sind

$$G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Wie groß ist der Wert des Spieles?

5. Verallgemeinern Sie das Ergebnis der Übung 4 auf Spiele G, deren Matrix die $n \times n$ Einsmatrix ist.

6. Nehmen Sie an, der Spieler Z versuche, S in einer der drei Städte X, Y oder W zu finden. Die Entfernung zwischen X und Y betrage 5 km, die Entfernung zwischen Y und W 5 km und die Entfernung zwischen W und X 10 km. Nehmen Sie weiterhin an, daß Z und S lediglich in eine der drei Städte gehen können und daß dann, wenn sie beide in die gleiche Stadt gehen, Z S „fängt" und andernfalls S „entflieht". Geben Sie Z 10 Punkte, wenn er S fängt und S die Anzahl von Punkten, die gleich der Anzahl der km ist, die er von Z entfernt ist, wenn er entflieht.
   a) Stellen Sie die Spielmatrix auf.
   b) Zeigen Sie, daß für beide Spieler die gleiche optimale Strategie gilt, nämlich in die Städte X und W mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten und in die Stadt Y mit der Wahrscheinlichkeit von 1/4 zu gehen.
   c) Bestimmen Wie den Wert des Spieles.

7. Zwei Personen spielen das folgende Spiel: Jeder der Spieler zeigt zwischen einem und fünf Fingern, und die Summe der gezeigten Finger wird durch 3 dividiert. Ist die Summe genau durch 3 teilbar, so findet keine Auszahlung statt. Entsteht ein Rest von 1, so gewinnt der Spieler Z die Summe, die gleich der Anzahl der Finger ist, und bleibt ein Rest von 2, so gewinnt der Spieler S.

a) Stellen Sie die Spielmatrix auf. [Hinw.: Es ist eine 5×5 Matrix.]
b) Zeigen Sie, daß die optimale Strategie für jeden der Spieler ist, einen oder fünf Finger mit der Wahrscheinlichkeit von 1/9, zwei oder vier Finger mit der Wahrscheinlichkeit von 2/9 und drei Finger mit der Wahrscheinlichkeit von 1/3 zu zeigen.
c) Ist das Spiel fair? [Lös.: Ja]

8. Betrachten Sie das folgende Spiel:

$$G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & c \\ \hline \end{array} .$$

a) Zeigen Sie ,daß das Spiel dann einen Sattenpunkt und den Wert 0 hat, wenn a, b und c nicht alle das gleiche Vorzeichen haben.
b) Zeigen Sie, daß der Vektor

$$\left(\frac{bc}{ab+bc+ca}, \frac{ca}{ab+bc+ca}, \frac{ab}{ab+bc+ca}\right)$$

dann eine optimale Strategie für den Spieler Z ist, wenn a, b und c alle das gleiche Vorzeichen haben.
c) Bestimmen Sie für den Fall b) die optimale Strategie für Spieler S.
d) Bestimmen Sie für das Spiel des Falles b) den Wert, und zeigen Sie, daß er positiv ist, wenn a, b und c alle positiv sind, und negativ, wenn sie alle negativ sind.

9. Zwei Personen wollen das folgende Spiel spielen: Der erste Spieler zeigt einen, zwei oder vier Finger. Zur gleichen Zeit zeigt der zweite Spieler zwei, drei oder fünf Finger. Ist die Summe der gezeigten Finger 3, 5 oder 9, so erhält der erste Spieler die Summe. Im anderen Fall wird keine Zahlung geleistet.
a) Stellen Sie die Spielmatrix auf.
b) Lösen Sie das Spiel unter Benutzung der Ergebnisse der Übung 8.
c) Wieviel sollte der erste Spieler bereit sein zu zahlen, um dieses Spiel zu spielen? [Lös.: 45/29.]

10. Betrachten Sie das (symmetrische) Spiel, dessen Matrix

$$G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -a & -b \\ \hline a & 0 & -c \\ \hline b & c & 0 \\ \hline \end{array}$$

ist.

a) Zeigen Sie, daß G dann einen Sattelpunkt hat, wenn entweder a und b positiv oder beide negativ sind.
b) Zeigen Sie, daß G dann einen Sattelpunkt hat, wenn entweder b und c positiv oder beide negativ sind.
c) Zeigen Sie, daß dann

$$\left(\frac{c}{a-b+c}, \frac{-b}{a-b+c}, \frac{a}{a-b+c}\right)$$

eine optimale Strategie für den Spieler Z ist, wenn $a > 0$, $b < 0$ und $c > 0$ ist.

d) Bestimmen Sie in c) eine optimale Strategie für Spieler S.
e) Zeigen Sie, daß dann die in c) gegebene Strategie optimal für Z ist, wenn $a < 0$, $b > 0$ und $c < 0$ ist. Welche Strategie ist optimal für Spieler S?
f) Beweisen Sie, daß der Wert des Spieles immer 0 ist.

11. Bei einem bekannten Kinderspiel sagt jeder Spieler entweder „Stein" oder „Schere" oder „Papier". Sagt der eine „Stein" und der andere „Schere", so gewinnt der erste einen Pfennig. Entsprechend siegt „Schere" über „Papier" und „Papier" über „Stein". Sagen beide Spieler das gleiche, so ist das Spiel unentschieden.
a) Stellen Sie die Spielmatrix auf.
d) Lösen Sie das Spiel unter Benutzung der Ergebnisse von Übung 10.

12. Lassen Sie uns in Übung 11 annehmen, daß die zu leistenden Zahlungen sich in den einzelnen Fällen unterscheiden. Nehmen Sie an, daß dann, wenn „Der Stein die Schere schleift" die Zahlung 1 Pf betrage. „Schneidet die Schere das Papier", so betrage die Zahlung 2 Pf, und „Bedeckt Papier den Stein", so betrage die Zahlung 3 Pf.
a) Stellen Sie die Spielmatrix auf.
b) Lösen Sie das Spiel unter Benutzung der Ergebnisse der Übung 10.
[Lös.: 1/3 „Stein"; 1/2 „Schere"; 1/6 „Papier"; $v = 0$.]

4. Weiteres über Matrixspiele: Das grundlegende Theorem

Wir wollen nun mit der Diskussion der grundlegenden Eigenschaften von Matrixspielen fortfahren. Wir werden zunächst zeigen, was geschieht, wenn jede Komponente der Matrix mit einer nicht negativen Konstanten multipliziert wird oder die gleiche Konstante zu jeder Komponenten der Matrix addiert wird. Danach werden wir das grundlegende Existenztheorem der Matrixspiele besprechen.

Theorem. Es sei k eine nicht negative Zahl, d. h. $k \geqq 0$, und G ein Matrixspiel mit dem Wert v. Das Spiel $k \cdot G$ ist dann ein Matrixspiel mit dem Wert $k \cdot v$, und jede Strategie, die optimal für G ist, ist es auch für $k \cdot G$. (Bitte erinnern Sie sich daran, daß die Matrix $k \cdot G$ dadurch aus der Matrix G gewonnen wird, daß man jede Komponente von G mit der Zahl k multipliziert.)

Beweis. Es sei p^0 eine optimale Strategie für Z im Spiel G, d. h. $p^0 G \geqq V$. Es gilt dann

$$p^0(kG) = k(p^0 G) \geqq kV.$$

Entsprechend gilt dann, wenn q^0 optimal für S im Spiele G ist

$$(kG)q^0 = k(Gq^0) \leqq kV'.$$

Diese beiden Ungleichungen zeigen, daß kv der Wert von $k \cdot G$ ist und daß optimale Strategien von G gleichfalls für das Spiel kG optimal sind.

Wir wollen noch einmal darauf hinweisen, daß es für den Beweis dieses Theorems wichtig war, daß k nicht-negativ ist, da bei der Multiplikation

einer Ungleichung mit einer negativen Zahl die Richtung des Ungleichheitszeichens umgekehrt wird. Wir werden am nächsten Beispiel sehen, daß das obige Theorem für negative k nicht gilt.

Beispiel 1. Es sei $k = -1$ und

$$G = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad (-1)G = \begin{array}{|c|c|}\hline -2 & -3 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Beachten Sie, daß jedes dieser Spiele einen Sattelpunkt hat, daß jedoch der Wert des ersten 2 und der Wert des zweiten Spieles 0 ist. (Das entspricht nicht $(-1)2 = -2$.) Darüber hinaus sind für G die optimalen Strategien für Z, die erste Zeile mit der Wahrscheinlichkeit 1 und für S die erste Spalte mit der Wahrscheinlichkeit 1 zu spielen. Keine dieser Strategien ist jedoch optimal für das Spiel $(-1)G$.

Theorem. Es sei G ein $m \cdot n$ Matrixspiel mit dem Wert v. Es sei in diesem Fall die $m \cdot n$ Matrix, deren Komponenten alle 1 sind, und k sei eine beliebige Konstante. Das Spiel $G + kE$ hat dann den Wert $v + k$, und jede Strategie, die für das Spiel G optimal ist, ist dies auch für das Spiel $G + kE$. (Wir erhalten das Spiel $G + kE$ aus dem Spiel G, indem wir den Wert k zu jeder der Komponenten von G addieren.)

Beweis. Es seien p^0 und q^0 optimale Strategien für G. Es ist dann $p^0G \geqq V$ und $Gq^0 \leqq V'$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} p^0(G + kE) &= p^0G + p^0(kE) \\ &= p^0G + k(p^0E) \\ &\geqq (v, v, \ldots, v) - (k, k, \ldots, k) \\ &= (v + k, v + k, \ldots, v + k). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} (G + kE)q^0 &= Gq^0 + k(Eq^0) \\ &\leqq \begin{pmatrix} v \\ v \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + k \\ v + k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v + k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen zeigen, daß der Wert des Spieles $G + kE$ gleich $v + k$ ist und daß jede der Strategien, die für G optimal ist, dies auch für $G + kE$ ist.

Die Theorie der Matrixspiele wäre dann nicht von so großem Interesse, wenn wir nicht wüßten, unter welchen Bedingungen ein solches Spiel eine Lösung hat. Das grundlegende Theorem der Spieltheorie ist, daß jedes Matrixspiel über eine Lösung verfügt.

Grundlegendes Theorem. Es sei G ein beliebiges $m \cdot n$ Matrixspiel. Es existiert dann ein Wert v für G und optimale Strategien p^0 für Spieler Z

und q^0 für Spieler S. Mit anderen Worten, für jedes Matrixspiel existiert eine Lösung.

Beweis für 2×2 Matrizen: Für streng determinierte G fanden wir den Wert und die optimalen Strategien in Abschnitt 1. Hat G keinen Sattelpunkt, so erhalten wir die optimalen Strategien und den Wert mit Hilfe der Formeln (3) bis (7) des Abschnittes 2. Da G entweder streng determiniert sein muß oder nicht, erfassen wir damit alle möglichen Fälle. Wir werden in Abschnitt 9 einen Beweis dieses allgemeinen Theorems auf der Grundlage des Dualitätstheorems der linearen Programmierung diskutieren.

ÜBUNGEN

1. Bestimmen Sie für jedes der Spiele G, dessen Matrizen in Übung 1 des Abschnittes 3 gegeben sind, die Werte kG und $G + kE$, wenn k die Werte 3,0 und -2 annimmt.
2. Bestimmen Sie alle optimalen Strategien für jeden Spieler des Spieles kG, wenn G ein beliebiges Matrixspiel und $k = 0$ ist. [Lös.: Jede Strategie ist optimal.]
3. Zeigen Sie, daß jede Strategie, die in kG optimal ist, dies auch für G ist, wenn G ein beliebiges Matrixspiel und $k > 0$ ist. [Lös.: Multipliziere mit $1/k$.]
4. Zeigen Sie, daß jede Strategie, die für das Spiel $G + kE$ optimal ist, dies auch für G ist, wenn G ein beliebiges Matrixspiel und k eine beliebige Konstante ist.
5. Nehmen Sie an, der Spieler S zahle dem Spieler Z vor Beginn des Matrixspieles G eine Summe von k DM. Wir wollen in diesem Falle sagen, S habe an Z eine Zusatzzahlung von k geleistet. (Ist k negativ, dann handelt es sich wie gewöhnlich um eine Zusatzzahlung von Z an S.)
   a) Zeigen Sie, daß es sich in Wirklichkeit um das Spiel $G + kE$ handelt, wenn S vor Beginn des Spieles G an Z eine Zusatzzahlung von k geleistet hat.
   b) Bestimmen Sie den Wert $G - vE$, wenn v der Wert des Spieles G ist.
   c) Zeigen Sie unter Benutzung der Ergebnisse von a) und b), daß jedes Matrixspiel G mit dem Wert v dadurch in ein faires Matrixspiel überführt werden kann, daß S an Z vor Beginn des Spieles G eine Zusatzzahlung von $-v$ leistet.
6. Zeigen Sie, daß jedes Matrixspiel G in ein faires Matrixspiel, dessen Komponenten zwischen -1 und 1 liegen, dadurch überführt werden kann, daß man jeder Komponente die gleiche Zahl hinzufügt und jede Komponente mit einer positiven Zahl multipliziert.
7. Zeigen Sie, daß die optimalen Strategien der Spieler durch die in Übung 6 vorgeschlagene Transformation nicht berührt werden. Wie ändert sich der Wert des Spieles?
8. Betrachten Sie das Matrixspiel

a	b	b
b	a	b
b	b	a

mit $a > b$.

a) Zeigen Sie, daß man dies dadurch aus der Einheitsmatrix gewinnen kann, daß man sie mit einer passenden Zahl multipliziert und dann bE addiert.
b) Lösen Sie das Spiel unter Benutzung der Ergebnisse der Übung 4, Abschnitt 6. [Lös.: $v = a/3 + 2b/3$.]

9. Nehmen Sie an, die Komponenten eines Matrixspieles würden in anderen Einheiten ausgedrückt. (Z. B. DM statt Pf.) Zeigen Sie, daß dadurch der monetäre Wert des Spieles nicht geändert wird.

10. Betrachten Sie das folgende Matrixspiel

1	−1
−1	1

.

Wären Sie gewillt, das Spiel wenigstens einmal zu spielen, wenn die Werte der Matrix Gewinne bzw. Verluste eines Pfennigs bedeuteten? Wären Sie bereit, das Spiel wenigstens einmal zu spielen, wenn die Werte Gewinne oder Verluste eines Dollars darstellten? Wären Sie bereit, es wenigstens einmal zu spielen, wenn die Gewinne bzw. Verluste jeweils 1 Million DM darstellen? Zeigen Sie für jeden dieser Fälle, daß der Wert des Spieles 0 und die optimalen Strategien gleich sind. Diskutieren Sie die praktische Anwendung der Theorie der Spiele im Lichte dieses Beispieles.

5. Zwei-Zeilen- und Zwei-Spalten-Matrixspiele

Die einfachsten Matrixspiele nach den 2×2 Spielen sind die $2 \times n$ und $m \times 2$ Spiele, d. h. diejenigen, bei denen ein Spieler lediglich über zwei Strategien verfügt. Wir wollen hier die Lösung solcher Spiele diskutieren.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, Müller bedecke mit seiner Hand einen der folgenden vier Geldscheine: Eine Ein- oder Zwei-U.S.-Dollar-Note oder eine Ein- oder Zwei-Kanadische-Dollar-Note. Schulze rate dann entweder „Vereinigte Staaten" oder „Kanada" und erhalte den Geldschein, wenn er richtig geraten hat. Wir wollen annehmen, daß ein kanadischer Dollar den gleichen Wert wie ein amerikanischer Dollar habe. Es ergibt sich dann die folgende Spielmatrix:

			Schulze rät: U.S.	Schulze rät: Can.
Müller wählt	U.S.	\$1	−1	0
		\$2	−2	0
	Can.	\$1	0	−1
		\$2	0	−2

Es ist offensichtlich, daß Müller immer die 1-Dollar-Note des jeweiligen Landes der 2-Dollar-Note vorziehen wird, da er dadurch seinen Verlust verkleinern kann. Wir können dies aus der obigen Matrix ersehen, denn jeder Wert der zweiten Zeile ist kleiner oder gleich dem entsprechenden Wert der ersten Zeile, und jeder Wert der vierten Zeile ist kleiner oder gleich dem entsprechenden Wert der dritten Zeile. An und für sich können wir die zweite und vierte Zeile eliminieren und damit das Spiel auf das folgende $2 \cdot 2$ Matrixspiel reduzieren:

		Schulze rät U.S.	Schulze rät Can.
Müller wählt	U.S. \$1	—1	0
	Can. \$1	0	—1

Das neue Matrixspiel hat keinen Sattelpunkt und die optimalen Strategien (1/2, 1/2) für Müller und $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ für Schulze. Der Wert des Spieles ist —1/2, d. h. Schulze sollte 50 Cent bieten, um es zu spielen.

Definition. Es sei A ein $m \cdot n$ Matrixspiel. Wir werden dann davon sprechen, daß die Zeile i über die Zeile h *dominiert*, wenn jeder ihrer Werte so groß oder größer ist als der entsprechende Wert der Zeile h. Entsprechend dominiert dann die Spalte j über die Spalte k, wenn jeder Wert der Spalte j so klein oder kleiner als der entsprechende Wert der Spalte k ist.

Jede Zeile oder Spalte, die von einer anderen dominiert wird, kann aus einem Matrixspiel ausgelassen werden, ohne seine Lösung dadurch zu beeinflussen. So sehen wir z. B. in der ursprünglichen Matrix des Beispieles 1, daß die Zeile 1 über die Zeile 2 und die Zeile 3 über die Zeile 4 dominiert.

Beispiel 2. Betrachten Sie noch einmal das Kartenspiel des Abschnittes 4 und geben Sie dieses Mal Z die Karten $s\,5$ und $r\,3$, während S die Karten $s\,6$, $s\,5$, $r\,4$ und $r\,5$ erhält. Die Matrix des Spieles ist dann

	$s6$	$s5$	$r4$	$r5$
$s5$	1	0	—1	0
$r3$	—3	—2	1	2

.

Beachten Sie, daß die Spalte 2 (und Spalte 3) über die Spalte 4 dominiert, d. h. der Spieler S sollte nie $r\,5$ spielen. Unser Spiel kann daher auf das folgende 2×3 Spiel reduziert werden:

	$s6$	$s5$	$r4$
$s5$	1	0	—1
$r3$	—3	—2	1

.

Da keine weitere Zeile oder Spalte gestrichen werden kann, müssen wir eine neue Technik für die Lösung dieses Spieles einführen.
Es kann gezeigt werden, daß (obwohl wir das hier nicht versuchen wollen) in jedem $2 \times n$ Spiel der Spaltenspieler S über eine optimale, gemischte Strategie verfügt, die nur aus zwei reinen Strategien besteht. Er kann also zwei Spalten der Spielmatrix auf einmal betrachten und die 2×2 Matrix auswählen, die ihm am sympathischsten ist, d. h. er löst jedes der 2×2 Spiele, die aus zwei Spalten der obigen Matrix bestehen, und wählt dann das aus, das den kleinsten Wert besitzt.
Aus dem obigen 2×3 Spiel können wir drei Spiele ableiten:

	$s6$	$s5$
$s5$	1	0
$r3$	−3	−2

	$s6$	$r4$
$s5$	1	−1
$r3$	−3	1

	$s5$	$r4$
$s5$	0	−1
$r3$	−2	1

Das erste Spiel ist fair, das zweite hat den Wert −1/3 und das dritte den Wert −1/2. Der Spieler S wird also das dritte Spiel wählen, d. h. er wird sich dafür entscheiden, nur die Strategien $s\,5$ und $r\,4$ zu verwenden. Die optimale Strategie für das gegebene Spiel ist also, jede der Karten die Hälfte der Zeit zu spielen, so daß seine Strategie für das 2×4 Spiel

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

sein sollte.
Da Z weiß, daß S dieses 2×2 Spiel auswählen wird, ist die optimale Strategie von Z in diesem 2×2 Spiel (3/4, 1/4).

Beispiel 3. Ein numerisches Beispiel eines 3×2 Spieles ist

6	−1
0	4
4	3

.

Da in diesem Spiel keine der Zeilen oder Spalten dominiert, suchen wir nach den drei möglichen ableitbaren Spielen. Dasjenige, das den größten Wert besitzt, ist das aus den zwei letzten Zeilen bestehende Spiel. Sein Wert ist 16/5, und die optimalen Strategien des ursprünglichen Spieles sind (0, 1/5, 4/5) und $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ für Z bzw. S.

Beispiel 4. Ein anderes numerisches Beispiel ist

1	−1	2	−3
−1	1	0	1

.

Hier dominiert die vierte Spalte über die zweite und die erste über die dritte. Das Spiel kann also reduziert werden auf

1	—3
—1	1

.

Der Wert dieses Spieles ist —1/3, und die optimalen Strategien sind $p^0 = (1/3, 2/3)$ und $q^0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. Die letzte Strategie kann dabei erweitert werden auf die Strategie

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

die für das ursprüngliche Spiel optimal ist.

ÜBUNGEN

1. Lösen Sie die folgenden Spiele:

(a)

3	0
—2	3
7	5

[Lös.: $v = 5$; $(0, 0, 1)$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.]

(b)

10	5	4	6
18	3	3	4

(c)

1	0	2
0	3	2

[lös. $v = \frac{3}{4}$; $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$; $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$.]

(d)

0	2
1	3
—1	0
2	0

(e)

1	2	3
4	2	1

[Eine Lös.: $v = 2$; $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.]

(f)

1	0	1	1	2
0	−1	−2	−3	−10

2. Lösen Sie die folgenden Spiele:

(a)

0	15
8	0
−10	20
10	12

(b)

−1	−2	0	−3	−4
−2	1	0	2	5

(c)

−1	5	−1	−2	8	10
3	−6	0	8	−9	−8

[Eine Lös.: $v = -\frac{1}{2}$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{12} \\ \frac{11}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.]

3. Lösen Sie das Spiel

1	2	3
3	2	1

.

Da mehr als eine optimale Strategie für S besteht, bestimmen Sie für ihn eine Anzahl optimaler Strategien (siehe Abschnitt 3, Übung 3).

4. Nehmen Sie in dem Kartenspiel des Beispieles 2 an, daß Z über die Karten s 9, s 5 und r 7 und r 3 verfüge, während S die Karten s 8 und r 4 besitze. Stellen Sie das entsprechende Matrixspiel auf und lösen Sie es.
[Lös.: $v = 1$, Z spielt mit der Wahrscheinlichkeit von je 1/2 die Karten r 5 und r 7, S spielt jede seiner Karten mit der Wahrscheinlichkeit 1/2.]

5. Nehmen Sie an, Müller verdecke mit seiner Hand 1, 2, 3 oder 4 DM, und Schulze rate „gerade" oder „ungerade". Rät Schulze richtig, so gewinne er den von Müller verdeckten Betrag, andernfalls müsse er an Müller zahlen. Stellen Sie die entspre-

chende Spielmatrix auf und bestimmen Sie eine optimale Strategie für jeden der Spieler. Ist das Spiel fair?

6. Betrachten Sie das folgende Spiel: Der Spieler Z kündige „eins" oder „zwei" an. Danach schreibe jeder von ihnen eine dieser Zahlen auf. Ist die Summe der so erhaltenen Zahlen ungerade, so zahle S an Z die ungerade Summe in Dollar. Ist die Summe der drei Zahlen gerade, so zahle Z an S die Summe.
   a) Welche Strategien hat Z? [Hinw. Er hat vier Strategien.]
   b) Über welche Strategien verfügt S? [Hinw. Er muß in Betracht ziehen, was S tun wird, nachdem er „eins" und nachdem er „zwei" gesagt hat. Er hat also vier Strategien.]
   c) Stellen Sie die Matrix für dieses Spiel auf.
   d) Beschränken Sie den Spieler auf das Ankündigen von „zwei" und lassen Sie für S nur die Strategien zu, bei denen seine Zahl nicht von der angekündigten Zahl abhängt. Lösen Sie das daraus resultierende 2×2 Spiel.
   e) Weiten Sie die obigen gemischten Strategien auf das ursprüngliche Spiel aus, und zeigen Sie, daß sie optimal sind.
   f) Ist das Spiel günstig für Z? Wenn ja, bis zu welchem Grade?

7. Beantworten Sie die gleichen Fragen, wie in Übung 6 wenn Z die gerade und S die ungerade Summe beträgt. (In Teil d) beschränke Z auf die Ankündigung von „eins".) Welches Spiel ist günstiger für Z? Hätten Sie das ohne die Benutzung der Theorie der Spiele voraussagen können?

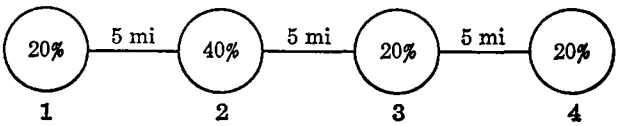
8. Führen Sie die Übung 7, Abschnitt 3, unter Zugrundelegung der folgenden Auszahlungssummen durch: Ist die Summe der Anzahl der Finger gerade, so erhalte Z einen Punkt, ist die Summe ungerade, so erhalte S einen Punkt. Nehmen Sie an, daß jeder der Spieler nur einen oder zwei Finger zeige. Zeigen Sie, daß die optimalen Strategien dieses Spieles optimal für das gesamte Spiel sind, wenn sie erweitert werden.

9. Betrachten Sie das folgende Spiel: Jeder Spieler zeige zwischen einem und drei Fingern. Z zahle an S immer den Betrag, der gleich der Anzahl der Finger ist, die S zeigt. Zeigt S genau einen Finger mehr oder zwei weniger als Z, so zahle S an Z einen positiven Betrag x (wobei x unabhängig von der Anzahl der gezeigten Finger ist).
   a) Stellen Sie die Spielmatrix für willkürliche x auf.
   b) Zeigen Sie, daß das Spiel dann einen Sattelpunkt hat, wenn $x = 1/2$. Bestimmen Sie dessen Wert. [Lös.: $v = -5/2$.]
   c) Zeigen Sie, daß für $x = 2$ ein Paar optimaler Strategien existiert, bei denen der erste Spieler einen oder zwei Finger und der zweite Spieler zwei oder drei Finger zeigt. [Hinw. Lösen Sie ein abgeleitetes $2 \cdot 2$ Spiel.] Bestimmen Sie dessen Wert. [Lös.: $v = -3/2$.]
   d) Zeigen Sie, daß für $x = 6$ die gemischte Strategie (1/3, 1/2, 1/6) für Z optimal ist. Zeigen Sie ferner, daß es für S optimal ist, seine drei Strategien jeweils mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 zu wählen. Bestimmen Sie den Wert des Spieles.

10. Betrachten Sie die folgende Version des Fingerspieles: Jeder der Spieler zeige zwischen einem und drei Fingern. Ist die Summe der gezeigten Finger gerade, so erhalte Z einen Betrag, der gleich der Anzahl der von S gezeigten Finger ist. Ist die Summe der Finger ungerade, so erhalte S einen Betrag, der gleich der Anzahl der von Z gezeigten Finger ist.

a) Stellen Sie die Spielmatrix auf.
b) Reduzieren Sie das Spiel auf ein $2 \cdot 2$ Matrixspiel.
c) Bestimmen Sie für jeden Spieler die optimalen Strategien und zeigen Sie, daß das Spiel fair ist.

11. Eine große und eine kleine Gesellschaft stellen das gleiche Produkt her. Sie wollen beide in einer von vier an einer Hauptverkehrsstraße gelegenen Städten eine neue Verkaufsstätte bauen. Die Bevölkerungsverteilung und die Entfernungen zwischen den Städten verhalten sich wie folgt, wenn wir die Gesamtbevölkerung der vier Städte als 100% ansehen:



Nehmen Sie an, daß die Verkaufsstätte der größeren Gesellschaft dann 80% des Geschäfts abwickele, wenn sie näher an einer Stadt liegt, daß sie 60% des Geschäfts abwickele, wenn beide Verkaufsstätten gleich weit von der Stadt entfernt sind, und daß sie 40% des Geschäfts abwickele, wenn die Verkaufsstätte des kleineren Geschäfts von der Stadt weniger weit entfernt ist als das große.

a) Stellen Sie die Matrix des Spieles auf.
b) Überprüfen Sie sie auf dominierende Zeilen und Spalten hin.
c) Bestimmen Sie die optimalen Strategien und den Wert des Spieles und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

[Lös.: Beide Gesellschaften sollten ihre Verkaufsstätte in Stadt 2 gründen; die große Gesellschaft wickelt dann 60% des Geschäfts ab.]

12. Führen Sie Übung 11 noch einmal unter der Annahme durch, daß die von dem größeren Geschäft abgewickelten Geschäftsanteile 90, 75 bzw. 60% betragen.

13. Wir haben, ohne es zu beweisen, behauptet, daß jedes $2 \times n$ Spiel dadurch gelöst werden kann, daß man lediglich seine abgeleiteten 2×2 Spiele betrachtet. Verifizieren Sie dies für ein Spiel der folgenden Form:

		S	
Z	a	0	1
	0	b	1

.

a) Zeigen Sie, daß dann die Spalte 3 dominiert wird, wenn $a \leqq 1$ oder $b \leqq 1$ ist. Lösen Sie das Spiel unter dieser Voraussetzung.
b) Lösen Sie die drei abgeleiteten 2×2 Spiele, wenn $a > 1$ und $b > 1$ ist. [Hinw. Zwei davon sind streng determiniert.]
c) Zeigen Sie, daß dann die Strategien des nicht streng determinierten, abgeleiteten Spieles optimal für beide Spiele sind, wenn $a > 1$, $b > 1$ und $ab < a + b$.
d) Zeigen Sie, daß dann Z die gleiche optimale Strategie hat wie in Teil c), für S jedoch eine reine Strategie optimal ist, wenn $ab \geqq a + b$.
e) Zeigen Sie unter Benutzung der vorhergehenden Ergebnisse, daß der Wert des Gesamtspieles immer der kleinste der Werte der drei abgeleiteten Spiele ist.

6. Vereinfachter Poker

Um zu illustrieren, wie man ein durch Regeln festgelegtes Spiel in ein Matrixspiel verwandelt, wollen wir dies hier für eine vereinfachte Form eines wohlbekannten Spieles durchführen. Wir wollen dabei als Beispiel eine vereinfachte Form (nach A. W. Tucker) des Pokerspieles wählen, wie es auf den Seiten 211 bis 219 in dem Buch „The Theory of Games and Economic Behavior" von John von Neumann und Oskar Morgenstern behandelt wird[1]. Die für diesen vereinfachten Poker benutzten Karten bestehen lediglich aus zwei Typen, die in gleicher Anzahl vorhanden sind. Wir wollen sie hier „hoch" und „niedrig" nennen. So könnte z. B. eine gewöhnliche Bridgekarte benutzt werden, wenn man die roten Karten mit hoch und die schwarzen Karten mit niedrig bezeichnet. Jeder Spieler „setzt" einen bestimmten Betrag a ein und erhält eine einfache Karte, die sein „Blatt" darstellt. Mit einer „Runde" bezeichnen wir ein Kartenpaar, von dem die erste dem Spieler Z und die zweite dem Spieler S gegeben wird. So bedeutet z. B. die Runde (H,H), daß jeder der Spieler eine hohe Karte bekommt. Es gibt nun vier mögliche Runden, nämlich

$$(H,H), \qquad (H,N), \qquad (N,H), \qquad (N,N).$$

Sehen wir von kleineren Fehlern ab (siehe Übung 1), so ist dann, wenn die Anzahl der Karten im Stoß groß genug ist, jede dieser Runden gleich wahrscheinlich, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte davon zu erhalten, beträgt 1/4.

Nachdem die Karten ausgegeben worden sind, kommt der Spieler Z zuerst zum Zuge und hat dann zwei Alternativen, nämlich entweder „aufzudecken" oder „zu überbieten", indem er der Kasse einen Betrag b hinzufügt. Entscheidet sich Z dazu aufzudecken, so gewinnt der Spieler mit dem höheren Blatt die Kasse, oder bei Blattgleichheit wird sie gleichmäßig geteilt. Entscheidet sich Z dazu zu überbieten, so hat S zwei Möglichkeiten: Entweder er „paßt" oder er „hält"[2], indem er der Kasse einen Betrag hinzufügt. Paßt der Spieler S, so gewinnt der Spieler Z den Kasseninhalt (ohne sein Blatt aufzudecken), hält jedoch S, so gewinnt wiederum der Spieler mit dem höheren Blatt den Inhalt der Kasse, oder sie wird bei Blattgleichheit gleichmäßig verteilt. Soweit die Spielregeln.

Eine reine Strategie eines Spielers ist ein Befehl, der ihm genau sagt, was er in jeder, im Rahmen des Spieles möglichen Situation zu tun hat. So ist z. B. ein Beispiel einer reinen Strategie für Z: „Überbiete, wenn du eine hohe Karte bekommst, und decke auf, wenn du eine niedrige bekommst."

---

[1] In der deutschen Fassung des Buches (Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961) auf den Seiten 189—223.

[2] Siehe: K. Lichtwitz, „Neues Buch des Kartenspiele", Darmstadt 1962.

Wir können diese Strategie einfach mit „überbiete-decke auf" abkürzen. Es ist leicht zu sehen, daß Z über vier reine Strategien, nämlich „überbiete-überbiete", „überbiete-decke auf", „decke auf-überbiete" und „decke auf-decke auf" verfügt. In der gleichen Weise stehen auch S vier reine Strategien zur Verfügung, und zwar: „passe-passe", „passe-halte", „halte-passe" und „halte-halte".

Hat sich jeder Spieler für eine reine Strategie entschieden, so gibt es genau vier Weisen, auf die, in Abhängigkeit von der Art der gegebenen Runde, das Spiel vor sich gehen kann. Nehmen Sie z. B. an, Z wähle die „aufdecken-überbieten"-Strategie und S wähle die „passe-passe"-Strategie. Werden nun bei einer Runde die Karten (H,H) ausgegeben, so deckt Z auf, und der Inhalt der Kasse wird geteilt, so daß keiner der beiden Spieler gewinnt.

Sind die Karten der ausgegebenen Runde (H,N), so deckt Z auf und gewinnt den Inhalt der Kasse, nämlich a. Werden die Karten (N,H) ausgegeben, so überbietet Z, und S paßt, so daß Z den Betrag a gewinnt. Werden schließlich die Karten (N,N) ausgegeben, so überbietet Z, und S paßt, so daß Z wiederum den Betrag a gewinnt. Da nun die Wahrscheinlichkeiten für jede dieser Runden genau 1/4 ist, ist der erwartete Wert des Gewinns von Z $3a/4$. Wir wollen nun den erwarteten Gewinn unter der Annahme errechnen, daß Z die Strategie „aufdecken-überbieten" und S die Strategie „halten-passen" benutzt. Werden dann die Karten (H,H) ausgegeben, so deckt Z auf und gewinnt nichts. Werden die Karten (H,N) ausgegeben, so deckt Z wiederum auf und gewinnt den Betrag a. Bei den Karten (N,H) überbietet Z, S hält, und S gewinnt den Betrag $a + b$. Werden schließlich die Karten (N,N) ausgegeben, so überbietet Z, S paßt, und Z gewinnt a. Der erwartete Wert für Z ist hier $(a - b)/4$. Fahren wir in dieser Weise fort, so können wir die erwarteten Ergebnisse für jede der 16 möglichen Strategienpaare errechnen. Abb. 4 zeigt die auf diese Weise ermittelte Auszahlungsmatrix.

hoch		passen	passen	halten	halten
	niedrig	passen	halten	passen	halten
aufdecken	aufdecken	0	0	0	0
aufdecken	überbieten	$\frac{3a}{4}$	$\frac{2a}{4}$	$\frac{a-b}{4}$	$\frac{-b}{4}$
überbieten	aufdecken	$\frac{a}{4}$	$\frac{a+b}{4}$	0	$\frac{b}{4}$
überbieten	überbieten	$\frac{4a}{4}$	$\frac{3a+b}{4}$	$\frac{a-b}{4}$	0

Abb. 4

Der Leser sollte sich klarmachen, daß wir damit die Übersetzung eines durch Regeln bestimmten Spieles in ein Matrixspiel abgeschlossen haben. Da a und b positive Zahlen sind, dominiert in der obigen Matrix, wie wir sehen, die vierte Zeile über die zweite und die dritte über die erste. Desgleichen dominiert die dritte Spalte über die erste und zweite Spalte. Wir können also die 4×4 Matrix auf die in Abb. 5 gezeigte 2×2 Matrix reduzieren.

			konservativ	halten
	hoch		halten	halten
		niedrig	passen	halten
konservativ	überbieten	aufdecken	0	$\frac{b}{4}$
bluffen	überbieten	überbieten	$\frac{a-b}{4}$	0

Abb. 5

Bitte beachten Sie, daß wir die „überbieten-aufdecken"-Strategie für Z als „konservativ" bezeichnet haben, da es vernünftig erscheint, dann zu erhöhen, wenn er eine hohe Karte bekommt, und dann aufzudecken, wenn ihm eine niedrigere gegeben wird. Die Strategie „überbiete-überbiete", die die Anweisung enthält, selbst dann zu erhöhen, wenn man eine niedrige Karte hat, bezeichnen wir mit „bluffen", da sie dem entspricht, was wir gewöhnlich unter bluffen verstehen. Auf die gleiche Weise haben wir die „halten-passen"-Strategie als „konservativ" bezeichnet. Die Strategie „halte-halte" (oder „halten") ist dazu bestimmt, ein mögliches Bluffen des Gegners erkennen zu können und ihn auf diese Weise von einem zu häufigen Gebrauch des Bluffens zu entmutigen.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, es sei $a = 4$ und $b = 8$. Wir erhalten dann folgende Matrix:

	konservativ	halten
konservativ	0	2
bluffen	−1	0

Das Spiel ist also streng bestimmt und fair, und die optimalen Strategien sind für beide Spieler die konservativen.

Beispiel 2. Nehmen Sie an, es sei $a = 8$ und $b = 4$. Wir erhalten dann die Matrix

	konservativ	halten
konservativ	0	1
bluffen	1	0

Der Wert des Spieles ist hier 1/2, d. h. es ist günstiger für Z. Die optimalen Strategien für beide Spieler sind mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2, zu bluffen, und mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2, konservativ zu spielen.
Es stellt sich hier als eines der interessantesten Ergebnisse der Theorie der Spiele heraus, daß man im Rahmen einer optimalen Strategie teilweise bluffen sollte. Die Lösung für beliebige a und b finden Sie in den Übungen 3 bis 6.

ÜBUNGEN

1. Nehmen Sie an, das vereinfachte Pokerspiel würde mit einer normalen Bridgekarte gespielt, wobei rot „hoch" und schwarz „niedrig" bedeute. Errechnen Sie unter der Voraussetzung, daß bereits eine rote Karte gezogen wurde, die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weiteren roten Karte auf vier Stellen genau. Diskutieren Sie auf Grund dieses Ergebnisses die gemachte Voraussetzung, daß die vier verschiedenen Kartenkombinationen gleich wahrscheinlich sind. Wie könnte man die Genauigkeit dieser Annahme verbessern?

2. Setzen Sie in die obige 4×4 Matrix $a = 4$ und $b = 8$ ein und reduzieren Sie sie auf eine 2×2 Spielmatrix. Erhalten Sie dabei die gleiche Matrix wie in Beispiel 1? Führen Sie das gleiche für $a = 8$ und $b = 4$ und Beispiel 2 durch.

3. Zeigen Sie, daß das vereinfachte Pokerspiel dann streng determiniert und fair ist, wenn $a \leqq b$. Zeigen Sie, daß die optimale Strategie beider Spieler ein konservatives Spielen ist.

4. Zeigen Sie, daß das vereinfachte Pokerspiel dann für Z günstig ist, wenn $a > b$. Zeigen Sie weiterhin, daß jeder Spieler, wenn er optimal spielen will, mit positiver Wahrscheinlichkeit bluffen muß, und bestimmen Sie die optimalen Strategien.

5. Diskutieren Sie die Wege, das Spiel dann fair zu gestalten, wenn $a > b$.

6. Zeigen Sie, daß die optimale Strategie des Spielers Z nicht eindeutig ist, wenn $b \geqq a$. Zeigen Sie ferner, daß es trotzdem für ihn zwei „optimale" Strategien gibt; daß die „überbieten-aufdecken"-Strategie in gewisser Beziehung besser als die andere ist.

7. Zeigen Sie, daß die Strategie von Z im Falle von $a = 8$ und $b = 4$ wie folgt interpretiert werden kann: „Überbieten Sie stets bei einer hohen Karte und überbieten Sie bei einer niedrigen Karte mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2," Interpretieren Sie in ähnlicher Form die gemischte Strategie S.

Die verbleibenden Übungen betreffen eine Variation des vereinfachten Pokerspieles. Das wirkliche Pokerspiel ist dadurch charakterisiert, daß es viele sehr schlechte Blätter gibt und nur sehr wenig gute. Wir können das obige Pokermodell dadurch realistischer gestalten, daß wir das Ziehen einer niedrigen Karte wahrscheinlicher machen als das einer hohen. Wir wollen nun annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer hohen Karte lediglich 1/5 ist. Alle anderen Regeln bleiben die gleichen wie im Text.

8. Errechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für (H, H), (H, N) und (N, N).

9. Da die Strategien der beiden Spieler die gleichen wie im Text bleiben, erhalten wir auch eine ähnliche 4×4 Spielmatrix. Errechnen Sie den Wert der Matrix, der einer „aufdecken-überbieten"- bzw. „passe-passe"-Strategie entspricht, jedoch unter Verwendung der Ergebnisse der Übung 8. Führen Sie das gleiche für den Wert für „aufdecken-überbieten" bzw. „halten-passen" durch.
[Lös.: 24a/25; (16a—4b)/25.]

10. Errechnen Sie die verbleibenden Matrixwerte.

11. Zeigen Sie, daß zwei Zeilen und zwei Spalten dominieren.

12. Zeigen Sie, daß das resultierende 2×2 Spiel dann und nur dann einen Sattelpunkt hat, wenn $b \geqq 4a$. Welchen Wert hat das Spiel in diesen Fällen?

13. Es sei wie im Text $a = 4$ und $b = 8$. Lösen Sie das Spiel und vergleichen Sie Ihre Lösung mit der im Text erhaltenen.
[Lös.: Jeder Spieler sollte die Hälfte der Zeit bluffen. $v = 16/25$. Bei der vorangehenden Version gab es in diesem Falle kein bluffen, und das Spiel war fair.]

14. Es sei für das im Text erwähnte Spiel $a = 8$ und $b = 4$. Lösen Sie das Spiel und vergleichen Sie die Resultate mit den im Text erhaltenen.
[Lös.: Jeder der Spieler spielt konservativer. Das Spiel ist etwas günstiger für Z als die vorangehende Version.]

15. Die Spieler haben sich auf eine Vorauszahlung von 4 DM geeinigt. Sie diskutieren nun die Größe der Erhöhung. Welchen Wert von b sollte der Spieler Z anstreben? [Hinw. Er strebt nicht nach einem fairen Spiel. Welche Möglichkeiten bestehen nun für den Wert von b? Bestimmen Sie den Wert des 2×2 Spieles für verschiedene b und errechnen den maximalen Wert, indem Sie es mit verschiedenen Werten von b versuchen.]

*7. Das Modell einer wachsenden Volkswirtschaft

Das folgende Modell ist wiederum eine Modifikation eines von John von Neumann vorgeschlagenen Modells. Es ist für das Studium einer mit einem festen Prozentsatz wachsenden Volkswirtschaft, die sich im übrigen im Gleichgewicht befindet, bestimmt. In diesem Modell werden bestimmte Annahmen darüber gemacht, wie sich eine Volkswirtschaft im Gleichgewicht befindet. Da diese Annahmen Idealisierungen darstellen, kann erwartet werden, daß das Modell schließlich durch ein besseres ersetzt wird. Im Moment betrachten jedoch noch viele Wirtschaftswissenschaftler das Modell von Neumann als eine vernünftige Annäherung an die Wirklichkeit. Für uns ist das Modell nur insofern interessant, als es illustriert, wie Mathematik bei der Lösung wirtschaftswissenschaftlicher Probleme verwandt werden kann.

Die Volkswirtschaft soll durch n *Güter* und m *Prozesse* zu beschreiben sein. Unter Gütern sind z. B. Stahl, Kohle, Häuser, Schuhe, Rohmaterialien usw. zu verstehen. Sie können solange in jeder uns bequemen Einheit gemessen

werden, wie diese Einheit gleichbleibt. Da wir es praktisch finden werden, von beliebigen Vielfachen dieser Einheiten sprechen zu können, wie z. B. von 2,75 Tonnen Stahl oder 2,75 Häusern, werden wir sie, falls diese Werte an sich keinen rechten Sinn geben (wie z. B. bei den Häusern), als Durchschnitte interpretieren.

Im Rahmen eines Herstellungsprozesses werden aus bestimmten Gütern und Materialien (den *Inputs*) ein oder mehrere andere Güter (die sog. Outputs) hergestellt. Wir mögen z. B. als Prozeß die Überführung von Stahl, Holz, Glas usw. in ein Haus ansehen. Im Rahmen eines solchen Prozesses kann natürlich mehr als ein Haus hergestellt werden. Wir werden deshalb das Konzept der *Intensität*, mit der ein Prozeß durchgeführt wird, zugrunde legen. Eine weitere grundlegende Voraussetzung wird die der Linearität sein, d. h. wir werden annehmen, daß k Häuser k-mal soviel Rohmaterial erfordern wie ein Haus. Wir werden also für jeden Prozeß eine willkürliche „Einheitsintensität" wählen und den Prozeß dann als vollständig definiert betrachten, wenn wir die notwendigen Inputs für diese Einheit des Prozesses und den gewünschten Output kennen.

Für den Prozeß i werden wir als Input einen bestimmten Betrag des Gutes j benötigen, wenn er mit Einheitsintensität durchgeführt wird. Dieser Betrag soll a_{ij} genannt werden. (Wird das Gut j für den speziellen Prozeß i nicht benötigt, dann ist $a_{ij} = 0$.) Wir wollen ferner mit b_{ij} die Menge des Gutes j bezeichnen, die im Rahmen des Prozesses i hergestellt wird.

Wir wollen dabei an dieser Stelle zulassen, daß im Rahmen eines Prozesses verschiedene Güter (z. B. ein Hauptprodukt und einige Nebenprodukte) anfallen. Für Produktionsprozesse, in deren Rahmen nur ein Gut entsteht, sind alle b_{ij} für dieses i, außer einem, 0. Die a_{ij} und b_{ij} sind durchweg nichtnegative Zahlen.

Wir definieren nun die Matrix A als die $m \times n$ Matrix, die aus den Komponenten a_{ij}, und die Matrix B als die $m \times n$ Matrix, die aus den Komponenten b_{ij} besteht. Durch diese beiden Matrizen wird dann die gesamte Volkswirtschaft beschrieben.

Es bleibt uns noch, das Zeitelement zu berücksichtigen. Gewöhnlich stellt man sich die Entwicklung einer Volkswirtschaft in Stufen oder Zyklen vor. Innerhalb eines solchen Zyklus ist gerade Zeit genug, die Inputs a_{ij} im Rahmen des Prozesses i in die Outputs b_{ij} zu verwandeln. Auf der nächsten Stufe können dann diese Outputs wiederum als Inputs verwandelt werden. Die Länge eines solchen Zeitintervalles richtet sich nach der Art der zu studierenden Prozesse. Sie kann einen Monat, ein Jahr, eine Anzahl von Jahren usw. betragen.

Beispiel. Wir wollen uns unsere Volkswirtschaft als eine Hühnerfarm vorstellen. Unsere Güter seien Hühner und Eier, und die natürlichen Einheiten sind ein Huhn und ein Ei. Unsere zwei Prozesse sind das Eierlegen und das Ausbrüten. Wir wollen

annehmen, daß ein Huhn, wenn wir es zum Eierlegen verwenden, in einem gegebenen Monat durchschnittlich zwölf Eier lege. Lassen wir es brüten, so brüte es durchschnittlich im Monat vier Eier aus. Auf Grund dieser Information können wir nun A und B aufstellen.

Unser Zyklus hat die Länge eines Monats. Das Gut 1 ist „Huhn", Gut 2 ist „Ei", der Prozeß 1 heißt „Legen", und der Prozeß 2 heißt „Brüten". Die Intensitätseinheit eines Prozesses soll die Leistung sein, die ein Huhn im Durchschnitt während eines Monats vollbringen kann. Der Input des Prozesses 1 ist ein Huhn, d. h. eine Einheit des Gutes 1. Der Output besteht aus einem Dutzend Eier *und* dem ursprünglichen Huhn. (Dies dürfen wir nicht vergessen, da das ursprüngliche Huhn im nächsten Zyklus wieder verwendet werden kann.) Der Output besteht also aus einer Einheit des Gutes 1 und zwölf Einheiten des Gutes 2. Beim Prozeß 2 besteht der Input aus einem Huhn und vier Eiern, während der Output durch fünf Hühner gebildet wird. (Das ursprüngliche und die vier ausgebrüteten.) Unsere Matrizen ergeben sich also zu

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{Eierlegen} \\ \text{Eier ausbrüten} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Huhn} & \text{Ei} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Huhn} & \text{Ei} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nehmen Sie an, unser Farmer beginne mit drei Hühnern und acht brutfertigen Eiern. Für das Ausbrüten der Eier benötigt er zwei Hühner, so daß ihm eins für das Eierlegen bleibt. Er führt also den Prozeß 1 mit der Intensität 1 und den Prozeß 2 mit der Intensität 2 durch. Wir wollen dies durch den Vektor $x = (1,2)$ symbolisieren. Beachten Sie, daß seine Inputs aus den Komponenten von xA bestehen. Das von ihm zum Eierlegen verwandte Huhn wird innerhalb eines Monats zwölf Eier legen. Ferner wird der Farmer am Ende des Monats außer den drei ursprünglichen Hühnern acht neue besitzen. Er hat also einen Output von 11 Einheiten des Gutes 1 und 12 Einheiten des Gutes 2. Dies entspricht den Komponenten von xB. Da er nur drei seiner Hühner für das Brüten verwenden kann, wird er in der nächsten Periode die Intensitäten (8,3) anwenden. Die Outputs sind dann $(8,3) \times B = (23,96)$, was wir sehr leicht nachprüfen können (siehe Übung 1). Er besitzt nun 96 Eier und 23 Hühner, so daß in der nächsten Periode nicht alle Eier ausgebrütet werden können.

Nehmen Sie nun auf der anderen Seite an, daß er mit nur zwei Hühnern und vier Eiern begann. Er wird dann die Intensitäten (1,1) anwenden. Das eine Huhn legt in der ersten Periode zwölf Eier, und er besitzt mit den vier neu ausgebrüteten Küken insgesamt sechs Hühner. Wir erhalten also als Ergebnis $(1,1) \times B = (6,12)$. Damit hat er sowohl seine Hühner als auch seine Eier verdreifacht. Wendet er nun während des nächsten Zyklus die Intensität (3,3) an, so erhält er $(3,3) \times \mathrm{B} = (18,36)$ und verdreifacht wiederum sowohl seine Hühner als auch seine Eier. Fährt er nun fort, die Prozesse im gleichen Verhältnis zueinander fortzusetzen, so wird er innerhalb je eines Zyklus seinen Ausstoß jeweils verdreifachen. Wir wollen dieses Wirtschaftsgebilde dann als im *Gleichgewicht* befindlich bezeichnen.

Wie wir in unserem Beispiel sahen, lassen sich die Intensitäten unserer Prozesse mit Hilfe eines Zeilenvektors darstellen. Ist x_i die Intensität, mit der der Prozeß i durchgeführt wird, so ist der *Intensitätsvektor* $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Mit Hilfe der Matrixmultiplikation können wir dann leicht die Gesamtmengen der benötigten Güter und der produzierten Güter ermitteln. Die Komponente j von xA ist dann die Summe $x_1a_{1j} + \ldots + x_ma_{mj}$, wobei x_1a_{1j} die Menge des Gutes j ist, die wir für den Prozeß 1 benötigen, x_2a_{2j} die

Menge, die wir im Prozeß 2 benötigen usw. Die j-te Komponente von xA stellt also die Gesamtmenge des Gutes j dar, die wir als Input benötigen. Entsprechend stellt xB die Gesamtmengen der verschiedenen Güter, die hergestellt werden, dar.

Wir müssen nun die Preise für die verschiedenen Güter in unsere Betrachtungen einbeziehen. Es sei y_j der Preis einer Einheit des Gutes j, der größer oder gleich 0 sein kann. (Ist der Preis gleich 0, so kann das Gut als „praktisch kostenlos" angesehen werden.) Es wird nun angenommen, daß k Einheiten des Gutes j ky_j DM kosten. Der *Preisvektor* y ist dann der Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die Produkte Ay und By betrachten. Das i-te Element von Ay ist $a_{i1}y_{i1} + \ldots + a_{in}y_n$. Der Ausdruck $a_{i1}y_1$ stellt die für eine Einheit des Prozesses i benötigte Menge des Gutes 1, multipliziert mit dem Einheitspreis der Menge 1, dar und entspricht somit den Kosten der in jedem Prozeß benötigten Menge des Gutes 1. Die entsprechenden Kosten des Gutes 2 sind dann $a_{i2}y_2$ usw. Die i-te Komponente von Ay stellt also die Gesamtkosten des Inputs für eine Intensitätseinheit des Prozesses i dar. Entsprechend sind By die Kosten (Wert) des Outputs.

Schließlich haben wir die Produkte xAy und xBy zu betrachten. Da $x = 1 \times m$, die Matrizen A und B jeweils $m \times n$ und $y = n \times 1$ sind, ist jedes Produkt 1×1, oder eine Zahl. Eine Analyse ähnlich der obigen zeigt, daß xAy die Gesamtkosten der Inputs darstellen, wenn die Volkswirtschaft mit der Intensität x arbeitet und die Preise y sind und xBy der Gesamtwert aller produzierten Güter ist (siehe Übung 2).

Beispiel (Fortsetzung). Nehmen Sie an, daß ein Huhn 10 monetäre Einheiten und ein Ei 1 monetäre Einheit kosteten. Es ist dann $y = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entsprechend ist

$$Ay = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ und } By = \begin{pmatrix} 22 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, daß der Prozeß 1, das Eierlegen, unsere Investitionen um den Faktor 2,2 vergrößert, während der Prozeß 2, das Ausbrüten, für jede investierte Mark 3,50 DM erbringt. Es erscheint also günstig, die Hennen nur für das Brüten einzusetzen, wodurch sicherlich eine Eierknappheit entstehen wird, die wiederum der Anlaß für eine Preisänderung sein kann. Nehmen Sie nun an, daß ein Huhn lediglich sechsmal soviel wie ein Ei koste, d. h. $y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist dann

$$Ay = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } By = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall verdreifacht jeder Prozeß unsere Investitionen, und es werden keine Preisänderungen verursacht werden. Die Prozesse befinden sich also miteinander im Gleichgewicht.

Als letztes müssen wir die Expansion der Volkswirtschaft betrachten. Wir wollen voraussetzen, daß die Volkswirtschaft mit einer konstanten Geschwindigkeit wächst, d. h. daß ein fester *Wachstumsfaktor* α besteht, so daß ein Prozeß, der in der ersten Periode mit der Intensität x durchgeführt wird, in der zweiten Periode die Intensität αx, in der dritten Periode die Intensität $\alpha^2 x$ usw. hat. Eine ähnliche Entwicklung gilt für das in der Volkswirtschaft vorhandene Geld; es wachsen nämlich durch den Zinsertrag y Geldeinheiten während eines Zeitintervalls auf βy Einheiten an. Wir wollen auch hier annehmen, daß der *Zinsfaktor* β ein für immer festgelegter Faktor für einen Gleichgewichtszustand ist. Gewöhnlich werden diese Faktoren größer als 1 sein, jedoch ist dies nicht absolut notwendig. So ist z. B. $\alpha = 1$ charakteristisch für eine stationäre und $\alpha < 1$ für eine schrumpfende Volkswirtschaft.

Damit haben wir unsere grundlegenden Arbeitsthesen genannt. Wir müssen uns nun noch über die Voraussetzungen klarwerden, die wir bezüglich des Verhaltens einer im Gleichgewicht befindlichen Volkswirtschaft als gültig ansehen wollen. Diese Voraussetzungen sollen für das von uns zu betrachtende System als Axiome gelten.

Als erstes müssen wir sicherstellen, daß wir in jedem Zeitintervall genug von jeder Ware herstellen, um den Inputanforderungen des nächsten Intervalles gerecht zu werden. Läuft ein gegebener Zeitintervall in einer Volkswirtschaft mit der Intensität x ab, so wird er das nächste Mal mit der Intensität αx ablaufen. Während die Outputs dieses Mal xB betragen, werden die Inputs beim nächsten Mal αxA sein. Wir müssen also fordern, daß

AXIOM 1 $$xB \geqq \alpha xA.$$

(Befinden sich in einer Ungleichung vektorielle Größen, so soll diese Ungleichung für jede ihrer Komponenten gelten.) Selbstverständlich existieren ähnliche Bedingungen auch für die Zukunft. Sind z. B. die Outputs des zweiten Intervalles αxB, so sind die Inputs des dritten Intervalles $\alpha^2 xA$. Fassen wir jedoch wiederum die fordernde Bedingung in Form einer Ungleichung, so können wir ein α kürzen, und wir kommen damit zur gleichen Bedingung, wie sie Axiom 1 fordert. Wir können also dieses Axiom als Bedingung für alle Zeitintervalle ansehen. Die erste Bedingung stellt sicher, daß die Volkswirtschaft mit einem bestimmten Faktor α wachsen kann. Wir müssen nun sicherstellen, daß sie sich auch finanziell im Gleichgewicht befindet. Nehmen Sie an, der Ausstoß eines Prozesses war mehr wert als β mal dem Input. Wir wären dann bereit, jemanden, der Geld in unserem Prozeß investieren will, mehr Zins zu bezahlen. β würde also steigen. Da das im Gleichgewicht nicht möglich sein darf, soll in keinem der Prozesse mehr produziert werden können als β mal der Investition. Führen wir

einen Prozeß mit Einheitsintensität durch, so stellt Ay die Kosten des Inputs und By den Wert des Outputs dar. Der letzte Wert darf nicht mehr als β mal größer sein als der erste Wert, d. h. wir müssen fordern als

AXIOM 2 $$By \leqq \beta Ay.$$

Die nächste Voraussetzung betrifft überflüssige Produkte. Produzieren wir von irgendeinem Gut mehr als in der Gesamtwirtschaft verbraucht werden kann, so werden die Preise sofort fallen, wenn die Händler versuchen, ihre Produkte loszuwerden. Es ist nun üblich, solche Produkte als frei zu betrachten, d. h. ihnen den Preis 0 zuzuordnen. Die Menge der Überproduktion wird durch die Vektorendifferenz $xB - \alpha xA = x(B - \alpha A)$ dargestellt, d. h. die j-te Komponente wird dann und nur dann positiv, wenn von dem Gut j mehr produziert als gebraucht wird. Ordnen wir nun diesen Gütern den Preis 0 zu, wird in dem Produkt des obigen Vektors mit y jeder von 0 verschiedene Faktor mit 0 multipliziert. Das Produkt der beiden Vektoren ist also 0.

AXIOM 3 $$x(B - \alpha A)y = 0.$$

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, ob es sich überhaupt lohnt, einen gegebenen Prozeß durchzuführen. Nach Axiom 2 kann innerhalb keines Prozesses mehr Gewinn erzielt werden, als die gegebene Investition zuläßt. Wird jedoch im Rahmen eines Prozesses weniger Gewinn erzielt, so ist besser, ihn nicht durchzuführen, sondern unser Geld in einem anderen zu investieren. Ist die i-te Komponente der in Axiom 2 gebildeten Differenz $By - \beta Ay$ negativ, so sollte also der Prozeß i nicht durchgeführt werden, sondern man sollte ihm die Intensität 0 zuordnen. Mit einer ähnlichen Beweisführung, wie der für Axiom 3 verwandten, kann gezeigt werden, daß die Multiplikation dieser Vektorendifferenz mit x 0 ergibt.

AXIOM 4 $$x(B - \beta A)y = 0.$$

Unsere letzte Annahme soll nun sein, daß überhaupt etwas Kaufbares in der Volkswirtschaft erzeugt wird, d. h. daß der Wert aller hergestellten Güter eine positive Zahl ist.

AXIOM 5 $$xBy > 0.$$

Finden wir nun für eine gegebene Volkswirtschaft (bei gegebenen A und B) die Vektoren x und y und die Zahlen α und β, die diese fünf Axiome erfüllen, so bezeichnen wir sie als eine *mögliche Gleichgewichtslösung* der Volkswirtschaft.

Beispiel (Fortsetzung). Wir sahen bereits, daß dann, wenn $x = (1,1)$ die Volkswirtschaft mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit $\alpha = 3$ wächst. Wir können nun überprüfen, ob Axiom 1 erfüllt wird. Es stellt sich heraus, daß xB gleich αxA ist. Desgleichen haben wir ein monetäres Gleichgewicht für den Fall feststellen können, für den $y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und für den jeder Prozeß das in ihm investierte Geld um den Faktor $\beta = 3$ vermehrt.

Nun können wir auch überprüfen, ob Axiom 2 gilt. In diesem Fall ist $By \geqq \beta Ay$. Aus diesen beiden Gleichungen können wir schließen, daß $x(B - \alpha A)$ und $(B - \beta A)y$ identisch und gleich 0 sind. Die Axiome 3 und 4 sind also auch erfüllt. Schließlich ist $xBy = 48$, d. h., der Gesamtwert der erstellten Güter ist positiv, so daß die Werte auch dem Axiom 5 genügen. Diese Werte für x, y, α und β stellen also ein Gleichgewicht für die Volkswirtschaft dar. Es kann weiterhin gezeigt werden, daß dies die einzig möglichen Werte für α und β sind und daß x und y Vielfache der hier gezeigten Vektoren sein müssen. (Man kann dies einfach als einen Wechsel der verwandten Maßeinheiten deuten.)

In unserem Beispiel fanden wir ein und nur ein Gleichgewicht für die Volkswirtschaft, und wir stellten fest, daß $\alpha = \beta$. Dadurch erheben sich verschiedene Fragen: 1. Gibt es für jede Volkswirtschaft ein Gleichgewicht? 2. Wenn ja, gibt es dann genau eines? 3. Muß der Wachstumsfaktor immer gleich dem Zinsfaktor sein? Im nächsten Abschnitt werden wir dafür die folgenden Antworten finden: 1. Für jede Volkswirtschaft gibt es ein mögliches Gleichgewicht. 2. Es mag durchaus mehr als einen Gleichgewichtszustand geben, obwohl die Anzahl der verschiedenen, möglichen Wachstumsfaktoren begrenzt ist. (In unserem Beispiel gibt es nur eine Möglichkeit für x und y. Das gilt jedoch nicht für alle Fälle.) 3. Der Zinsfaktor ist im Gleichgewicht immer gleich dem Wachstumsfaktor.

ÜBUNGEN

1. Zeigen Sie, daß in dem Beispiel für $x = (1,2)$ xA und xB die richtigen Inputs und Outputs dreier aufeinanderfolgender Zyklen ergeben.
2. Geben Sie Interpretationen für xAy und xBy:
   a) unter Benutzung der oben für xA und xB gegebenen Interpretationen.
   b) unter Benutzung der oben für Ay und By gegebenen Interpretationen.
   c) Zeigen Sie, daß die Ergebnisse von a) und b) gleich sind.
3. Nehmen Sie in dem obigen Beispiel an, daß zwei Hühner zum Eierlegen und drei zum Eierausbrüten eingesetzt werden. Bestimmen Sie x, xA und xB. Setzen Sie diese Größen in Axiom 1 ein und bestimmen Sie den größtmöglichen Wachstumsfaktor. [Lös.: $\alpha = 2$.]
4. Nehmen Sie in dem obigen Beispiel an, daß Küken 80 Pf und Eier 5 Pf kosten. Bestimmen Sie y, Ay und By. Setzen Sie diese Größen in Axiom 2 ein und bestimmen Sie den kleinstmöglichen Zinsfaktor. [Lös.: $\beta = 4$.]
5. Zeigen Sie, daß die in den zwei vorangehenden Übungen bestimmten Werte für x, y, α und β den Axiomen 3 und 4 nicht genügen und damit zu keinem Gleichgewicht führen.
6. Zeigen Sie, daß dann, wenn $\alpha \geqq \beta = 3$ ist, die einzig möglichen x und y proportional zu den oben gegebenen sind. [Hinw. Zeigen Sie, daß wir durch die Axiome gezwungen werden, $x_1 = x_2$ und $y_1 = 6y_2$ zu wählen.]

Die verbleibenden Übungen beziehen sich auf die folgende Volkswirtschaft: Auf einer Hühnerfarm lege ein Huhn im Durchschnitt 16 Eier pro Monat oder brüte $3^1/_5 = 16/5$ Eier aus.

7. Stellen Sie die Matrizen A und B auf.

8. Nehmen Sie an, drei Hühner werden zum Eierlegen und fünf zum Eierausbrüten eingesetzt. Bestimmen Sie x, xA und xB. Welches ist das größtmögliche α? [Lös.: $x = (3,5)$; $xA = (8,16)$; $xB = (24,48)$; $\alpha = 3$.]

9. Nehmen Sie an, Küken kosteten 40 Pf und Eier 5 Pf. Bestimmen Sie y, Ay und By. Wie groß ist das kleinstmögliche β?

10. Zeigen Sie durch Einsetzen der Werte in die fünf Axiome, daß die in den vorangehenden Übungen gefundenen Werte für x, y, α und β ein Gleichgewicht für die Volkswirtschaft darstellen.

11. Nehmen Sie an, wir begännen mit 16 Hühnern und 32 Eiern. Wählen Sie die Intensitäten so, daß sich die Volkswirtschaft im Gleichgewicht befindet. Bestimmen Sie die Werte der ersten drei Monate. [Lös.: $x = (6,10)$; 432 Hühner, 864 Eier.]

12. Nehmen Sie an, wir setzten bei einem Anfangsbestand von 16 Hühnern und 32 Eiern fünf zum Brüten und die übrigen zum Eierlegen ein. Zeigen Sie, daß wir dabei nach drei Monaten nicht so viele Hühner erreichen, wie wir sie im Gleichgewicht erreicht hätten.

*8. Das Vorhandensein eines wirtschaftlichen Gleichgewichts

Für ein gegebenes Modell ist zu überprüfen, ob die genannten Axiome immer erfüllt werden können, d. h., ob sich die Volkswirtschaft in dem jeweiligen Zustand im Gleichgewicht befindet.

Selbstverständlich sind wir dabei lediglich an den Modellformen interessiert, die in der Praxis wirklich vorkommen können. Das bedeutet, die Güter müssen irgendwie hergestellt werden, und man kann sie nicht aus dem Nichts erzeugen. Mit anderen Worten, jeder Prozeß muß mindestens einen Rohstoff erfordern, und für die Herstellung eines Gutes muß mindestens ein Produktionsprozeß notwendig sein. Fassen wir das zusammen:

Voraussetzung. Jede Zeile von A und jede Spalte von B enthält mindestens einen positiven Wert.

Theorem. Wenn A und B dieser Voraussetzung genügen, ist ein Gleichgewicht möglich.

Wir wollen den Beweis dieses Theorems nur kurz skizzieren: Nach Axiom 3 erhalten wir $xBy = \alpha xAy$ und aus Axiom 4 $xBy = \beta xAy$. Es ist also $\alpha xAy = \beta xAy$. Da nach Axiom 5 xBy nicht 0 sein kann, ist auch xAy ungleich 0. Es ist dann $\alpha = \beta$. *Im Gleichgewicht ist also die Wachstumsrate gleich der Zinsrate.* Ist $\alpha = \beta$, so sind die Axiome 3 und 4 äquivalent. Wir können auf Grund dessen unsere ersten beiden Axiome wie folgt neu fassen:

AXIOM 1′ $\quad x(B - \alpha A) \geqq 0.$

AXIOM 2′ $\quad (B - \alpha A)y \leqq 0.$

Multiplizieren wir die rechte Seite der ersten Ungleichung mit y und die linke Seite der zweiten mit x, so sehen wir, daß Axiom 3 (und damit auch 4) aus diesen beiden Axiomen folgt. Wir haben uns also nur noch um die Axiome 1′, 2′ und 5 zu kümmern.

Der Schlüssel zum Beweis ist die spieltheoretische Darstellung des Problemes. Dies mag verwunderlich erscheinen, da das Modell kein Spielelement zu enthalten scheint. Wir benutzen deshalb auch die mathematischen Ergebnisse der Theorie der Spiele lediglich als Werkzeug.

Sehen wir uns die Axiome 1′ und 2′ genauer an, so erscheint es günstig, sich die Matrix $B - \alpha A$ als Matrixspiel vorzustellen. Die Vektoren x und y wären dann die gemischten Strategien der beiden Spieler. Die Vektoren sind nicht negativ, jedoch muß die Summe ihrer Komponenten nicht unbedingt 1 sein. Wir wissen, daß die Multiplikation von x mit einer Konstanten als ein Wechsel in der Einheit der Intensität und die Multiplikation von y mit einer Konstanten als ein Wechsel der Einheit der verschiedenen Güter angesehen werden kann. Wir können also, ohne damit weniger allgemeingültig zu sein, annehmen, daß die Summe der Komponenten von x und y jeweils 1 ist, und sie uns als gemischte Strategien vorstellen. In diesem Falle besagen die zwei Axiome, daß das Spiel den Wert 0 hat und daß x und y ein Paar optimaler Strategien der beiden Spieler ist. Unser erstes Problem ist also, α so zu wählen, daß das „Spiel" $B - \alpha A$ den Wert 0 hat.

Beispiel 1. Wir wollen das Beispiel des letzten Abschnittes als ein Spiel formulieren:

$$M = B - \alpha A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 12 \\ 5-\alpha & -4\alpha \end{pmatrix}.$$

Wählen wir $x = (1/2, 1/2)$ als gemischte Strategie des Zeilenspielers, so ist

$$xM = [3 - \alpha, 2(3 - \alpha)].$$

Ist $\alpha < 3$, so sind beide Komponenten positiv, d. h., der Wert des Spieles ist größer als 0. Wählen wir nun $y = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ als gemischte Strategie des Spaltenspielers, so ist

$$My = \begin{bmatrix} \frac{6}{7}(3-\alpha) \\ \frac{10}{7}(3-\alpha) \end{bmatrix}.$$

Ist $\alpha > 3$, so sind beide Komponenten, und damit auch die Werte des Spieles, negativ. Wir sehen also, daß der einzige Wert für α, der uns einen Spielwert von 0 ermöglicht, $\alpha = 3$ ist, und wir sehen aus dem obigen ferner, daß in diesem Fall der Wert wirklich 0 ist und x und y optimale Strategien sind (siehe Übung 1).

Es ist nun noch zu zeigen, daß das obige Beispiel verallgemeinert werden kann, d. h. daß es immer möglich ist, ein α zu finden, für das der Wert von $(B - \alpha A)$ Null ist. Wir wollen diese Matrix als die Summe von $B + \alpha(-A)$ schreiben und uns unser Spiel als eine Kombination der Spiele B und $(-A)$ vorstellen.

Gemäß unserer Voraussetzung enthält jede Spalte von B wenigstens einen positiven Wert. Der Strategievektor y des Spaltenspielers muß also wenigstens eine positive Komponente enthalten. Damit muß auch im Produkt By wenigstens eine positive Komponente vorhanden sein. Der Wert des Spieles B ist damit positiv. Da jede Zeile von A mindestens einen positiven Wert hat, enthält jede Zeile des Spieles $-A$ wenigstens einen negativen Wert. Es muß also wenigstens eine Komponente von $x(-A)$ und damit der Wert von $(-A)$ negativ sein.

Für sehr kleine α kann man für die Kombination $B + \alpha(-A)$ den zweiten Ausdruck vernachlässigen, so daß sich für dieses Spiel ein positiver Wert ergibt. Mit wachsendem α nimmt die Anzahl der negativen Werte, die wir einigen Komponenten des Spieles hinzuzählen, zu, d. h., gewisse Komponenten werden verkleinert. Der Wert des Spieles fällt damit. Für sehr große α kann der erste Teil des Ausdruckes vernachlässigt werden, so daß sich dann für das kombinierte Spiel ein negativer Wert ergibt. Für einen bestimmten, dazwischenliegenden Wert von α muß das Spiel den Wert 0 haben.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Abb. 6 zeigt den Wert des kombinierten Spieles M für verschiedene α. Da B den Wert 15/4 und $-A$ den Wert -1 hat (siehe Übung 2), ist der Wert des Spieles M für die Werte von α in der Nähe von 0 fast 15/4, und für sehr große α nähert sich der Wert $2 - \alpha$, liegt also unterhalb 0 (siehe Übung 3).

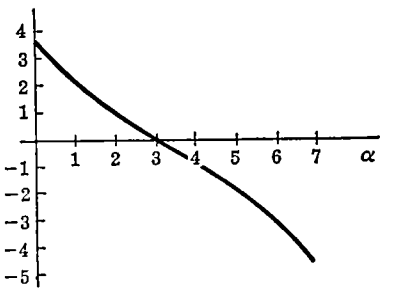


Abb. 6

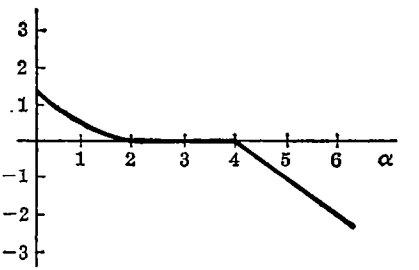


Abb. 7

Wir wissen, daß es wenigstens ein α gibt, für das das Spiel $B - \alpha A$ den Wert 0 hat. Wählen wir diesen Wert für α und ein Paar optimaler Strategien x und y, so erhalten wir einen Satz von Größen, die den Axiomen 1′ und 2′ entsprechen. Es steht jedoch noch nicht fest, ob sie den Bedingungen des Axioms 5 entsprechen.

Existieren zwei Werte für α, sagen wir $p < q$, für die der Wert des Spieles 0 ist, so hat auch jeder zwischen p und q liegende Wert diese Eigenschaften. Das ist auf die Tatsache zurückzuführen, daß, wie wir oben sahen, der Wert des Spieles nicht in dem gleichen Maße wie α zunimmt. Es muß also die in Abb. 7 dargestellte Situation vorliegen. Man kann jedoch zeigen, daß die

meisten dieser Werte Produktionsmethoden darstellen, bei denen nichts Nützliches produziert wird, d. h. bei denen das Axiom 5 nicht erfüllt ist. Um andere Werte für α zu finden, die dem Axiom 5 genügen, muß wenigstens ein neuer Prozeß eingeführt werden. Da die Anzahl der möglichen Prozesse begrenzt ist, existiert auch nur eine begrenzte Anzahl möglicher Werte für α innerhalb des Intervalls von p bis q. Ist p die kleinstmögliche Wachstumsrate und q die größte, so erfüllen p und q Axiom 5, und es existiert sicherlich noch eine begrenzte Anzahl zusätzlicher Werte zwischen diesen beiden.

Beispiel 2. In einem Betrieb der chemischen Industrie wollen wir die Komponenten P, Q und R herstellen. Wir wollen voraussetzen, daß die grundlegenden Chemikalien mehr als genug zur Verfügung stehen und daß deren Kosten für diese Analyse vernachlässigt werden können. Um jedoch das Gut P herstellen zu können, benötigen wir je eine Einheit von P und Q, während wir zur Herstellung des Gutes Q die Stoffe P und R benötigen. Das Gut R sei ein Nebenprodukt beider Herstellungsprozesse. Die genauen Mengen ergeben sich wie folgt:

$$\begin{array}{ll} & \begin{matrix} P & Q & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Herstellung von } P \\ \text{Herstellung von } Q \end{matrix} & A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{array} \qquad \begin{array}{l} \begin{matrix} P & Q & R \end{matrix} \\ B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Es ist dann

$$M = B - \alpha A = \begin{pmatrix} 6-\alpha & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 3 & 2-\alpha \end{pmatrix}.$$

Es sei

$$x = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \text{ und } y = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$xM = [3-\alpha, \tfrac{1}{2}(3-\alpha), \tfrac{1}{2}(3-\alpha)] \text{ und } My = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(3-\alpha) \\ \frac{2}{3}(3-\alpha) \end{bmatrix}.$$

Wir ersehen daraus, daß dann, wenn $\alpha < 3$ der Zeilenspieler über einen garantierten Gewinn verfügt, während dem Spaltenspieler dann ein Gewinn garantiert werden kann, wenn $\alpha > 3$. Die einzige Möglichkeit ist demnach $\alpha = 3$. Für diesen Fall ist der Wert des Spieles 0, und die Vektoren x und y sind optimale Strategien. Das ergibt sich aus der Tatsache, daß alle Komponenten von xM und My 0 sind. Es existiert also ein eindeutiges Gleichgewicht mit $\alpha = \beta = 3$.
Wir sehen ferner, daß die gemischte Strategie x eindeutig ist, was bedeutet, daß die beiden Prozesse mit der gleichen Intensität durchzuführen sind. Dies gilt jedoch nicht für die Strategie y. An ihrer Stelle könnten wir auch

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } y'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

oder jede Mischung $ty' + (1-t)y''$, $0 \leqq t \leqq 1$ wählen. Für unser y ist $t = 1/3$. Wir sehen also, daß verschiedene Preisstrukturen möglich sind, die alle zur gleichen Wachstumsrate führen.

Beispiel 3. Das hier benutzte Modell einer „Volkswirtschaft" ist die schematische Darstellung der Produktion von lebensnotwendigen Gütern und Luxusgütern in einer Gesellschaft. Wir haben hier alle Güter in zwei Gruppen aufgeteilt, und zwar in N (notwendige Güter) und L (Luxusgüter). Für die Herstellung von N benötigen wir nur notwendige Güter (da alles das, was zu ihrer Produktion notwendig ist, als notwendiges Gut betrachtet wird). Für die Herstellung von L können wir beide Rohmaterialarten verwenden. Wir wollen nun annehmen, daß unsere Volkswirtschaft wie folgt arbeitet:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Produktion von notwendigen Gütern} \\ \text{Produktion von Luxusgütern} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} N & L \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} N & L \end{array} \\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Es ist dann

$$M = B - \alpha A = \begin{pmatrix} 4-\alpha & 0 \\ -\alpha & 2-\alpha \end{pmatrix}.$$

Mit etwas Geduld können wir die Werte von M für die verschiedenen Werte von α bestimmen, und wir gelangen dann zu der in Abb. 7 gezeigten Kurve (siehe Übung 4). α muß also zwischen 2 und 4 liegen. Für $\alpha = 4$ gelten die optimalen Strategien

$$x = (1, 0) \text{ und } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die allen unseren Axiomen entsprechen, während für $\alpha = 2$ die Strategien

$$x = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \text{ und } y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten.

Für dazwischenliegende Werte von α gilt Axiom 5 nicht (siehe Übungen 5—7). Es gibt also zwei mögliche Gleichgewichte: 1. Die Gesellschaft kann sich dazu entscheiden, nur notwendige Güter herzustellen. In diesem Fall würde die Produktion schnell ansteigen. 2. Ordnet man den Luxusgütern einen genügend hohen Wert zu, so kommt man zu einem Gleichgewichtszustand, in dem sowohl notwendige Güter als auch Luxusgüter produziert werden, in dem jedoch die Wachstumsrate wesentlich kleiner ist.

Damit haben wir die drei am Ende des letzten Abschnittes gestellten Fragen vollkommen beantwortet und eine mathematische Lösung für eine Reihe wirtschaftlicher Probleme dargestellt.

ÜBUNGEN

1. Zeigen Sie für Beispiel 1, daß das Spiel M für $\alpha = 3$ den Wert 0 hat und daß die gegebenen x und y optimale Strategien sind.
2. Lösen Sie in Beispiel 1 die 2×2 Spiele B und $-A$ und bestimmen Sie ihre Werte und Paare optimaler Strategien.
3. Lösen Sie für Beispiel 1 die folgenden Aufgaben:
   a) Zeigen Sie, daß das Spiel M nicht für jedes α streng determiniert ist.
   b) Bestimmen Sie für ein beliebiges α den Wert von M.
   [Lös.: $(5 + \alpha)(3 - \alpha)/(4 + \alpha)$.]
   c) Zeigen Sie, daß sich der Wert für $\alpha = 0{,}01$ 15/4 nähert.
   d) Zeigen Sie, daß sich der Wert für $\alpha = 100$ —98 nähert.
   e) Zeigen Sie, daß der Wert nur für $\alpha = 3$ Null ist.

4. Bestimmen Sie in Beispiel 3 für $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und 6 den Wert von M. [Hinw. Einige dieser Spiele sind streng determiniert.]
[Lös.: 1,33; 0,60; 0; 0; 0; —1,0; —2,0.]

5. Zeigen Sie, daß in Beispiel 3 für $\alpha = 4$ die gegebenen Strategien optimal sind und daß Axiom 5 erfüllt wird.

6. Zeigen Sie, daß in Beispiel 3 für $\alpha = 2$ die gegebenen Strategien optimal sind und daß Axiom 5 erfüllt wird.

7. Bestimmen Sie in Beispiel 3 für $\alpha = 3$ die eindeutig optimalen x und y und zeigen Sie, daß Axiom 5 nicht erfüllt wird. Zeigen Sie, daß das gleiche für jedes α der Fall ist, für das $2 < \alpha < 4$.

Für die verbleibenden Übungen dieses Abschnittes wird die folgende Volkswirtschaft zugrunde gelegt: Es gebe vier Güter und fünf Prozesse, und die Volkswirtschaft werde durch die folgenden Matrizen beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei ferner

$$x = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0, 0), \qquad x' = (0, 0, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, 0),$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8. Zeigen Sie ferner, daß A und B die Voraussetzungen erfüllen.

9. Errechnen Sie $M = B - \alpha A$.

10. Errechnen Sie xM, $x'M$, My und My'.

11. Wann sind alle Komponenten von $x'M$ positiv? Wann sind alle Komponenten von My' negativ? Welche Möglichkeiten verbleiben dann für α?
[Lös.: $\alpha < 2$, $\alpha > 3$, $2 \leqq \alpha \leqq 3$.]

12. Zeigen Sie, daß das Spiel M für die verbleibenden möglichen Werte von α den Wert 0 hat und daß x und y optimale Strategien sind.

13. Zeigen Sie, daß die Vektoren x und y' für das größtmögliche α optimale Strategien darstellen, die Axiom 5 erfüllen.

14. Zeigen Sie, daß für das kleinstmögliche α die Vektoren x' und y optimale Strategien darstellen, die das Axiom 5 erfüllen.

15. Nehmen Sie an, α befinde sich zwischen seinen zwei extremen Werten. Zeigen Sie, daß
   a) die letzten zwei Komponenten von xM positiv sind und daß daher der zweite Spieler nur seine ersten zwei Strategien verwenden kann,
   b) die letzten drei Komponenten von My negativ sind und daher der erste Spieler nur seine ersten beiden Strategien verwenden kann,
   c) für diese Fälle das Axiom 5 nicht erfüllt werden kann.

16. Der Prozeß Nummer 5 nimmt eine Sonderstellung ein. Warum?
[Lös.: Er wird nie ausgenutzt.]

17. Zeigen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übungen 8 bis 16, daß es für diese Volkswirtschaft genau zwei mögliche Gleichgewichtszustände gibt. Interpretieren Sie jedes der Gleichgewichte und nennen Sie die Unterschiede zwischen den beiden Ablaufsweisen der Volkswirtschaft.
[Lös.: Die Volkswirtschaft kann für den Preis einer kleineren Wachstumsrate eine größere Produktzahl herstellen. Um dies zu erreichen, muß den zusätzlichen Güterarten jeweils ein (verhältnismäßig) hoher Wert zugeordnet werden.]

*9. Die Lösung von Matrixspielen mit Hilfe der Simplexmethode

Bis jetzt haben wir unsere Aufmerksamkeit auf zwei Beispiele von Matrixspielen beschränkt, die unkompliziert genug waren, um durch einfache Rechnung gelöst werden zu können. Spiele realistischer Größe führen jedoch häufig zu sehr großen Matrizen, für die diese einfachen Techniken nicht adäquat sind. Ein kleiner Hinweis auf eine allgemeinere Lösungstechnik mag in der Tatsache gesehen werden, daß der Zeilenspieler ein maximierender Spieler und der Spaltenspieler ein minimierender Spieler ist. Das Problem klingt in dieser Formulierung ähnlich dem Programm des dualen, linearen Programmierens, das wir in Kapitel 7 besprachen. Wenn wir ein Matrixspiel als ein Problem der linearen Programmierung formulieren können, so können wir es mit der im vorigen Kapitel besprochenen Simplexmethode lösen.
Man kann auf verschiedene Weisen zeigen, daß ein Matrixspiel einem linearen Programm äquivalent ist. Wir wollen an dieser Stelle eine sehr einfache Methode wählen, die auf der in Abschnitt 4 bewiesenen Tatsache aufbaut, daß jedes Matrixspiel einem solchen äquivalent ist, dessen Komponenten, und damit auch dessen Wert positiv sind.

Neben der Formulierung eines äquivalenten Problems der linearen Programmierung werden wir mit Hilfe des Dualitätstheorems der linearen Programmierung beweisen, daß jedes Matrixspiel eine Lösung hat.

Es sei G ein $m \times n$ Matrixspiel und E die nur aus Einsen bestehende $m \times n$ Matrix. Nach dem zweiten Theorem des Abschnittes 4 haben nun G und $G + kE$ die gleichen optimalen Strategien, und der Wert des zweiten Spieles ist k plus dem Wert des ersten Spieles. Beginnen wir also mit einem beliebigen Spiel G, so können wir es durch ein Spiel G' ersetzen, dessen Komponenten alle positiv sind und das die gleichen optimalen Strategien besitzt. So könnten wir z. B. G' dadurch gewinnen, daß wir jeder Komponenten von G 1 minus dem größten negativen Wert von G hinzuzählen.

Wir können also ohne Verlust auf Allgemeingültigkeit G als ein positives Matrixspiel ansehen. Wir wollen ferner mit e den n-komponentigen Zeilen-

vektor bezeichnen, dessen Komponenten auch alle gleich 1 sind. x sei ein m-komponentiger Zeilenvektor und y ein n-komponentiger Spaltenvektor. Wir können nun die folgenden dualen Probleme des linearen Programmierens betrachten:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Min } xf \\ \text{unter der Bedingung} \\ xG \geqq e \\ x \geqq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Max } ey \\ \text{unter der Bedingung} \\ Gy \leqq f \\ y \geqq 0. \end{cases}$$

Beachten Sie, daß $y = 0$ den Einschränkungen des Maximierungsproblemes genügt und daß, da die Komponenten von G und f positiv sind, wenigstens ein Vektor y existiert, der ungleich 0 ist und der diese Einschränkungen erfüllt. Weiterhin ist die Klasse der zulässigen Vektoren y begrenzt. Auf Grund dieser Tatsachen und da e nur aus positiven Komponenten besteht, ist die Lösung des Maximierungsproblemes y^0 mit $ey^0 > 0$. Nach dem Dualitätstheorem hat also das Minimierungsproblem eine Lösung x^0 und

$$t = x^0 G y^0 = x^0 f = ey^0 > 0.$$

Wir setzen nun

$$p^0 = \frac{x^0}{t}, \quad q^0 = \frac{y^0}{t} \text{ und } v = \frac{1}{t}$$

und erkennen, daß p^0 und q^0 Wahrscheinlichkeitsvektoren sind.
Es ist leicht zu sehen, daß p^0 in G eine optimale Strategie für den Spieler Z ist, da x^0 den Einschränkungen des Maximierungsproblemes genügt und da

$$p^0 G = \frac{x^0 G}{t} \geqq \frac{e}{t} = V$$

(wobei V in Abschnitt 3 als der Zeilenvektor definiert wurde, dessen Komponenten alle v betragen). In Übung 1 wird der Leser gebeten, entsprechend zu zeigen, daß $Gq^0 \leqq V'$ ist. Wir wollen diese Ergebnisse im folgenden Theorem zusammenfassen:

Theorem: a) Die Lösung des Matrixspieles G, dessen Komponenten positiv sind, erhält man durch die Lösung des dazu dualen, linearen Programmierungsproblemes (1). b) Jedes Matrixspiel hat wenigstens eine Lösung. Die Lösungen solcher Spiele können mit Hilfe der Simplexmethode gefunden werden.

An und für sich ist es für die Lösung eines Matrixspieles mit Hilfe der Simplexmethode nicht nötig, daß das Matrixspiel positiv ist. Es genügt, daß sein Wert positiv ist. In Übung 3 wird der Leser aber aufgefordert werden, ein spezielles Beispiel eines linearen Programmierungsproblemes zu finden, für das keine Lösung existiert, wenn es auf ein Spiel mit dem Wert 0 angewandt wird.

Ehe wir zu speziellen Beispielen übergehen, wollen wir noch einmal zusammenfassen, wie bei der Aufstellung eines Matrixspieles für die Lösung mit Hilfe der Simplexmethode vorzugehen ist:

1. Stellen Sie die Auszahlungsmatrix auf.

2. Überprüfen Sie, ob das Spiel einen Sattelpunkt hat. Ist dies der Fall, so liegt die Lösung bereits vor.

3. Überprüfen Sie die Zeilen und Spalten auf Dominanten und entfernen Sie die Zeilen und Spalten, die durch andere dominiert werden.

4. Überzeugen Sie sich davon, daß der Wert des Spieles positiv ist. Zu diesem Zweck genügt es, jeder Komponenten der Matrix 1 minus der höchsten negativen Komponenten hinzuzufügen. Der eventuell jeder Komponente der Matrix hinzugefügte Wert sei k.

5. Es sei G die Matrix des resultierenden Spieles. Nehmen Sie an, es sei G eine $m \cdot n$-Matrix. Es sei dann E die $m \cdot n$ Einsmatrix, und e und f seien wie oben definiert. Setzen Sie diese Größen in die folgende Matrix ein:

G	E	f
$-e$	0	0

6. Führen Sie die Schritte des Simplexalgorithmus solange durch, bis alle Indikatoren nicht-negativ sind. Bestimmen Sie die Lösungen x^0 und y^0 des dualen, linearen Programmierungsproblemes und setzen Sie $t = x^0 f = e y^0$. Dabei ist $t > 0$.

7. Die Lösungen des ursprünglichen Matrixspieles sind dann gegeben durch

$$p^0 = \frac{x^0}{t}, \quad q^0 = \frac{y^0}{t} \text{ und } v = \frac{1}{t} - k.$$

(Wurden dominierte Zeilen oder Spalten aus dem Spiel entfernt, so müssen wir evtl. den Strategievektor durch die Hinzufügung einiger Nullen erweitern.)

Beispiel 1. Wir wissen, daß das Knobeln mit Münzen fair ist, d. h. daß sein Wert 0 ist. Um ihm einen positiven Wert zu geben, addieren wir zu jeder Komponente der Matrix $k = 2$ und erhalten das folgende Spiel:

3	1
1	3

Offensichtlich ist dieses Spiel nicht streng determiniert und verfügt über keine dominierenden Zeilen oder Spalten. Wir stellen nun das Simplextableau auf und lösen es wie in den Abb. 8a—c gezeigt.

	A_1	A_2		
	③	1	1	0	1
	1	3	0	1	1
	−1	−1	0	0	0

(a)

	A_1	A_2		
A_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(b)

	A_1	A_2		
A_1	1	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
A_2	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(c)

Abb. 8

Aus dem Endtableau der Abb. 8c ersehen wir, daß der Wert des Spieles 2 (der reziproke Wert von $t = 1/2$) ist, so daß, wie wir bereits wissen, der Wert des Münzspieles 0 ist. Die optimalen Strategien sind

$$p^0 = \frac{x^0}{t} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \text{ und } q^0 = \frac{y^0}{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

was wir bereits früher feststellten.

Beispiel 2. Wir wollen nun das in Übung 3 des Abschnittes 2 beschriebene Spiel lösen. Um dieses Spiel in eines mit positivem Wert zu verwandeln, addieren wir zu jeder Komponenten der Matrix 3, wodurch in der Spielmatrix, die dadurch entsteht, zwei Werte 0 werden. Diese Nullen vereinfachen die auszuführenden Simplexrechnungen. Die Spielmatrix ist nun

5	0
0	7

.

In den Abb. 9a—c zeigen wir das Ausgangstableau und zwei weitere Simplextableaus.

	A_1	A_2		
	⑤	0	1	0	1
	0	7	0	1	1
	−1	−1	0	0	0

(a)

	A_1	A_2		
A_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
	0	⑦	1	1	0
	0	−1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

(b)

	A_1	A_2			
A_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
A_2	0	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{12}{35}$

(c)

Abb. 9

Aus Abb. 9c ersehen wir, daß der Wert des Spieles 35/12 ist, d. h., der Wert des ursprünglichen Spieles ist $35/12 - 3 = 1/12$. Die optimalen Strategien stimmen mit denen, die wir in den Übungen gefunden haben, überein.

Beispiel 3. Betrachten Sie nun das folgende Spiel: Z und S spielen gleichzeitig eine, zwei oder drei Münzen aus. Spielen gleichzeitig beide die gleiche Anzahl Münzen aus, so wird kein Geld ausgetauscht. Unterscheiden sich jedoch die Zahlen der ausgespielten Münzen, so bekommt Z die ungeraden Summen und S die geraden Summen. Die Matrix des Spieles ist dann

		Z spielt aus 1	2	3
	1	0	3	−4
S spielt aus	2	3	0	5
	3	−4	5	0

.

Da die zweite Zeile vollkommen aus nicht-negativen Komponenten besteht, ist das Spiel, wenn es nicht 0 ist, günstig für Z. Spielt Z die ersten zwei Zeilen mit gleichem

Gewicht, so sind seine Erwartungen positiv. Der Wert des Spieles ist also positiv, und wir müssen den Matrixkomponenten nichts hinzufügen. Die Abb. 10a—d zeigen die Simplexrechnungen, die durchgeführt werden müssen.

	A_1	A_2	A_3				
	0	3	−4	1	0	0	1
	③	0	5	0	1	0	1
	−4	5	0	0	0	1	1
	−1	−1	−1	0	0	0	0

(a)

	A_1	A_2	A_3				
	0	③	−4	1	0	0	1
A_1	1	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	0	5	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{7}{3}$
	0	−1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(b)

	A_1	A_2	A_3				
A_2	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
A_1	1	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	0	0	$\frac{40}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

(c)

	A_1	A_2	A_3				
A_2	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
A_1	1	0	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
A_3	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{20}$
	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{7}{10}$

(d)

Abb. 10

Wir ersehen daraus, daß der Wert des Spieles $1/t = 10/7$ ist und daß die optimalen Strategien

$$p^0 = \frac{x^0}{t} = (\tfrac{5}{14}, \tfrac{4}{7}, \tfrac{1}{14}) \text{ und } q^0 = \frac{y^0}{t} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} \end{pmatrix}.$$

sind. Der Leser sollte sich davon überzeugen, daß diese Strategien das Spiel lösen.

Die soeben gelösten Beispiele hätten genausogut ohne Verwendung der Simplexmethode gelöst werden können. Mit ihrer Hilfe sind jedoch auch wesentlich größere Spiele gut zu lösen, bei denen eine direkte Durchrechnung sehr schwierig wäre.

ÜBUNGEN

1. Zeigen Sie, daß q^0 dann eine optimale Strategie für Spieler S im Matrixspiel G ist, wenn $q^0 = y^0/t$ ist, wobei y^0 das in (1) dargestellte Maximierungsproblem löst und $t - ey^0$ ist.
2. Lösen Sie die folgenden Spiele mit Hilfe der Simplexmethode.

(a)

1	0	3
−2	3	0
−4	5	−6

(b)

−2	3	0	5	−6
3	−4	5	0	7
−4	5	−6	7	0

3. Betrachten Sie das Spiel mit der folgenden Matrix:

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

   a) Setzen Sie die Werte direkt in das in Regel (5) gezeigte Tableau ein, und zeigen Sie, daß hier die Simplexmethode nicht anwendbar ist.
   b) Betrachten Sie das in (1) definierte lineare Programmierungsproblem im Zusammenhang mit diesem G, und zeigen Sie, daß hier keine Lösung vorliegt.
4. Leiten Sie mit Hilfe der Simplexmethode die in Abschnitt 2 für die Ermittlung optimaler Strategien bei nicht streng determinierten 2×2 Spielen gegebenen Formeln (3) bis (7) ab.
5. Lösen Sie Übung 8 des Abschnittes 3 mit Hilfe der Simplexmethode.
6. Lösen Sie Übung 10 des Abschnittes 3 mit Hilfe der Simplexmethode.
7. Ein Teilnehmer an einer Vergnügungsreise werde durch einen Fremden (Spieler) angesprochen, der ihm das folgende Spiel antrage: „Nehmen Sie ein rotes As und eine schwarze 2, und ich werde eine rote 2 und eine schwarze 3 nehmen. Dann werden wir uns gleichzeitig jeweils eine der Karten zeigen, und wenn wir verschiedene Farben zeigen, zahlen Sie an mich; zeigen wir die gleichen, so zahle ich an Sie. Ist dabei Ihre Karte das rote As, so soll eine Zahlung in Höhe der Differenz

der auf den Karten befindlichen Zahlen gezahlt werden. Spielen Sie jedoch die schwarze 2, so soll die Summe der Zahlen die Höhe der Zahlung bestimmen. Da Sie entweder 2 DM oder 4 DM an mich zu zahlen haben, wenn Sie verlieren, und ich Ihnen entweder 1 DM oder 5 DM zahle, wenn ich verliere, ist das Spiel offensichtlich fair." Stellen Sie nun dieses Matrixspiel auf und lösen Sie es mit Hilfe der Simplexmethode. Zeigen Sie, daß das Spiel nicht fair ist. Bestimmen Sie die optimalen Strategien. [Teillös.: Der Fremde wird im Durchschnitt pro Spiel 25 Pf gewinnen.]

8. Betrachten Sie nun das folgende Spiel: Z wähle 0 oder 1 und teile seine Wahl S mit. S wähle auch 0 oder 1, teile dies jedoch Z nicht mit. Z wähle daraufhin ein zweites Mal eine 0 oder eine 1. Nun werde die Summe der drei gewählten Zahlen gebildet und Z erhalte ungerade Summen, während S gerade Summen erhalte.
   a) Zeigen Sie, daß für Z vier Strategien vorhanden sind: 00, 01, 10, 11.
   b) Zeigen Sie, daß auch S über vier Strategien verfügt: 1. immer 0 wählen, 2. das gleiche wählen wie Z, 3. das Gegenteil von Z wählen, 4. immer 1 wählen.
   c) Zeigen Sie, daß die Auszahlungsmatrix dieses Spieles wie folgt aussieht:

	(1)	(2)	(3)	(4)
00	0	0	1	1
01	1	1	−2	−2
10	1	−2	1	−2
11	−2	3	−2	3

   d) Lösen Sie dieses Spiel mit Hilfe der Simplexmethode. Bestimmen Sie seinen Wert und seine optimalen Strategien.

$$\left[\text{Lös.: } x^0 = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, 0),\ y^0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{9}{20} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix},\ v = \tfrac{1}{4}.\right]$$

9. Rechnen Sie Übung 8 noch einmal unter der Annahme durch, daß die Spieler jedesmal eine 1 oder eine 2 wählen.

10. *Das lautlose Duell.* Zwei Personen, die sich duellieren, haben je eine Pistole, in der sich eine Kugel befindet und die mit einem Schalldämpfer versehen ist. Sie gehen nun in N Schritten aufeinander zu, und jeder von ihnen kann am Ende eines jeden Schrittes auf seinen Gegner schießen. Keiner von beiden weiß, ob sein Gegner bereits geschossen hat, und jeder von ihnen darf während des Spieles nur einen Schuß abgeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Spieler seinen Gegner trifft, beträgt nach k gegangenen Schritten k/N. Ein Spieler bekomme einen Punkt, wenn er seinen Gegner getötet hat, ohne selbst getötet worden zu sein, und andernfalls 0 Punkte. Jeder der Spieler verfügt über N Strategien, die dem Schießen nach 1, 2, ..., N Schritten entsprechen. Es sei i die von Z gewählte Strategie und j die von S gewählte Strategie.
   a) Zeigen Sie, daß die erwartete Auszahlung für Z für $i < j$ durch

$$\frac{N(i-j)+ij}{N^2}$$

   gegeben wird.

b) Zeigen Sie, daß die erwartete Auszahlung für Z bei $i > j$ durch

$$\frac{N(i-j)-ij}{N^2}$$

gegeben wird.

c) Zeigen Sie, daß die erwartete Auszahlung für Z bei $i = j$ Null ist.

11. Beweisen Sie, daß das Spiel in Übung 10 für $N = 2$, 3 und 4 streng determiniert und fair ist. Zeigen Sie ferner, daß die optimale Strategie für $N = 3$, 4 in jedem Falle ist, nach dem zweiten Schritt zu schießen. Zeigen Sie ferner, daß für $N = 2$ jede Strategie optimal ist.

12. Zeigen Sie, daß das Spiel in Übung 10 für $N = 5$ nicht streng determiniert und fair ist, und bestimmen Sie dafür die optimalen Strategien.
[Lös.: $p^0 = (0, 5/11, 5/11, 0, 1/11)$ und q^0 ist der Spaltenvektor, der aus den gleichen Komponenten besteht.]

13. Bei einem symmetrischen Matrixspiel G ist $g_{ij} = -g_{ij}$ für $i,j = 1, 2, \ldots, n$. Mit anderen Worten, für jede Zahlung von S an Z besteht eine gleiche Zahlung von Z an S. Zeigen Sie, daß jedes symmetrische Spiel fair ist. [Hinw. Zeigen Sie, daß dann, wenn x^0 für Z optimal ist, der Spaltenvektor y mit $y_k = x_k{}^0$ für $k = 1, \ldots, n$ für S optimal ist. Leiten Sie davon ab, daß der Wert des Spieles 0 ist.]

14. Zeigen Sie unter Benutzung des Ergebnisses der Übung 13, daß das lautlose Duell für jedes N fair ist.

15. Betrachten Sie ein Matrixspiel G, dessen Wert positiv ist und dessen erste Zeile über die zweite dominiert. Zeigen Sie, daß im Rahmen des Simplexalgorithmus nie ein Wert der zweiten Zeile als Schlüsselzahl gewählt werden wird.

16. Betrachten Sie ein Matrixspiel G, dessen Wert positiv ist und dessen erste Spalte über die zweite dominiert. Zeigen Sie, daß dann, wenn die Schlüsselzahl aus der ersten Spalte gewählt wird, am Ende der ersten Simplexrechnung der Indikator der zweiten Spalte nicht negativ ist.

*10. Zwei-Personen-Nicht-Nullsummenspiele

Die bis jetzt in diesem Kapitel besprochenen Zwei-Personen-Nullsummenspiele stellen den bis jetzt am besten entwickelten Teil der Theorie der Spiele dar. Leider ist nicht immer möglich, Anwendungen der Spieltheorie in Form von Zwei-Personen-Nullsummenspielen zu formulieren. Statt dessen werden gewöhnlich zwei und mehr Personen-Nicht-Nullsummenspiele benötigt. Für solche Spiele sind bereits viele Lösungskonzepte vorgeschlagen worden, und es gibt sowohl für als auch gegen jedes der Konzepte genügend Argumente. Es gibt jedoch noch kein einziges Lösungskonzept, das für alle Fälle anwendbar ist.

Wir wollen in diesem Abschnitt lediglich Zwei-Personen-Nicht-Nullsummenspiele besprechen. Für diesen Spieltyp werden wir vier der vorgeschlagenen Lösungstypen betrachten: a) die Maximierungslösung, b) die Gleichgewichtspunktlösung, c) kooperative Lösungen und d) Drohlösungen. Im

Rahmen von Beispielen werden wir die Umstände beschreiben, für die jede dieser Lösungen anwendbar sein mag. In den Übungen werden dann weitere Lösungskonzepte betrachtet.

Ein Zwei-Personen-Nicht-Nullsummenspiel wird wie folgt definiert: Es gibt zwei Spieler Z und S wie vorher. Der Spieler Z verfügt über m Strategien $1, 2, \ldots, m$, während S über n Strategien $1, 2, \ldots, n$ verfügt. Wählt Z die Strategie i und S die Strategie j, so erhalten die Spieler den Auszahlungsvektor (a_{ij}, b_{ij}), wobei a_{ij} der Betrag ist, den Z erhält, und b_{ij} der, den S erhält. Es sei nun A die $m \times n$-Matrix mit den Komponenten a_{ij} und B die $m \times n$ Matrix mit den Komponenten b_{ij}. Hierbei ist es von Nutzen, die Auszahlungen (a_{ij}, b_{ij}) in rechteckiger Form anzuordnen, wie es in den folgenden Beispielen gezeigt wird. Ist $B = -A$, d. h. $b_{ij} = -a_{ij}$ für alle i und j, so reduziert sich das Spiel zu einem Nullsummenspiel und damit zu einem normalen Matrixspiel mit der Matrix A.

Beispiel 1. Nehmen Sie an, zwei Firmen Z und S entschieden sich dazu, zwei verschiedene Märkte 1 und 2 zu bearbeiten oder nicht. Auf Grund der Ergebnisse einer Marktuntersuchung stelle sich heraus, daß Z im ersten Markt und S im zweiten Markt stärker ist. Abb. 11 zeigt die Werte, die die beiden Firmen ihrem Eindringen auf jedem der Märkte zumessen. Hierbei stellen die Größen dieser beiden Vektoren vorausgeschätzte jährliche Gewinne dar, wobei die erste Zahl den Gewinn von Z und die zweite Zahl den Gewinn von S bedeute. Welche Strategien sollte nun jeder der Spieler wählen?

		S dringt ein in Markt 1	S dringt ein in Markt 2
Z dringt ein in	Markt 1	(15, 10)	(22, 20)
	Markt 2	(11, 13)	(10, 15)

Abb. 11

Die Lösung ist hier ziemlich offensichtlich, da Z, wenn er sich seine Gewinne ansieht, immer vorziehen wird, ohne Rücksicht auf das Verhalten von S in den Markt 1 einzudringen, während S immer den Markt 2 bevorzugen wird. Treffen sie ihre Entscheidungen in dieser Form, so erhält jeder von ihnen den höchstmöglichen Gewinn. Es liegt also eine Situation vor, in der die Spieler, wenn jeder nur in seinem eigenen Interesse handelt, zu einer Lösung gelangen, die für beide befriedigend ist.

Nehmen Sie nun an, die Marktuntersuchung ergebe die in Abb. 12 gezeigten Werte. Beachten Sie dabei, daß die in Abb. 12 gezeigten Werte denen der Abb. 11 mit zwei

		Z dringt ein in Markt 1	Z dringt ein in Markt 2
S dringt ein in	Markt 1	(15, 30)	(22, 20)
	Markt 2	(11, 13)	(30, 15)

Abb. 12

Ausnahmen gleichen; es wurden nämlich die beiden Auszahlungen von 10 jeweils in 30 geändert.
Beachten Sie ferner bitte, daß für Abb. 12 keine sofort ins Auge fallende Lösung wie für Abb. 11 besteht. Nehmen Sie an, daß Z die pessimistischste Annahme mache, nämlich, daß S ihm feindlich gesinnt sei und seinen Gewinn minimieren wolle. Z würde dann das Matrixspiel

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline 15 & 22 \\ \hline 11 & 30 \\ \hline \end{array}$$

lösen, das aus seinen eigenen Auszahlungen besteht. Es handelt sich hier um ein streng determiniertes Spiel, für das eine optimale Strategie „Dringe in Markt 1 ein" ist. Wäre S auch pessimistisch, so würde er entsprechend das Spiel

$$-B = \begin{array}{|c|c|}\hline -30 & -20 \\ \hline -13 & -15 \\ \hline \end{array}$$

lösen (bitte erinnern Sie sich daran, daß die b_{ij} die Zahlungen an S sind), wobei es sich wieder um ein streng determiniertes Spiel handelt, bei dem die optimale Strategie für S „Dringe in Markt 2 ein" ist. Folgen die zwei Spieler diesen Strategien, die wir *Maximierungs*strategien nennen wollen, so erreichen sie den gleichen Auszahlungsvektor, (22, 20), wie vorher.

Ehe wir mit der Behandlung des Beispieles 1 fortfahren, wollen wir den Begriff einer Maximierungsstrategie definieren.

Definition. Es sei G ein Nicht-Nullsummenspiel mit den Auszahlungen (a_{ij}, b_{ij}) für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. A sei die Matrix mit den Komponenten a_{ij} und B die Matrix mit den Komponenten b_{ij}. Eine *Maximin Strategie* für Z in G ist dann jede für ihn in dem Matrixspiel A optimale Strategie, während eine *Maximin Strategie* für S jede für ihn im Matrixspiel $-B$ optimale Strategie ist.

Beispiel 1 (Fortsetzung). Die Maximin Strategie für das in Abb. 11 gezeigte Spiel erhalten wir durch die Lösung der folgenden Matrixspiele:

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline 15 & 22 \\ \hline 11 & 10 \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad -B = \begin{array}{|c|c|}\hline -10 & -20 \\ \hline -13 & -15 \\ \hline \end{array}$$

Wir erhalten dann als optimale Strategie „Dringe in Markt 1 ein" für Z und „Dringe in Markt 2 ein" für S. Hierdurch erreichen wir wiederum den Auszahlungsvektor (22, 20).

Beachten Sie, daß die für die Spiele der Abb. 11 und 12 erhaltenen Antworten gleich sind und daß sie zum gleichen Auszahlungsvektor führen, daß

sie sich jedoch in ihren Stabilitätseigenschaften unterscheiden. Befinden sich die Spieler in Abb. 11 bei (22, 20), so besteht für keinen von ihnen ein Anreiz, diesen Zustand zu ändern. Befinden sich die Spieler jedoch in Abb. 12 am Punkt (22, 20), und Z nimmt an, daß S die gewählte Strategie beibehält, so würde er lieber seine Strategie „Dringe in Markt 1 ein" in die für ihn gewinnbringendere Strategie „Dringe in Markt 2 ein" ändern, da dies zum Auszahlungsvektor (30, 15) führen würde, der wesentlich günstiger für ihn ist. Nimmt S dagegen an, daß Z seine Strategie „Dringe in Markt 1 ein" beibehält, so würde er lieber von „Dringe in Markt 2 ein" auf „Dringe in Markt 1 ein" überwechseln, da dadurch seine Auszahlung von 20 auf 30 erhöht würde. Wir sehen also, daß der Punkt (22, 20) in Abb. 11 stabil, in Abb. 12 instabil ist.

Um die Eigenschaft der Stabilität einer Lösung berücksichtigen zu können, definieren wir sogenannte Gleichgewichtspunktstrategien.

Definition. Es sei G ein Nicht-Nullsummenspiel, und A und B seien die Auszahlungsmatrizen für Z bzw. für S. Das Paar gemischter Strategien p^0 und q^0 ist dann für Z und ein Paar von *Gleichgewichtspunktstrategien*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$pAq^0 \leqq p^0Aq^0 \qquad \text{für alle Strategien } p \text{ für } Z \text{ und}$$
$$p^0Bq \leqq p^0Bq^0 \qquad \text{für alle Strategien } q \text{ für } S.$$

Unter einem Gleichgewichtspunkt versteht man ein Paar Strategien, die die Eigenschaft besitzen, daß keiner der Spieler seine eigene Auszahlung durch einen Wechsel seiner Strategie vergrößern kann, solange er annehmen kann, daß sein Gegner seine Strategie beibehält. Man kann zeigen, daß jedes Nicht-Nullsummenspiel Gleichgewichtspunktlösungen hat.

Beispiel 1 (Fortsetzung). In dem in Abb. 11 dargestellten Spiel wird eine eindeutige Gleichgewichtspunktstrategie durch das Paar $p^0 = 1{,}0$ und $q^0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ gegeben. Der Auszahlungsvektor für diese beiden Strategien ist (22, 20). Im Spiel der Abb. 12 existieren jedoch zwei Gleichgewichtspunkte:

(i) $p^0 = (1, 0)$, $q^0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ mit dem Auszahlungsvektor (15, 30)

(ii) $p^0 = (0, 1)$, $q^0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ mit dem Auszahlungsvektor (30, 15).

Wir haben somit für das Spiel der Abb. 12 drei mögliche „Lösungen" ermittelt, nämlich eine Maximinlösung und zwei Gleichgewichtspunktlösungen. Keine dieser Lösungen wird von beiden Spielern klar einer anderen vorgezogen.

Die Theorie der Spiele ist nicht in der Lage, einem zu sagen, welche Lösung man wählen sollte, solange die Lösungskonzepte nicht eindeutig sind, oder wie sich einer der Spieler verhalten sollte, um eine von ihnen zu erreichen. Bei kürzlich durchgeführten Versuchen konnte man lediglich einige experi-

mentelle Bedingungen definieren, unter denen die eine oder andere Art von Lösung wahrscheinlich erreicht wird, wenn man solche Spiele durch das gleiche Spielerpaar oft wiederholen läßt. Für solche Spiele mögen psychologische, historische, rechtliche oder moralische Gesichtspunkte den Ausschlag geben, welche der Lösungen in Wirklichkeit erreicht würde.

Beispiel 2. Als nächsten Fall wollen wir ein Spiel wählen, das über gemischte Maximinstrategien verfügt, die wiederum nicht den Gleichgewichtspunktstrategien entsprechen. Betrachten Sie das Marktkampfspiel, dessen Auszahlungen in Abb. 13 gegeben werden.

		S dringt ein in Markt 1	S dringt ein in Markt 2
Z dringt ein in	Markt 1	(10, 10)	(20, 30)
	Markt 2	(30, 20)	(15, 15)

Abb. 13

Um die Maximinstrategien zu ermitteln, lösen wir die Spiele

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline 10 & 20 \\ \hline 30 & 15 \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad -B = \begin{array}{|c|c|}\hline -10 & -30 \\ \hline -20 & -15 \\ \hline \end{array},$$

wobei wir als optimale Strategien $p^0 = (3/5, 2/5)$ für Z und $q^0 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ für S erhalten. Der erwartete Auszahlungsvektor für die Spieler bei Benutzung dieser Strategien ist (18, 18), wovon sich der Leser leicht selbst überzeugen kann. Es gibt zwei Gleichgewichtspunkte, nämlich

(a) $p^0 = (1, 0)$ und $q^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Auszahlungsvektor (20, 30),

(b) $p^0 = (0, 1)$ und $q^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Auszahlungsvektor (30, 20).

Bitte beachten Sie, daß keine der Gleichgewichtspunktstrategien bessere Ergebnisse erreicht, als mit der Maximinstrategie zu erreichen sind. Der Spieler Z wird jedoch sicherlich den Gleichgewichtspunkt (*b*) bevorzugen, während der Spieler S mit Sicherheit nach dem Gleichgewichtspunkt (*a*) strebt. Es gibt hier also wieder drei mögliche Lösungen, von denen jede in Abhängigkeit von den anderen bestimmenden Faktoren auftauchen wird.

In Spielen der in Abb. 12 und 13 gezeigten Art, sind die beiden Spieler sicherlich dazu geneigt, Absprachen zu treffen und die Strategien zu wählen, die die Summe ihrer Auszahlungen maximieren. Dies wäre besonders wünschenswert, wenn irgendein Weg bestünde, auf dem sie ihre Gesamteinnahmen teilen könnten. So wäre z. B. in Beispiel 2 der Gleichgewichts-

punkt (a) für beide Spieler dann erstrebenswert, wenn S an Z eine Zahlung von 5 leisten könnte. Man könnte sich auch auf irgendeine andere Aufteilung der Auszahlungen einigen.

Definition. Es sei G ein Nicht-Nullsummenspiel. Unter einer *kooperativen Lösung* von G verstehen wir dann ein Paar Strategien p^0 und q^0, durch die die Größe

$$p^0Aq^0 + p^0Bq^0 = p^0(A + B)q^0$$

maximiert wird.

Beachten Sie, daß die Definition einer kooperativen Lösung nichts darüber aussagt, wie zwei Spieler ihren Gesamtgewinn teilen sollten. Man hat dafür die verschiedensten Vorschläge gemacht, keiner von ihnen befriedigt jedoch in allen Fällen. Es soll weiterhin darauf aufmerksam gemacht werden, daß durchaus rechtliche oder moralische Gründe (wie z. B. Kartellgesetzgebung, moralische Gesetze usw.) verschiedene Arten der Kooperation bei wirklichen Spielen verbieten.

Beispiel 3. Um auf weitere Schwierigkeiten hinzuweisen, die bei diesen Lösungskonzepten auftauchen können, wollen wir das folgende Beispiel betrachten: Z und S sitzen an gegenüberliegenden Seiten eines Tisches. Auf dem Tisch liegen drei 1-DM-Stücke. Wenn sich die beiden über eine Teilung des Geldes einigen können (es gibt kein Wechselgeld), so können sie es behalten. Andernfalls bekommen sie nichts.
Wir können die Strategien der einzelnen Spieler als ihre Forderungen ansehen, die sie bezüglich ihres Anteiles stellen. Jeder der Spieler kann 0, 1, 2 oder 3 DM fordern. Abb. 14 zeigt die entsprechende Auszahlungstabelle. Da in diesem Spiel jede Strategie für jeden Spieler eine Maximinstrategie ist, werden die Handlungsweisen durch das Lösungskonzept nicht beschränkt.

		S fordert			
		0	1	2	3
Z fordert	0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)
	1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(0, 0)
	2	(2, 0)	(2, 1)	(0, 0)	(0, 0)
	3	(3, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)

Abb. 14

Es gibt vier Gleichgewichtspunkte mit den Auszahlungen (3, 0), (2, 1), (1, 2) und (0, 3). Jeder dieser Punkte ist gleichzeitig die Auszahlung einer kooperativen Lösung. Welche Lösung sollten wir nun wählen?
Wenn es Z und S gelänge, Wechselgeld aufzutreiben, so könnte jede Teilung des Gesamtgewinns für sie annehmbar sein. Wir wollen jedoch annehmen, daß eine solche Absprache ausgeschlossen ist. Es scheint unter diesen Umständen vernünftig, die Strategien 0 und 3 für jeden der Spieler auszuschließen, da die erste eine zu kleine und

die zweite eine zu große Forderung bedeutet. Führen wir dies durch, so können wir das in Abb. 15 gezeigte reduzierte Spiel betrachten. Hier führt die eindeutige Maximinstrategie zu den Auszahlungen (1, 1), während die Gleichgewichtspunktstrategien (2, 1) und (1, 2) ergeben.

		S fordert 1	S fordert 2
Z fordert	1	(1, 1)	(1, 2)
	2	(2, 1)	(0, 0)

Abb. 15

Die Maximinstrategie erbringt also, obwohl sie eindeutig ist, für jeden der Spieler weniger als jede der Gleichgewichtspunktstrategien. Wir sehen, daß die Theorie der Spiele für diese Situation keine eindeutige Lösung bereithält.

Beispiel 4. Müller und Schulze besitzen Tankstellen auf den gegenüberliegenden Seiten einer Straße. Diese beiden Tankstellen seien die einzigen in dieser Gegend. Die Besitzer haben lediglich die Möglichkeit, zwei verschiedene Preise, nämlich hoch oder niedrig, zu berechnen, und sie müssen am Anfang jeden Tages sich dazu entscheiden,welchen der Preise sie für diesen Tag verwenden sollen. Während eines Tages ist eine Änderung des Preises nicht möglich. Nehmen Sie an, daß ihre Bruttoeinnahmen den in Abb. 16 gezeigten entsprechen.

		Schulze berechnet hoch	Schulze berechnet niedrig
Müller berechnet	hoch	(10, 10)	(6, 16)
	niedrig	(16, 6)	(7, 7)

Abb. 16

Um diese Zahlen zu interpretieren, stellen Sie sich bitte vor, daß jeder dann 10 DM erhalte, wenn beide den hohen Preis berechnen. Verwenden beide den niedrigen Preis, so verringert sich ihr Einkommen auf 7 DM pro Tag. Berechnet schließlich einer den hohen Preis, der andere den niedrigen, so beträgt das Einkommen des einen 16 DM, während sein Gegner lediglich 6 DM bekommt. Wir wollen nun annehmen, daß jede der Tankstellen fixe Ausgaben von 8 DM pro Tag hat, so daß jeder Spieler dann Geld verliert, wenn sein Gegner den niedrigen Preis zur Anwendung bringt.

Wie der Leser selbst leicht überprüfen kann, führt die einzige Gleichgewichtspunkt- sowie die Maximinstrategie zu der Auszahlung (7, 7). Koperative Lösungen führen entweder zum Punkt (16, 6) oder zum Punkt (6, 16). Die Gesamteinnahme für die kooperative Lösung ist 22. Man könnte sich diese durch die Leistung von Zahlungen gleichmäßig teilen. Eine andere Art der Teilung könnte dadurch geschehen, daß man jeden Tag das gleiche Spiel spielt, jedoch die Spieler abwechselnd den hohen und den niedrigen Preis berechnen, so daß ihr Durchschnittseinkommen 11 DM betrüge.

Eine weitere Lösung, die für ein solches Spiel vorgeschlagen wurde, ist die folgende: Nehmen Sie an, Müller sei reicher als Schulze. Berechnet nun Müller den niedrigen Preis, so wird sicherlich Schulze Geld verlieren. Müller kann also auf folgende Weise *drohen*: „Wenn Sie einer 13 DM—19 DM Aufteilung nicht zustimmen, werde ich meinen

Preis solange herabsetzen, bis ich Sie bankrott gemacht habe." Da Müller über mehr Kapital verfügt als Schulze, ist die Drohung ernst zu nehmen und würde, wenn sie durchgeführt würde, zur Schließung des Geschäfts von Schulze führen. Würde auf der anderen Seite Schulze versuchen, auf ähnliche Art zu drohen, so würde er sich selbst ruinieren. Hier ist also Müller in der Lage, eine 13—9-Teilung zu erzwingen, und hat damit lediglich dadurch, daß er reicher ist, eine dominierende Stellung in einem Spiel, das andernfalls symmetrisch erschiene.

Obwohl wir allen diesen Lösungsvorschlägen gegenüber ziemlich skeptisch eingestellt waren, hat jede etwas für sich. Die Tatsache, daß keine von ihnen auf jedes vorstellbare Nicht-Nullsummenspiel paßt, weist vielleicht darauf hin, daß solche Spiele keine genügend nahe Annäherung an die wirklichen Verhältnisse bieten kann, um universell zufriedenstellende Antworten bieten zu können. Hier ist noch ein weites Feld für zukünftige Forschung.

ÜBUNGEN

1. Betrachten Sie die folgenden Nicht-Nullsummenspiele:

G_1

(10, 10)	(5, 8)
(8, 5)	(3, 3)

,

G_2

(10, 10)	(12, 5)
(5, 12)	(7, 7)

,

G_3

(10, 10)	(18, 5)
(5, 18)	(7, 7)

,

G_4

(10, 10)	(25, 15)
(15, 25)	(5, 5)

,

G_5

(10, 10)	(20, —5)
(—5, 20)	(0, 0)

,

G_6

(0, —2)	(15, —5)
(—5, 15)	(10, 10)

.

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, indem Sie die Auszahlungen für jede der drei Lösungstypen für die oben gezeigten Spiele einsetzen:

	Maximin	Gleichgewichtspunkt	Kooperativ
G_1	(10, 10)	(10, 10)	(10, 10)
G_2			
G_3			(5, 18) oder (18, 5)
G_4	(13, 13)	(15, 25) od. (25, 15)	
G_5			
G_6	(0, —2)		(10, 10)

2. Nehmen Sie in Übung 1 an, daß die beiden Spieler gleich reich seien und daß es keinen der beiden etwas koste, irgendeines der Spiele zu spielen. In welchem der Spiele, wenn überhaupt, ist eine Drohlösung anwendbar? Warum? [Lös.: G_6.]

3. Betrachten Sie das Problem des Beispieles 3, bei dem 2 DM zwischen Z und S zu teilen seien. Zeigen Sie, daß drei Gleichgewichtspunkte bestehen und daß gute Gründe dafür existieren, einen von ihnen als Lösung zu wählen. Führen Sie das Spiel versuchsmäßig zwischen zwei Spielern wiederholt durch, und stellen Sie fest, ob eine Tendenz zu dem besonderen Gleichgewichtspunkt hin besteht.

4. Betrachten Sie eine allgemeine Version der in Beispiel 3 geschilderten Situation, in der zwei Spieler N DM zu teilen haben. Zeigen Sie, daß dann ein besonderer Gleichgewichtspunkt existiert, wenn N gerade ist, und daß dies dann nicht der Fall ist, wenn N ungerade ist.

5. Unter einer *konkurrierenden Lösung* eines Zwei-Personen-Nicht-Nullsummenspiels verstehen wir eine Lösung, bei der Z und S die in dem Matrixspiel $A—B$ optimalen Strategien wählen. Bei diesem Lösungstyp erscheint es rational, wenn jeder der Spieler versucht, die Differenz zwischen seiner eigenen und der erwarteten Auszahlung seines Gegners zu maximieren. Bestimmen Sie die konkurrierenden Lösungen für die sechs Spiele der Übung 1.
[Teillös.: In G_1 ist es der Punkt (3, 3); in G_4 und G_5 der Punkt (10, 10)]

6. Ein Matrixspiel kann als ein Nicht-Nullsummenspiel bezeichnet werden, bei dem $b_{ij} = -a_{ij}$ für alle i und j. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Interpretation, daß ein Paar optimaler Strategien p^0 und q^0 eines Matrixspieles Gleichgewichtspunktlösungen des entsprechenden Nicht-Nullsummenspieles sind.

7. Zeigen Sie, daß wir in der Definition einer Maximinstrategie dann den Satz „S wählt eine optimale Strategie in dem Spiel $—B$“ durch „S wählt eine optimale Strategie in dem Spiel B“ in $2 \cdot 2$ Nullsummenspielen ersetzen können, wenn B nicht streng determiniert ist. Kommen wir zum gleichen Resultat, wenn B einen Sattelpunkt hat? [Lös.: Nein.]

8. Unter einer *rachsüchtigen Lösung* eines Zwei-Personen-Nicht-Nullsummenspieles verstehen wir eine Lösung, bei der Z eine optimale Strategie im Spiel $—B$ und S eine optimale Strategie im Spiel A wählt. Mit anderen Worten, jeder der Spieler versucht, die Auszahlung seines Gegners zu minimieren, ohne Rücksicht darauf, welche Konsequenzen das für ihn selbst hat. Bestimmen Sie rachsüchtige Lösungen für die Spiele der Übung 1. [Teillös.: Für G_1 gilt (3, 3), für G_4 gilt (13, 13).]

9. Beweisen Sie, daß Maximinstrategien für keinen der Spieler besser sein können als Gleichgewichtspunktstrategien.

10. Beweisen Sie, daß rachsüchtige Strategien für keinen der Spieler besser sein können als Maximinstrategien.

11. Beweisen Sie unter Benutzung der Ergebnisse der Übungen 9 und 10, daß rachsüchtige Strategien für keinen der Spieler besser sein können als Gleichgewichtspunktstrategien.

12. Beweisen Sie, daß dann eine Strategie konkurrierend ist, wenn sie für beide Spieler sowohl eine Maximinstrategie als auch rachsüchtig ist.

13. Zeigen Sie an Hand des folgenden Beispieles, daß eine Strategie sowohl eine Maximinstrategie als auch konkurrierend sein kann, ohne deshalb rachsüchtig sein zu müssen:

(10, 10)	(9, 9)
(9, 9)	(8, 8)

14. Zeigen Sie an Hand des Beispieles der Übung 13, daß eine Strategie durchaus sowohl konkurrierend als auch rachsüchtig sein kann, ohne dabei eine Maximinstrategie sein zu müssen.

15. Beweisen Sie, daß eine Strategie dann dem Maximin-Prinzip entspricht, wenn sie sowohl kooperativ als auch konkurrierend ist.

Empfohlene Lektüre:

Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele, Berlin 1959.
Henn, R.: Über dynamische Wirtschaftsmodelle, Stuttgart 1957.
Henn, R.: Strategische Spiele und unternehmerische Spiele, in ZfB 1958, S. 277.
Neumann, J. von, Morgenstern, von: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961.
Vajda, S.: Einführung in die Linearplanung und die Theorie der Spiele, München 1961.
Churchman, Arnoff, Ackoff: Operations Research, Wien 1961.
Zimmermann, H. J.: Mathematische Entscheidungsforschung und ihre Anwendung auf die Produktionspolitik, Berlin 1963.

Anhang

$$\mathbf{b}(r; n, p) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

n	r	$p = .01$	.02	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.40	.50
1	0	.990	.980	.950	.900	.850	.800	.750	.700	.600	.500
	1	.010	.020	.050	.100	.150	.200	.250	.300	.400	.500
2	0	.980	.960	.902	.810	.722	.640	.562	.490	.360	.250
	1	.020	.039	.095	.180	.255	.320	.375	.420	.480	.500
	2			.002	.010	.022	.040	.062	.090	.160	.250
3	0	.970	.941	.857	.729	.614	.512	.422	.343	.216	.125
	1	.029	.058	.135	.243	.325	.384	.422	.441	.432	.375
	2		.001	.007	.027	.057	.096	.141	.189	.288	.375
	3				.001	.003	.008	.016	.027	.064	.125
4	0	.961	.922	.815	.656	.522	.410	.316	.240	.130	.062
	1	.039	.075	.171	.292	.368	.410	.422	.412	.346	.250
	2	.001	.002	.014	.049	.098	.154	.211	.265	.346	.375
	3				.004	.011	.026	.047	.076	.154	.250
	4					.001	.002	.004	.008	.026	.062
5	0	.951	.904	.774	.590	.444	.328	.237	.168	.078	.031
	1	.048	.092	.204	.328	.392	.410	.396	.360	.259	.156
	2	.001	.004	.021	.073	.138	.205	.264	.309	.346	.312
	3			.001	.008	.024	.051	.088	.132	.230	.312
	4					.002	.006	.015	.028	.077	.156
	5							.001	.002	.010	.031
6	0	.941	.886	.735	.531	.377	.262	.178	.118	.047	.016
	1	.057	.108	.232	.354	.399	.393	.356	.303	.187	.094
	2	.001	.006	.031	.098	.176	.246	.297	.324	.311	.234
	3			.002	.015	.041	.082	.132	.185	.276	.312
	4				.001	.005	.015	.033	.060	.138	.234
	5						.002	.004	.010	.037	.094
	6								.001	.004	.016
7	0	.932	.868	.698	.478	.321	.210	.133	.082	.028	.008
	1	.066	.124	.257	.372	.396	.367	.311	.247	.131	.055
	2	.002	.008	.041	.124	.210	.275	.311	.318	.261	.164
	3			.004	.023	.062	.115	.173	.227	.290	.273
	4				.003	.011	.029	.058	.097	.194	.273
	5					.001	.004	.012	.025	.077	.164
	6							.001	.004	.017	.055
	7									.002	.008
8	0	.923	.851	.663	.430	.272	.168	.100	.058	.017	.004
	1	.075	.139	.279	.383	.385	.336	.267	.198	.090	.031
	2	.003	.010	.051	.149	.238	.294	.311	.296	.209	.109
	3			.005	.033	.084	.147	.208	.254	.279	.219
	4				.005	.018	.046	.087	.136	.232	.273
	5					.003	.009	.023	.047	.124	.219
	6						.001	.004	.010	.041	.109
	7								.001	.008	.031
	8									.001	.004
9	0	.914	.834	.630	.387	.232	.134	.075	.040	.010	.002
	1	.083	.153	.299	.387	.368	.302	.225	.156	.060	.018
	2	.003	.013	.063	.172	.260	.302	.300	.267	.161	.070
	3		.001	.008	.045	.107	.176	.234	.267	.251	.164
	4			.001	.007	.028	.066	.117	.172	.251	.246
	5				.001	.005	.017	.039	.074	.167	.246
	6					.001	.003	.009	.021	.074	.164
	7							.001	.004	.021	.070
	8									.004	.018
	9										.002

freie Stellen bedeuten: $\mathbf{b}(r; n, p) > .0005$.

(Fortsetzung)

$\mathbf{b}(r; n, p)$

n	r	$p = .01$	.02	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.40	.50
10	0	.904	.817	.599	.349	.197	.107	.056	.028	.006	.001
	1	.091	.167	.315	.387	.347	.268	.188	.121	.040	.010
	2	.004	.015	.075	.194	.276	.302	.282	.233	.121	.044
	3		.001	.010	.057	.130	.201	.250	.267	.215	.117
	4			.001	.011	.040	.088	.146	.200	.251	.205
	5				.001	.008	.026	.058	.103	.201	.246
	6					.001	.006	.016	.037	.111	.205
	7						.001	.003	.009	.042	.117
	8								.001	.011	.044
	9									.002	.010
	10										.001
15	0	.860	.739	.463	.206	.087	.035	.013	.005	.000	.000
	1	.130	.226	.366	.343	.231	.132	.067	.031	.005	.000
	2	.009	.032	.135	.267	.286	.231	.156	.092	.022	.003
	3		.003	.031	.129	.218	.250	.225	.170	.063	.014
	4			.005	.043	.116	.188	.225	.219	.127	.042
	5			.001	.010	.045	.103	.165	.206	.186	.092
	6				.002	.013	.043	.092	.147	.207	.153
	7					.003	.014	.039	.081	.177	.196
	8					.001	.003	.013	.035	.118	.196
	9						.001	.003	.012	.061	.153
	10							.001	.003	.024	.092
	11								.001	.007	.042
	12									.002	.014
	13										.003
	14										
	15										
20	0	.818	.668	.358	.122	.039	.012	.003	.001	.000	.000
	1	.165	.272	.377	.270	.137	.058	.021	.007	.000	.000
	2	.016	.053	.189	.285	.229	.137	.067	.028	.003	.000
	3	.001	.006	.060	.190	.243	.205	.134	.072	.012	.001
	4		.001	.013	.090	.182	.218	.190	.130	.035	.005
	5			.002	.032	.103	.175	.202	.179	.075	.015
	6				.009	.045	.109	.169	.192	.124	.037
	7				.002	.016	.055	.112	.164	.166	.074
	8					.005	.022	.061	.114	.180	.120
	9					.001	.007	.027	.065	.160	.160
	10						.002	.010	.031	.117	.176
	11							.003	.012	.071	.160
	12							.001	.004	.035	.120
	13								.001	.015	.074
	14									.005	.037
	15									.001	.015
	16										.005
	17										.001
	18										
	19										
	20										

Zufallszahlen

62483	55445	80895	43055	29682
09255	67132	07454	77644	70903
49979	59207	95504	99022	18529
90249	57452	40864	18665	78138
77549	81759	54304	61250	66699
76179	79533	64104	29709	37190
28596	22223	60280	46786	58623
20770	24192	08705	80677	79847
92625	51170	26874	78382	26398
28415	13180	59307	27329	07272
99047	16485	88497	12806	36211
96473	34238	54870	15512	96324
34324	21563	57794	11107	04158
36276	19759	88914	82368	01203
34678	37106	28420	39276	19117
31979	49329	83742	05647	26962
66208	14507	05855	27500	47616
01494	41401	56658	60208	54181
44360	52562	83111	54031	27834
03894	47680	74577	77226	20716
07031	93942	96934	79554	44074
21059	54837	40761	55969	64622
45286	88209	61026	44535	44285
34927	79089	05330	22104	59632
36165	24164	58437	19923	80475
37608	94140	14585	80655	94850
46730	12214	11015	72134	03847
33971	68083	05917	27896	93466
81654	96364	91122	35741	26619
70159	43964	67805	31452	34039
88743	95788	64467	95939	13659
84439	96972	56996	69182	85423
70330	91241	86901	05901	62508
09705	18931	61236	24129	62162
29678	50391	13190	15092	89017
00918	92378	30580	75852	95352
65453	81851	08703	36098	01017
78806	57628	78931	82451	89663
51330	72244	42157	43455	63889
18281	56070	09232	93952	57834
64353	37648	00401	72530	14489
30499	32631	47076	39657	43078
02031	80276	70492	39758	65253
29492	25096	48338	91815	64806
54042	56695	06917	79628	70701
92154	74519	57381	66251	96197
45890	99918	89770	35212	87582
54853	04762	12154	09150	34920
33401	71486	42807	79008	74244
37345	81231	81516	17763	53698

Zufallszahlen (Fortsetzung)

28470	19220	15251	81185	80949
05763	73998	70518	30736	77140
46967	59492	81935	44627	84918
65361	73425	04969	03676	27486
79821	50363	08667	98500	42817
77019	03964	93346	88152	03833
00884	34387	15224	51234	39434
67676	93996	82687	50068	72664
03119	47252	21495	49173	75833
36641	96536	88110	52973	70006
94747	79548	47263	68535	95606
41779	46981	67109	48880	10904
41500	58247	31942	01343	98176
70479	65749	63606	34527	92341
85243	78316	49539	79128	00224
99998	77109	67495	75596	49799
62074	15227	52236	79174	56289
82992	54801	39132	45332	19371
79503	73188	56454	91756	66459
22710	90391	69403	28217	29460
61686	12118	32455	27147	43331
66868	86886	16048	06962	36381
12204	53778	51127	43422	87225
18893	57833	10340	80118	54645
38143	41971	14805	09795	05943
20827	09452	72782	82231	75340
14123	49864	58660	71595	00363
42316	49930	86439	99287	98624
78495	80189	14086	19743	93623
41292	37330	29993	27573	22481
99545	51902	72154	78368	08734
47168	58480	55103	70609	62239
51410	35094	04263	37717	96866
89509	17236	49840	86025	96416
89731	85785	36220	52879	04604
89918	90438	99982	58187	51539
72618	80754	21291	96433	09214
81530	13638	79720	52571	40507
08901	04808	25832	51404	68377
41388	94935	40894	29304	87665
32777	08201	32680	12876	72006
46754	47018	16225	81687	28647
42759	80483	35260	09318	36720
59376	12414	43204	30006	61461
92163	40927	89243	84735	26876
05968	73574	21954	09901	01159
18573	36121	81220	26043	52796
13380	74910	59169	20433	25333
13400	54167	90416	10325	66284
86166	10097	51518	10052	89113

Zufallszahlen (Fortsetzung)

75722	89176	80307	63131	87190
49212	34682	44641	82369	81519
95090	09765	65628	98729	68001
17768	68852	48428	68154	10053
41378	07937	62350	82051	61684
73373	43037	11991	87921	38622
38863	17327	93732	24181	76505
09372	51990	38141	38974	95696
18120	15814	54770	66557	27710
71357	11797	39062	32276	87037
08173	80204	46402	22043	38310
64736	99181	18771	61220	36062
78891	35239	40508	26934	58585
06826	07463	41653	11745	45947
34666	79532	69093	82296	05513
76588	40389	41867	18461	94237
28227	45664	64682	53229	65676
25692	62227	50386	78806	22102
84543	66728	53281	73306	19259
60751	38660	82292	89939	25992
52448	54178	85018	41958	14992
21933	95640	84120	86031	79793
65366	05401	50738	55701	36802
17149	09217	10663	80471	65572
29193	87336	31182	29963	17936
33971	62401	83210	62752	28165
12172	59935	57556	33795	41570
84948	95439	66849	87170	59861
55742	68345	74918	20733	49522
98479	59802	11015	74621	17321
87574	77012	69497	37400	02373
74299	56964	79566	16613	74702
85926	23880	28376	33938	39506
01629	12674	99526	46071	71653
64489	72447	86570	15709	94996
16695	55798	04605	56249	96625
86689	68192	76289	64144	75515
29640	00748	64256	31576	48882
45602	31186	58670	80988	93346
30102	54221	72477	02417	95440
54677	34916	64338	57901	24058
17610	95371	86682	63993	47947
30737	56574	26131	15817	73625
70920	38347	42717	69086	33901
09234	30789	21794	29397	71235
94148	02940	96255	69893	20415
44067	65060	18249	87803	25662
30815	41690	04630	70317	52740
77881	01796	78496	79806	44414
95254	38929	27324	40237	77323

Zufallszahlen (Fortsetzung)

40575	79339	59874	56320	61151
81968	53775	82368	68218	48016
87689	03896	20884	56709	30480
31228	10777	79488	57472	10959
63510	73019	18266	77263	16598
23651	78815	98791	35854	94772
49628	69773	10359	62152	04334
51211	03442	07060	48154	83052
00752	87877	00117	50449	08581
96370	84776	72822	12949	84844
71555	41764	93579	96082	35335
24276	88597	30626	31213	63751
85194	59692	01220	44923	85040
54700	86194	72751	91697	95782
09692	70582	05989	66620	95318
75873	24064	95514	29067	78134
68051	33729	67378	54609	48365
52151	34667	66402	76208	95307
96561	75175	09677	46147	07121
21916	97649	79441	63537	17219
35707	98838	25899	47716	49946
30575	18276	41443	10501	27998
50374	69340	97816	18812	89428
00347	13222	36546	98795	20132
86642	13038	23994	21604	52991
97019	50685	61161	88121	15959
32599	80442	14069	52853	34648
31442	33682	28978	63258	17212
37463	38728	04291	77354	71750
48312	56799	23047	21775	25114
50732	73577	37090	25567	49898
08742	00359	81816	87036	29986
45734	62166	07098	24142	86220
75917	60196	73294	08512	29384
50880	33109	84342	65725	10194
78906	94031	46346	87543	07827
12405	56648	78777	86456	70986
72884	78154	98615	55814	87076
64383	40305	82186	63302	10323
96740	93229	46308	97470	34214
20230	97803	49985	81833	87365
10730	60143	51446	83530	03657
36099	22521	53482	52322	27098
83634	88066	67394	72624	45344
46314	37551	82125	16293	35180
41825	39069	75375	27059	27732
95291	18681	95794	97366	84647
76548	57499	76221	49147	24140
76071	77716	87073	37591	60869
26495	12526	70314	58329	79129

Aufzinsungsfaktoren

$(1 + r)^n$

$n \backslash r$	.0025	.0050	.0075	.010	.015	.020	.025	.030
4	1.0100	1.0202	1.0303	1.0406	1.0614	1.0824	1.1038	1.1255
8	1.0202	1.0407	1.0616	1.0829	1.1265	1.1717	1.2184	1.2668
12	1.0304	1.0617	1.0938	1.1268	1.1956	1.2682	1.3449	1.4258
16	1.0408	1.0831	1.1270	1.1726	1.2690	1.3728	1.4845	1.6047
20	1.0512	1.1049	1.1612	1.2202	1.3469	1.4859	1.6386	1.8061
24	1.0618	1.1272	1.1964	1.2697	1.4295	1.6084	1.8087	2.0328
30	1.0778	1.1614	1.2513	1.3478	1.5631	1.8114	2.0976	2.4273
36	1.0941	1.1967	1.3086	1.4308	1.7091	2.0399	2.4325	2.8983
42	1.1106	1.2330	1.3686	1.5188	1.8688	2.2972	2.8210	3.4607
48	1.1273	1.2705	1.4314	1.6122	2.0435	2.5871	3.2715	4.1323
54	1.1443	1.3091	1.4970	1.7114	2.2344	2.9135	3.7939	4.9341
60	1.1616	1.3489	1.5657	1.8167	2.4432	3.2810	4.3998	5.8916
72	1.1969	1.4320	1.7126	2.0471	2.9212	4.1611	5.9172	8.4000
84	1.2334	1.5204	1.8732	2.3067	3.4926	5.2773	7.9580	11.976
96	1.2709	1.6141	2.0489	2.5993	4.1758	6.6929	10.703	17.076
108	1.3095	1.7137	2.2411	2.9289	4.9927	8.4883	14.394	24.346
120	1.3494	1.8194	2.4514	3.3004	5.9693	10.765	19.358	34.711
180	1.5674	2.4541	3.8380	5.9958	14.584	35.321	85.172	204.50
240	1.8208	3.3102	6.0092	10.893	35.633	115.89	374.74	1204.9
300	2.1150	4.4650	9.4084	19.788	87.059	380.23	1648.8	7098.5
360	2.4568	6.0226	14.731	35.950	212.70	1247.6	7254.2	41822.

$n \backslash r$	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700	1.0800	1.0900
2	1.0609	1.0816	1.1025	1.1236	1.1449	1.1664	1.1881
3	1.0927	1.1249	1.1576	1.1910	1.2250	1.2597	1.2950
4	1.1255	1.1699	1.2155	1.2625	1.3108	1.3605	1.4115
5	1.1593	1.2167	1.2763	1.3382	1.4026	1.4693	1.5386
6	1.1941	1.2653	1.3401	1.4185	1.5007	1.5869	1.6771
7	1.2299	1.3159	1.4071	1.5036	1.6058	1.7138	1.8280
8	1.2668	1.3686	1.4775	1.5938	1.7182	1.8509	1.9926
9	1.3048	1.4233	1.5513	1.6895	1.8385	1.9990	2.1719
10	1.3439	1.4802	1.6289	1.7908	1.9672	2.1589	2.3674
12	1.4258	1.6010	1.7959	2.0122	2.2522	2.5182	2.8127
14	1.5126	1.7317	1.9799	2.2609	2.5785	2.9372	3.3417
16	1.6047	1.8730	2.1829	2.5404	2.9522	3.4259	3.9703
18	1.7024	2.0258	2.4066	2.8543	3.3799	3.9960	4.7171
20	1.8061	2.1911	2.6533	3.2071	3.8697	4.6610	5.6044
25	2.0938	2.6658	3.3864	4.2919	5.4274	6.8485	8.6231
30	2.4273	3.2434	4.3219	5.7435	7.6123	10.063	13.268
35	2.8139	3.9461	5.5160	7.6861	10.677	14.785	20.414
40	3.2620	4.8010	7.0400	10.286	14.974	21.725	31.409
45	3.7816	5.8412	8.9850	13.765	21.002	31.920	48.327
50	4.3839	7.1067	11.467	18.420	29.457	46.902	74.358

Aufzinsungsfaktoren (Fortsetzung)

$n\backslash r$	.10	.12	.14	.16	.18	.20
1	1.1000	1.1200	1.1400	1.1600	1.1800	1.2000
2	1.2100	1.2544	1.2996	1.3456	1.3924	1.4400
3	1.3310	1.4049	1.4815	1.5609	1.6430	1.7280
4	1.4641	1.5735	1.6890	1.8106	1.9388	2.0736
5	1.6105	1.7623	1.9254	2.1003	2.2878	2.4883
6	1.7716	1.9738	2.1950	2.4364	2.6996	2.9860
7	1.9487	2.2107	2.5023	2.8262	3.1855	3.5832
8	2.1436	2.4760	2.8526	3.2784	3.7589	4.2998
9	2.3579	2.7731	3.2519	3.8030	4.4355	5.1598
10	2.5937	3.1058	3.7072	4.4114	5.2338	6.1917
12	3.1384	3.8960	4.8179	5.9360	7.2876	8.9161
14	3.7975	4.8871	6.2613	7.9875	10.147	12.839
16	4.5950	6.1304	8.1372	10.748	14.129	18.488
18	5.5599	7.6900	10.575	14.463	19.673	26.623
20	6.7275	9.6463	13.743	19.461	27.393	38.337
25	10.835	17.000	26.462	40.874	62.669	95.396
30	17.449	29.960	50.950	85.850	143.37	237.38
35	28.102	52.800	98.100	180.31	328.00	590.67
40	45.259	93.051	188.88	378.72	750.38	1469.8
45	72.890	163.99	363.68	795.44	1716.7	3657.3
50	117.39	289.00	700.23	1670.7	3927.4	9100.4

$n\backslash r$	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	1.2500	1.3000	1.3500	1.4000	1.4500	1.5000
2	1.5625	1.6900	1.8225	1.9600	2.1025	2.2500
3	1.9531	2.1970	2.4604	2.7440	3.0486	3.3750
4	2.4414	2.8561	3.3215	3.8416	4.4205	5.0625
5	3.0518	3.7129	4.4840	5.3782	6.4097	7.5938
6	3.8147	4.8268	6.0534	7.5295	9.2941	11.391
7	4.7684	6.2749	8.1722	10.541	13.476	17.086
8	5.9605	8.1573	11.032	14.758	19.541	25.629
9	7.4506	10.604	14.894	20.661	28.334	38.443
10	9.3132	13.786	20.107	28.925	41.085	57.665
12	14.552	23.298	36.644	56.694	86.381	129.75
14	22.737	39.374	66.784	111.12	181.62	291.93
16	35.527	66.542	121.71	217.80	381.85	656.84
18	55.511	112.46	221.82	426.88	802.83	1477.9
20	86.736	190.05	404.27	836.68	1688.0	3325.3
25	264.70	705.64	1812.8	4499.9	10819.	25251.
30	807.79	2620.0	8128.5	24201.	69349.	191750.
35	2465.2	9727.9	36449.	130160.	444510.	1456100.
40	7523.2	36119.	163440.	700040.	2849200.	11057000.
45	22959.	134110.	732860.	3765000.	18262000.	83967000.
50	70065.	497930.	3286200.	20249000.	117060000.	637620000.

Rentenbarwertfaktoren

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$$

n/r	.0025	.0050	.0075	.010	.015	.020	.025	.030
4	3.9751	3.9505	3.9261	3.9020	3.8544	3.8077	3.7620	3.7171
8	7.9107	7.8230	7.7366	7.6517	7.4859	7.3255	7.1701	7.0197
12	11.807	11.619	11.435	11.255	10.908	10.575	10.258	9.9540
16	15.665	15.340	15.024	14.718	14.131	13.578	13.055	12.561
20	19.484	18.987	18.508	18.046	17.169	16.351	15.589	14.877
24	23.266	22.563	21.889	21.243	20.030	18.914	17.885	16.936
30	28.868	27.794	26.775	25.808	24.016	22.396	20.930	19.600
36	34.386	32.871	31.447	30.108	27.661	25.489	2.3556	21.832
42	39.823	37.798	35.914	34.158	30.994	28.235	25.821	23.701
48	45.179	42.580	40.185	37.974	34.043	30.673	27.773	25.267
54	50.455	47.221	44.269	41.569	36.831	32.838	29.457	26.578
60	55.652	51.726	48.173	44.955	39.380	34.761	30.909	27.676
72	65.817	60.340	55.477	51.150	43.845	37.984	33.240	29.365
84	75.681	68.453	62.154	56.648	47.579	40.526	34.974	30.550
96	85.255	76.095	68.258	61.528	50.702	42.529	36.263	31.381
108	94.545	83.293	73.839	65.858	53.314	44.110	37.221	31.964
120	103.56	90.073	78.942	69.701	55.498	45.355	37.934	32.373
180	144.81	118.50	98.593	83.322	62.096	48.584	39.530	33.170
240	180.31	139.58	111.14	90.819	64.796	49.569	39.893	33.306
300	210.88	155.21	119.16	94.947	65.901	49.869	39.976	33.329
360	237.19	166.79	124.28	97.218	66.353	49.960	39.994	33.333

n/r	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1	.9709	.9615	.9524	.9434	.9346	.9259	.9174
2	1.9135	1.8861	1.8594	1.8334	1.8080	1.7833	1.7591
3	2.8286	2.7751	2.7232	2.6730	2.6243	2.5771	2.5313
4	3.7171	3.6299	3.5460	3.4651	3.3872	3.3121	3.2397
5	4.5797	4.4518	4.3295	4.2124	4.1002	3.9927	3.8897
6	5.4172	5.2421	5.0757	4.9173	4.7665	4.6229	4.4859
7	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824	5.3893	5.2064	5.0330
8	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098	5.9713	5.7466	5.5348
9	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017	6.5152	6.2469	5.9952
10	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601	7.0236	6.7101	6.4177
12	9.9540	9.3851	8.8633	8.3838	7.9427	7.5361	7.1607
14	11.296	10.563	9.8986	9.2950	8.7455	8.2442	7.7862
16	12.561	11.652	10.838	10.106	9.4466	8.8514	8.3126
18	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.3719	8.7556
20	14.877	13.590	12.462	11.470	10.594	9.8181	9.1285
25	17.413	15.622	14.094	12.783	11.654	10.675	9.8226
30	19.600	17.292	15.372	13.765	12.409	11.258	10.274
35	21.487	18.665	16.374	14.498	12.948	11.655	10.567
40	23.115	19.793	17.159	15.046	13.332	11.925	10.757
45	24.519	20.720	17.774	15.456	13.606	12.108	10.881
50	25.730	21.482	18.256	15.762	13.801	12.233	10.962

Rentenbarwertfaktoren (Fortsetzung)

n/r	.10	.12	.14	.16	.18	.20
1	.9091	.8929	.8772	.8621	.8475	.8333
2	1.7355	1.6901	1.6467	1.6052	1.5656	1.5278
3	2.4869	2.4018	2.3216	2.2459	2.1743	2.1065
4	3.1699	3.0373	2.9137	2.7982	2.6901	2.5887
5	3.7908	3.6048	3.4331	3.2743	3.1272	2.9906
6	4.3553	4.1114	3.8887	3.6847	3.4976	3.3255
7	4.8683	4.5638	4.2883	4.0386	3.8115	3.6046
8	5.3349	4.9676	4.6389	4.3436	4.0776	3.8372
9	5.7590	5.3282	4.9464	4.6065	4.3030	4.0310
10	6.1446	5.6502	5.2161	4.8332	4.4941	4.1925
12	6.8137	6.1944	5.6603	5.1971	4.7932	4.4392
14	7.3667	6.6282	6.0021	5.4675	5.0081	4.6106
16	7.8237	6.9740	6.2651	5.6685	5.1624	4.7296
18	8.2014	7.2497	6.4674	5.8178	5.2732	4.8122
20	8.5136	7.4694	6.6231	5.9288	5.3527	4.8696
25	9.0770	7.8431	6.8729	6.0971	5.4669	4.9476
30	9.4269	8.0552	7.0027	6.1772	5.5168	4.9789
35	9.6442	8.1755	7.0700	6.2153	5.5386	4.9915
40	9.7791	8.2438	7.1050	6.2335	5.5482	4.9966
45	9.8628	8.2825	7.1232	6.2421	5.5523	4.9986
50	9.9148	8.3045	7.1327	6.2463	5.5541	4.9995

n/r	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	.8000	.7692	.7407	.7143	.6897	.6667
2	1.4400	1.3609	1.2894	1.2245	1.1653	1.1111
3	1.9520	1.8161	1.6959	1.5889	1.4933	1.4074
4	2.3616	2.1662	1.9969	1.8492	1.7195	1.6049
5	2.6893	2.4356	2.2200	2.0352	1.8755	1.7366
6	2.9514	2.6427	2.3852	2.1680	1.9831	1.8244
7	3.1611	2.8021	2.5075	2.2628	2.0573	1.8829
8	3.3289	2.9247	2.5982	2.3306	2.1085	1.9220
9	3.4631	3.0190	2.6653	2.3790	2.1438	1.9480
10	3.5705	3.0915	2.7150	2.4136	2.1681	1.9653
12	3.7251	3.1903	2.7792	2.4559	2.1965	1.9846
14	3.8241	3.2487	2.8144	2.4775	2.2100	1.9931
16	3.8874	3.2832	2.8337	2.4885	2.2164	1.9970
18	3.9279	3.3037	2.8443	2.4941	2.2195	1.9986
20	3.9539	3.3158	2.8501	2.4970	2.2209	1.9994
25	3.9849	3.3286	2.8556	2.4994	2.2216	1.9999
30	3.9950	3 3321	2.8568	2.4999	2.2219	2.0000
35	3.9984	3.3330	2.8571	2.5000	2.2222	2.0000
40	3.9995	3.3332	2.8571	2.5000	2.2222	2.0000
45	3.9998	3.3333	2.8571	2.5000	2.2222	2.0000
50	3.9999	3.3333	2.8571	2.5000	2.2222	2.0000

Sachverzeichnis

Abhängigkeit von Sätzen, 33
Abschreibungen, 340ff.
Absorbierende Markov'sche Ketten, 286
Absorbierende Zustände, 287
Abzinsungsfaktor, 326
Äquivalenz, 10
Amortisationsdauer, 333
Amortisationssatz, 334
Annuitätenfaktor, 326
Arbeitsgang
  Früheste Anfangszeit eines —, 76
  früheste Endzeit eines —, 76
  späteste Endzeit eines —, 76
  späteste Anfangszeit —, 76
  Pufferzeit eines —, 77
  kritischer —, 77
Assoziatives Gesetz, 253
Aufspaltungen:
  Anzahl von —, 103
  geordnete —, 103
  — zweiwertiger Klassen, 103
Ausgangsmatrix, 288
Aussage, offene 371

Barwertfaktor, 333
Basiskonjunktionen, 38
Basisserienschaltung, 43
Baummaßzahl, 163
Bauteile, Verläßlichkeit von, 218
Bayessches Theorem, 153
Bedingte Wahrscheinlichkeit, 153
Beständekontrolle, 213
Bestandskosten, 355
Bestellmenge, 215
Bilanz, 345, 359
Binomialer Lehrsatz, 114
Binomiale Wahrscheinlichkeit, 173
Binomialkoeffizienten, 105
  Eigenschaften der —, 111
  Errechnung der —, 128

Critical Path Method, 73

Differenzgleichungen, 318
Diktator, 71
Disjunktion, 5
Dominieren von Spalten und Reihen, 435
Doppelte Buchführung, 352
  Flußdiagramme für —, 365
Doppelte Klassifikation, 352
Duales Problem des linearen Programmierens, 393
Dualitätstheorem, 402
Dualzahlen, 45
Durchschnitt zweier Klassen, 58

Echte Unterklasse, 55
Endkapital bei Zinseszins, 325
Epdliche Reihen, 318
Entscheidungsbäume, 25
Entscheidungsfällung:
  — Unter Sicherheit, 26, 310
  — unter Unsicherheit, 26, 310
Entscheidungsregeln, 24, 176
Entscheidungstheorie, 224,ff.
Erwartungswert, 181, 189, 226

Finanzielles Berichtswesen, 359
Finanzmathematik, 318
Flußdiagramme zur Errechnung, 121,127
  der Amortisationsdauer, 336
  des arithmetischen Mittels, 129
von Binomialkoeffizienten, 128
von Mittelwerten, 131
  von Zinskoeffizienten, 323
  für Buchhaltungszwecke, 365
  für Simulationszwecke, 205, 211

Gemischte Strategie, 417
Geometrischer Ort, 371
Gesetz der großen Zahl, 179

Gewinn- und Verlustrechnung, 354, 359
Gleichgewicht
— Einer Volkswirtschaft, 445
— Lösung, 450
Vorhandensein eines —, 452

Halbebene, offene, 372
Halbräume
— offene —, 373
abgeschlossene —, 373
Hyperebene, begrenzte, 378
Hypergeometrische Wahrscheinlichkeit 147, 148

Implikation, 9, 30, 33
Inkonsistent, 32

Klasse, leere, 55
Arbeiten mit —, 58
Arbeiten mit —, 58
Differenz von —, 60
Durchschnitt zweier —, 58
Einer —, 55
Elemente einer —, 95
Kompliment einer —, 59
Universal —, 55
Unter —, 55, 58
Koalitionen:
blockierende —, 70
gewinnende —, 70
minimalgewinnende —, 71
verlierende —, 70
Wahl —, 69
Diktator, 71
Vetorecht, 71
Kommutatives Gesetz, 234
Komplement einer Klasse, 59
Komponenten
— eines Vektors, 233
— einer Matrix, 246
Konjunktionen, 4
Basis —, 37
Kontradiktion, 34
Kontradiktorisches Satzpaar, 34
Konvexe Punktmenge, 374
Kritischer Weg, 73ff.

Leere Klasse, 55
Lineare Gleichungen:
Lösung von —, 257
Koeffizienten Matrix von —, 261
Lineares Programmieren, 371
Duale Probleme des —, 393, 402
Probleme des —, 386
entartete Systeme —, 392
Logische Beziehungen, 30, 33
Logische Möglichkeiten, 1, 13
Baumdiagramme für —, 20

Markov'sche Ketten, 195, 278
absorbierende —, 286ff.
Fixpunkt, 280
Investitionsproblem als —, 308
Personalsprobleme als —, 305
Übergangsmatirx, 278
Übergangswahrscheinlichkeiten, 279
Warteschlangen als —, 294
Maßzahl der Gleichwahrscheinlichkeit 142
Maßzahl der Wahrscheinlichkeit, 136
Matrix
Aufspaltung einer —, 359
Berichtigungs —, 364
— der Vorgänge, 355
erweiterte —, 261
Inverse einer —, 266
— Spiele, 422
Transponierte —, 358
Matrizen,
Addition von —, 251
Gleichgewicht von —, 244
Multiplikation von —, 253
Produkt eines Skalars mit —, 252
Verbindung mit Vektoren, 243
Medianwert, 129
Mittelwert, 129

Nachträgliche Wahrscheinlichkeit, 157
Negation, 5
Netzplantechnik, 73
Nicht-Nullsummenspiele, 466
Nicht-Strengbestimmte Spiele, 415
Nullsummenspiele, 410

Offene Aussage, 371
Oktalzahlsystem, 48
Optimale Strategien, 412
Ort, geometrischer, 371

Payback period, 333, 99
Permutation, vollständige, 151
Poker, vereinfacher, 441
Polynomischer Lehrsatz, 114
Probebilanz, 356
Projekt, 74
Punktmenge, konvexe, 371, 374
  begrenzte —, 381
  polyedrische —, 371
  unbegrenzte —, 380

Queraufspaltung, 86

Randlochkarten, 357
Reihen, endliche, 318
Rentenbarwertfaktor, 325
Rentenendwertfaktor, 326

Sätze:
  abhängige —, 33
  Äquivalenz von —, 10, 31
  Implikation, 29, 33
  inkonsistent, 32
  kontradiktorische —, 34
  logisch falsche, 15
  logisch wahre —, 15
  subkonträre —, 34
  unabhängige —, 34
  Verknüpfung von —, 1
Satzverknüpfungen, 1
  Subkonträr, 34
  Teile von —, 1
  Wahrheitsklassen von —, 64
Schattenpreise, 403
Schaltkreise elektronischer Rechenmaschinen, 41, 48
Schlupfvariable, 406
Simplex Methode
  — für lineare Programmierung, 392
  — für Spielprobleme, 458
  Flußdiagramme für —, 396
Simplex Tableau, 398

Spiele:
  determinierte —, 410, 420
  Gleichgewichtspunkt von —, 432
  Lösung eines Spieles
    Drohlösung 466
    Kooperativlösung, 471
    Maximierungslösung, 466
  Matrix —, 422
  Maximinstrategie, 468
  Nicht-Nullsummen —, 466
  Nullsummen —, 410
  Sattelpunkte von —, 412
  Strategien eines —, 469
  Strategien, reine, 423, 411
    gemischte, 417
    optimale, 412, 424
  Theorie der —, 410
  Wert eines —, 412, 415
Standardabweichungen, 181
Steuereinsparungen durch Abschreibungen, 340
Stochastische Prozesse, 161 ff.
Stücklistenproblem, 272

Tautologie, 15
Technologische Koeffizienten, 404
Technologische Reihenfolge, 272
Theorie der Warteschlangen, 294
Tilgungsrate, 325
Transponierte, 358

Unabhängige Sätze, 17, 34
Unabhängige Versuche, 155, 170
Unterklasse, 54
  echte —, 54
Unterprogramme, 131
Unvereinbarkeit von Sätzen, 32, 34
Ursprüngliche Wahrscheinlichkeit, 156

Vektoren:
  Aktivitäten, 404
  der abgeleiteten Werte, 404
  der Restriktionen, 404
  Gewinn, 404
  Kosten, 404
  Nachfrage, 274
  Null, 235

Vektoren:
Preis, 447
Produktions, 274
Spalten, 401
Wahrscheinlichkeits, 279
Venn-Diagramme, 96
Verknüpfungszeichen, 3
Äquivalenz, 10
ausschließende, 5
Disjunktion, 5
einschließende, 5
Implikation, 9
Konjunktion, 4
Negation, 5
Vetorecht, 71
Verkehrsdichte, 297
Vollständige Permutation

Wachstumsfaktor, 449
Wahrheitsklassen
Von Sätzen, 63
von offenen Aussagen, 373
Wahrheitstafel, 5, 37
Wahlvorgänge, 118
Wahrscheinlichkeit
Bedingte —, 153
— einer Aussage, 136
— einer Stichprobe, 146
hypergeometrische —, 148
—maßzahl, 138, 161
nachträgliche —, 157
ursprüngliche —, 156
Wahrscheinlichkeitsvektor, 279
Warteschlange, Theorie der, 202, 294
Weg, kritischer, 77
Wertschätzung, 248

Zahlen
Dezimal —, 45
Dual —, 45
Oktale —, 48
Zufalls —, 202
Zellen, einer Klasse, 85
Zinsfaktor, 449
Zinssatz, 324ff.
Nomineller, 337
tatsächlicher, 337

Weitere empfehlenswerte Fachliteratur
aus dem Verlag Walter de Gruyter & Co · Berlin 30

Volkswirtschaft

Allgemeine Volkswirtschaftslehre

von ANDREAS PAULSEN. 4 Bände. 4.—7. Auflage. 1965/1966. Je Band DM 3,60 (Sammlung Göschen Band 1169, 1170, 1171, 1172)

Allgemeine Volkswirtschaftspolitik

von HANS OHM. 2 Bände. Band 1: 2. Auflage. 1965. Band 2: In Vorbereitung. Je Band DM 3,60 (Sammlung Göschen Band 1195, 1196)

Finanzwissenschaft

von HEINZ KOLMS. 4 Bände. 1.—3. Auflage. 1962/1966. Band 1—3 je DM 3,60; Band 4 DM 5,80 (Sammlung Göschen Band 148, 391, 776, 782/782a)

Betriebswirtschaft

Allgemeine Betriebswirtschaftslehre

von KONRAD MELLEROWICZ. 4 Bände. 11.—12. Auflage. 1962/1964. Je Band DM 5,80 (Sammlung Göschen Band 1008/1008a, 1153/1153a, 1154/1154a, 1186/1186a)

Kosten und Kostenrechnung

von KONRAD MELLEROWICZ. 4., durchgesehene Auflage. Groß-Oktav. Ganzleinen. I: Theorie der Kosten. 533 Seiten. 1963. DM 30,—; II, 1: Allgemeine Fragen der Kostenrechnung und Betriebsabrechnung. Etwa XVI, 525 Seiten. 1966 Etwa DM 40,—

Buchhaltung und Bilanz

von ERICH KOSIOL. 170 Seiten. 1964. DM 5,80 (Sammlung Göschen Band 1213/1213a)

Budgetierung

Grundsätze und Praxis der betriebswirtschaftlichen Planung. Von HERMAN C. HEISER. Groß-Oktav. 425 Seiten. 1964. Ganzleinen DM 68,—

Investitionsrechnung

von HEINRICH H. JONAS. Groß-Oktav. Mit zahlreichen Tabellen und Abbildungen. 153 Seiten. 1964. Ganzleinen DM 28,—

Interne Revision

von Viktor Z. Brink und James A. Cashin. Groß-Oktav. 514 Seiten. 1962. Ganzleinen DM 48,—

Internationaler Grundriß der wissenschaftlichen Unternehmensführung

von Kurt Junckerstorff. Groß-Oktav. 283 Seiten. 1964. Ganzleinen DM 34,—

Datenverarbeitung

Automatentheorie

von Wolfgang Händler. Groß-Oktav. Etwa 320 Seiten. 1966. In Vorbereitung.

Die automatisierte elektronische Datenverarbeitung

und ihre Bedeutung für die Unternehmensleitung. Von Andreas Diemer. 2., erweiterte Auflage. Groß-Oktav. Mit zahlreichen Abbildungen. Etwa 300 Seiten. 1966. Im Druck

Einführung in die Programmierung digitaler Rechenautomaten

von Fritz Rudolf Güntsch. 2., erweiterte und neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. Mit 3 Tafeln und vielen Textabbildungen. 388 Seiten. 1963. Ganzleinen DM 54,—

Digitalrechner in technischen Prozessen

von Helmut Hotes. Groß-Oktav. Etwa 250 Seiten. 1966. In Vorbereitung

Statistik

Allgemeine Methodenlehre der Statistik

von Johann Pfanzagl. 2 Bände. 2.—3. Auflage. 1966. Je Band DM 5,80 (Sammlung Göschen Band 746/746a, 747/747a)

Lehrbuch der praktischen Statistik

Bevölkerungs-, Wirtschafts-, Sozialstatistik. Von Peter Quante. Groß-Oktav. 443 Seiten. 1961. Ganzleinen DM 30,—

Kleines Lehrbuch der Statistik

für Naturwissenschaftler, Mediziner, Psychologen, Sozialwissenschaftler und Pädagogen. Von O. W. Haseloff u. H. J. Hoffmann. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage mit 49 Figuren und einem Anhang statistischer Tafeln. Groß-Oktav. XII, 253 Seiten. 1965. Plastikeinband DM 36,—

Elementare Statistische Tabellen

von Wolfgang Wetzel. Oktav. Etwa 200 Seiten. 1966. Etwa DM 10,—

Stichworte und Definitionen zur Amtlichen Bevölkerungs- und Wirtschaftsstatistik

der Bundesrepublik Deutschland (Stand 31. 8. 1965). Von Wolfgang Wetzel und Klaus Grenzdörffer. Oktav. 50 Seiten. 1965. DM 4,80

Mathematische Methoden in der Wirtschaft

Mathematische Entscheidungsforschung

und ihre Anwendung auf die Produktionspolitik. Von Hans-Jürgen Zimmermann. Groß-Oktav. 147 Seiten. Mit 5 Tabellen und 14 Abbildungen. 1963. Ganzleinen DM 28,—

Finanzmathematik

von Marcel Nicolas. 192 Seiten, 11 Tafeln, 8 Tabellen und 72 Beispiele. 1959. DM 5,80 (Sammlung Göschen Band 1183/1183a)

Lineare Programmierung

von Heinz Langen. Etwa 200 Seiten. In Vorbereitung. (Sammlung Göschen Band 1206/1206a)

Die Anwendung der linearen Programmierung in Industriebetrieben

Von Peter Vokuhl. Groß-Oktav. 176 Seiten. Mit 9 Figuren und 18 Tabellen. 1965. Ganzleinen DM 28,—

Einführung in die Theorie der Spiele

Mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftslehre und Soziologie. Von Ewald Burger. 2., durchgesehene Auflage. Groß-Oktav. 169 Seiten. 1966. Ganzleinen DM 28,—

Theorie der Spiele und Linearprogrammierung

von S. Vaida. Oktav. 129 Seiten. Mit zahlreichen Abbildungen. 1962. Ganzleinen DM 16,—

Einführungen in die Mathematik

Mathematik von der Schule zur Hochschule

von Johannes Spoerel. 2., durchgesehene und verbesserte Auflage. Groß-Oktav. Mit 85 Figuren. XII, 210 Seiten. 1962. Ganzleinen DM 16,—

Lehrbuch der Mathematik

zum Selbstunterricht und für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Georg Scheffers. Groß-Oktav. VIII, 783 Seiten. 1962. Ganzleinen DM 36,—

Mathematik in der Sammlung Göschen

Eine Auswahl. Je Band DM 3,60 — Doppelbände DM 5,80

Arithmetik
von P. B. FISCHER†. 3. Auflage von H. ROHRBACH. 152 Seiten, 19 Abbildungen. 1958. (Bd. 47)

Höhere Algebra
von H. HASSE. 2 Bände. 4.—5. Auflage. 1958/63. (Bd. 931, 932)

Elementare und klassische Algebra
vom modernen Standpunkt von W. KRULL. 2 Bände. 1.—3. Auflage. 1959/63. (Bd. 930, 933)

Formale Logik
von P. LORENZEN. 3., verbesserte Auflage. 165 Seiten. 1966. (Bd. 1176/1176a)

Topologie
von W. FRANZ. 2 Bände. 1.—2. Auflage. 1965. (Bd. 1181, 1182/1182a)

Funktionentheorie
von K. KNOPP. 2 Bände. 11. Auflage. 1965. (Bd. 668, 703)

Differential- und Integralrechnung
von M. BARNER (früher Witting). 4 Bände. I: 2., durchgesehene Auflage. 176 Seiten. 39 Figuren. 1963. (Bd. 86) II-IV: In Vorbereitung

Mengenlehre
von E. KAMKE. 5. Auflage. 194 Seiten, 6 Figuren. 1965. (Bd. 999/999a)

Gruppentheorie
von L. BAUMGARTNER. 4., erweiterte Auflage. 190 Seiten, 3 Tafeln. 1964. (Bd. 837/837a)

Darstellende Geometrie
von W. HAACK. 3 Bände. 3.—5. Auflage. 1965. (Bd. 142, 143, 144)

Vektoren und Matrizen
von S. VALENTINER. 3. Auflage (10., erweiterte Auflage der „Vektoralanalysis"). Mit Anhang: Aufgaben zur Vektorrechnung von H.König. 206 Seiten, 35 Figuren. 1963. (Bd. 354/354a)

Wahrscheinlichkeitstheorie
und Grundzüge der Maßtheorie von H. BAUER. 2 Bände. I: 154 Seiten. 1964. II: In Vorbereitung. (Bd. 1216/1216a, 1217)

WALTER DE GRUYTER & CO · BERLIN 30